БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Vol.) VIII

КОМПЛЕКСИ ОТ ПРАВИ В ДВУОСНАТА ГЕОМЕТРИЯ

Грозьо Станилов

Геометрията на комплекси от прави за разлика от тази на рoеве и конгруенции е значително по-слабо развита. Това особено важи за двуосната геометрия, където за комплекси от прави е писано твърде малко или почти никак. Твърде естествено е, след като са изследвани диференциално-геометрично въпросите, свързани с линии, повърхнини, роеве и конгруенции от прави, да се изследват и комплексите. В нашата работа [5] ние намерихме каноничен репер за един специален клас от комплекси в двуосната геометрия. Това са комплексите, за които единствената инварианта от първи ред на правата от комплекса има стойност $\mu=0$. В общата теория на комплекси от прави в проективното пространство, развита в [7], не е открита двойка забележителни точки върху правата от комплекса, които естествено да се приемат за върхове на подвижния репер. В двуосното пространство, напротив, двойка забележителни точки върху правата от комплекса съществува — това са възловите точки на двата параболични развиваеми роя, минаващи през разглежданата права от комплекса [6]. По този начин линейната двуосна геометрия добива в известен смисъл завършен вид. Двойка забележителни точки върху правата от рой прави също е открита. Б. Петканчин в работите си [1, 2, 3 и 4] намира и използува за правата от всеки тип роеве прави в двуосното пространство две забележителни точки. Върху правата от една конгруенция прави също е налице една забележителна двойка точки — това са преди всичко фокусите на правата. В настоящата работа намерените две забележителни точки върху правата от комплекса не използуваме за върхове на подвижния репер. Това правим с оглед на постигане единство в изграждането на диференциалната геометрия на различните типове комплекси от прави, като едновременно третираме непараболичните и параболичните комплекси. Това осъществяваме, като поставяме четвъртия връх A_4 на репера в единия от инфлексионните центрове на правата от комплекса. Върхът A_3 лежи в асоциираната равнина в комплекса за точката A_4 от разглежданата права, а другите два върха се определят от геометричната същност на избрания репер. Лесно успяваме да решим твърде важния въпрос, свързан с диференциално-геометричното третиране на комплекс от прави — да определим комплекса от прави с три линейни диференциални форми. Намерена е и геометрично е изтълкувана единствената инварианта μ от първи ред на правата от комплекса.

Познати ни са само следните работи, в които диференциално-геометрично се изгражда теорията на комплекси от прави. В. Хаак в [8] с метода на дуалните вектори и форми успява да определи комплекс от прави в Евклидовото пространство с 3 линейни форми. С. П. Фиников, използувайки метода на външните форми на Картан, също определя комплекс от прави в същото пространство с 3 линейни диференциални форми [9]. Н. И. Кованцов изгражда със същата методика проективната теория на комплекси от прави в [7], но въпросът за определянето на комплекса с 3 линейни диференциални форми не е разгледан. В нашата работа също прилагаме метода на Картан и този въпрос се решава в положителен смисъл твърде просто.

1. Инфинитезимални преобразувания на репер в двуосната геометрия

В хиперболичното двуосно пространство B_3 с абсолют две реални кръстосани прави j, k с голям успех могат да бъдат използувани, особено когато се касае до въпроси, свързани с геометрията на правите линии, проективни координатни системи, притежаващи следните свойства: първият връх A_1 е точка от първата абсолютна права j, а третият връх A_3 е точка от втората абсолютна права k; единичната точка E на проективната координатна система лежи на правата, определена с точките A_2+A_3, A_1+A_4, където A_2+A_3 е пресечната точка на ръба (A_2A_3) с първата абсолютна права j, а A_1+A_4 е пресечна точка на ръба (A_1A_4) с втората абсолютна права k. Семейството на тези репери зависи от 7 параметъра. Действително върховете A_2 и A_4 могат да бъдат избрани произволно, което означава, че вече имаме 6 степени на свобода. Ако те са избрани, тогава върховете A_3 и A_1 са също определени. Върхът A_3 е пресечна точка на втората абсолютна права k с равнината, определена от втория връх A_2 и първата абсолютна права j. Аналогично върхът A_1 е пресечна точка на първата абсолютна права j с равнината, определена от четвъртия връх A_4 и втората абсолютна права k. Най-сетне единичната точка E може произволно да се избира върху правата, минаваща през споменатите точки A_2+A_3, A_1+A_4, тъй че тя зависи от още един параметър; общо имаме 7 параметъра. Тъй като свободните върхове A_2 и A_4 зависят от по 3 съществени параметъра, това семейство от репери може да се използува с успех при третирането както на роеве и конгруенции, така също и на комплекси от прави.

Ако отнесем двуосното пространство спрямо такава начална проективна координатна система K_0 с основни върхове $A_1^0(1, 0, 0, 0)$, $A_2^0(0, 1, 0, 0)$, $A_3^0(0, 0, 1, 0)$, $A_4^0(0, 0, 0, 1)$ и единична точка $E^0(1, 1, 1, 1)$, абсолютните прави имат тогава следните параметрични уравнения:

$$j:\quad x_1=1+\lambda,\ x_2=\lambda,\ x_3=\lambda,\ x_4=0;$$

$$k:\quad x_1=\mu,\ x_2=0,\ x_3=1+\mu,\ x_3=\mu,$$

като λ и μ са параметри.

Сега ще потърсим вида на онези колинеации в тримерното проективно пространстро P_3, които пораждат двуосната геометрия. Това са колинеациите, при които правите j и k са двойни. Произволна колинеация в P_3 има спрямо K_0 представяне

$$\begin{aligned}
\varrho x_1' &= a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + a_1^4 x_4,\\
\varrho x_2' &= a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + a_2^4 x_4,\\
\varrho x_3' &= a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3 + a_3^4 x_4,\\
\varrho x_4' &= a_4^1 x_1 + a_4^2 x_2 + a_4^3 x_3 + a_4^4 x_4,
\end{aligned}$$

като $\varrho \neq 0$ и детерминантата, образувана от коефициентите, $\Delta = \det|a_i^j| \neq 0$ Условието правата j да бъде двойна, т. е. две нейни точки да се трансформират в колинеарни с тях точки, например точките $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$ да се трансформират в точките $(1+\lambda, \lambda, \lambda, 0)$, $(1+\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, 0)$, ни дава следните уравнения за коефициентите a_i^j:

$$\begin{gathered}
\varrho(1+\lambda) = a_1^1, \quad \varrho\lambda = a_2^1, \quad \varrho\lambda = a_3^1, \quad 0 = a_4^1,\\
\varrho_1(1+\lambda_1) = a_1^1 + a_1^2 + a_1^3, \quad \varrho_1\lambda_1 = a_2^1 + a_2^2 + a_2^3,\\
\varrho_1\lambda_1 = a_3^1 + a_3^2 + a_3^3, \quad 0 = a_4^1 + a_4^2 + a_4^3.
\end{gathered}$$

Аналогично правата k е двойна при следните условия:

$$\begin{gathered}
\sigma\mu = a_1^3, \quad 0 = a_2^3, \quad \sigma(1+\mu) = a_3^3, \quad \sigma\mu = a_4^3,\\
\sigma_1\mu_1 = a_1^1 + a_1^3 + a_1^4, \quad 0 = a_2^1 + a_2^3 + a_2^4,\\
\sigma_1(1+\mu_1) = a_3^1 + a_3^3 + a_3^4, \quad \sigma_1\mu_1 = a_1^1 + a_4^3 + a_4^4.
\end{gathered}$$

От получените 16 уравнения можем да изразим всичките коефициенти a_i^j чрез параметрите $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1, \varrho, \sigma, \varrho_1, \sigma_1$. След подходящи преозначавания постигаме следния прост вид за онези колинеации в P_3, при които правите j и k са двойни:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1' &= (a_4 - a_7)\, x_1 + a_5 x_2 - a_2 x_3 + a_7 x_4,\\
\varrho x_2' &= -a_1 x_1 + a_3 x_2 + a_1 x_4,\\
\varrho x_3' &= -a_1 x_1 + a_6 x_2 + (a_3 - a_6)\, x_3 + a_8 x_4,\\
\varrho x_4' &= a_2 x_2 - a_2 x_3 + a_4 x_4.
\end{aligned} \tag{ }$$

С непосредствена проверка, обратно, се убеждаваме, че колинеация от този вид действително запазва правите j и k. Такава колинеация се нарича двуосна колинеация (В-колинеация), а съответната геометрия, която се поражда от седемчленната група (*) от преобразувания с параметри a_i, $i = 1, \ldots, 8$, се нарича двуосна геометрия (биаксиална геометрия или само В-геометрия) с абсолют кръстосаните прави j и k.

Да направим следната важна забележка. Отсега нататък ще използуваме понятието аналитична точка A като наредена четворка хомогенни координати на геометричната точка A^*. Тогава в предните формули (*) можем да приемем, че $\varrho = 1$ и че аналитичната точка (x_1', x_2', x_3', x_4') е образ на аналитичната точка (x_1, x_2, x_3, x_4), т. е. произволна В-колинеация в аналитични точки се дава по следния начин:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= (a_4 - a_7)\, x_1 + a_5 x_2 - a_2 x_3 + a_7 x_4, \\
x_2' &= -a_1 x_1 + a_3 x_2 + a_1 x_4, \\
x_3' &= -a_1 x_1 + a_6 x_2 + (a_3 - a_6)\, x_3 + a_8 x_4, \\
x_4' &= a_2 x_2 - a_2 x_3 + a_4 x_4.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Веднага забелязваме, че четирите основни върха $A_1^0(1, 0, 0, 0)$, $A_2^0(0, 1, 0, 0)$, $A_3^0(0, 0, 1, 0)$, $A_4^0(0, 0, 0, 1)$ на началната проективна координатна система K_0 се преобразуват в аналитичните точки $A_1(a_4 - a_7, -a_1, -a_1, 0)$, $A_2(a_5, a_3, a_6, a_2)$, $A_3(-a_2, 0, a_3 - a_6, -a_2)$, $A_4(a_7, a_1, a_8, a_4)$. Тъй като коефициентите $a_1, a_2, \ldots, a_8$ определят двуосната колинеация (1), то можем да кажем, че тя се определя със задаването на горните 4 аналитични точки A_i. Ще добавим, че в същност всяка колинеация (1) се определя със задаването само на двете аналитични точки A_2 и A_4; действително тогава аналитичните точки A_1 и A_3 можем да напишем веднага. Следователно можем да произнесем:

Теорема 1. *Всяка В-колинеация* (1) *се определя със задаването на две аналитични точки A_2 и A_4 спрямо началната проективна координатна система K_0.*

Съвкупност от четири аналитични точки

$$
\begin{aligned}
&A_1(a_4 - a_7, -a_1, -a_1, 0), \quad A_2(a_5, a_3, a_6, a_2), \\
&A_3(-a_2, 0, a_3 - a_6, -a_2), \quad A_4(a_7, a_1, a_8, a_4),
\end{aligned} \tag{0}
$$

зададени спрямо началната проективна координатна система K_0, като a_i са произволни реални числа, подчинени на единственото условие

$$
\Delta(a) = \begin{vmatrix} a_4 - a_7 & -a_1 & -a_1 & 0 \\ a_5 & a_3 & a_6 & a_2 \\ -a_2 & 0 & a_3 - a_6 & -a_2 \\ a_7 & a_1 & a_8 & a_4 \end{vmatrix} \neq 0,
$$

наричаме д в у о с е н р е п е р, накратко B-р е п е р, и ще означаваме така: $B(a) = B(a_1, a_2, \ldots, a_8)$. С елементарни преобразувания детерминантата $\Delta(a)$ добива следния вид:

$$
\Delta(a) = [a_3(a_4 - a_7) - a_1(a_2 - a_5)]\,[a_4(a_3 - a_6) - a_2(a_1 - a_8)] \neq 0.
$$

Тъй като $\Delta(a) \neq 0$, разбира се, веднага следва, че са изпълнени и неравенствата

$$
\Delta_1(a) = a_3(a_4 - a_7) - a_1(a_2 - a_5) \neq 0,
$$

$$
\Delta_2(a) = a_4(a_3 - a_6) - a_2(a_1 - a_8) \neq 0.
$$

Ако подложим началния B^0-репер, съставен от аналитичните точки $A_1^0(1, 0, 0, 0)$, $A_2^0(0, 1, 0, 0)$, $A_3^0(0, 0, 1, 0)$, $A_4^0(0, 0, 0, 1)$, на двуосната колинеация (1) с някакви коефициенти $a_1, a_2, \ldots, a_8$, получаваме репера $B(a)$. Ако на величините a_i гледаме като на параметри, получаваме едно осемчленно семейство от B-репери. Това са, така да се каже, аналитични B-репери. В същност геометрически можем да различим само ∞^6 репери, тъй като за геометричното определяне на точката A_2 са необходими само 3 съществени параметъра, а също и за точката A_4. Нека изрично отбележим, че четирите аналитични точки A_1, A_2, A_3, A_4, т. е. B-реперът $B(a)$, не определят още проективна координатна система. Затова трябва да се знае още и положението на единичната точка E. В нашия случай тя е произволна точка върху посочената по-горе права. Така че каноничният B-репер, който ще свържем с правата от комплекса, не ще бъде канонична проективна координатна система. Или другояче казано, ако с правата от комплекса свържем еднозначно каноничен B-репер, това означава, че с правата сме свързали ∞^1 канонични проективни координатни системи $(A_1A_2A_3A_4; E)$. Това трябва да се има пред вид в цялото ни изложение по-нататък.

Избраното семейство от B-репери принадлежи на двуосната геометрия, т. е. то притежава свойството инвариантност в двуосен смисъл. Това се вижда от следните две теореми.

Теорема 2. *Чрез произволна B-колинеация всеки B-репер се трансформира също в B-репер.*

Доказателство. Даден е B-реперът $B(a)$, съставен от четирите аналитични точки

$$(0) \qquad A_1(a_4-a_7,\ -a_1,\ -a_1,\ 0),\quad A_2(a_5,\ a_3,\ a_6,\ a_2),$$
$$A_3(-a_2,\ 0,\ a_3-a_6,\ -a_2),\quad A_4(a_7,\ a_1,\ a_8,\ a_4).$$

Разбира се, валидни са неравенствата $\Delta(a)\neq 0$, $\Delta_1(a)\neq 0$, $\Delta_2(a)\neq 0$. Подлагаме върховете му на произволна B-колинеация (1) с дадени коефициенти $a_1, a_2, \ldots, a_8$. Освен това изпълнено е и неравенството $\Delta=\Delta(a)=\det|a_i|\neq 0$. Първият връх A_1 се преобразува в точката A_1' с координати

$$x_1'=(a_4-a_7)(a_4-a_7)-a_5a_1+a_2a_1,$$
$$x_2'=-a_1(a_4-a_7)-a_3a_1,$$
$$x_3'=-a_1(a_4-a_7)-a_3a_1,$$
$$x_4'=0.$$

Вторият връх A_2 се преобразува в точката A_2' с координати

$$x_1'=(a_4-a_7)a_5+a_5a_3-a_2a_6+a_7a_2,$$
$$x_2'=-a_1a_5+a_3a_3+a_1a_2$$
$$x_3'=-a_1a_5+a_6a_3+(a_3-a_6)a_6+a_8a_2,$$
$$x_4'=a_2a_3-a_2a_6+a_4a_2.$$

Третият връх A_3 се преобразува в точката A_3' с координати

$$x_1'=-a_4a_2-a_2(a_3-a_6),$$
$$x_2'=0,$$
$$x_3'=a_1a_2+(a_3-a_6)(a_3-a_6)-a_8a_2,$$
$$x_4'=-a_2(a_3-a_6)-a_4a_2.$$

Най-сетне четвъртият връх A_4 се преобразува в точката A'_4 с координати

$$x'_1=(a_4-a_7)a_7+a_5a_1-a_2a_8+a_7a_4,$$
$$x'_2=-a_1a_7+a_3a_1+a_1a_4,$$
$$x'_3=-a_1a_7+a_3a_1+a_1a_4,$$
$$x'_4=a_2a_1-a_2a_8+a_4a_4.$$

Ако направим следните полагания:

$$a'_1=a_1(a_4-a_7)+a_3a_1, \quad a'_2=a_2(a_3-a_6)+a_4a_2,$$
$$a'_3=a_1(a_2-a_5)+a_3a_3, \quad a'_4=a_2(a_1-a_8)+a_4a_4,$$
$$a'_5=(a_4-a_7)a_5+a_5a_3-a_2a_6+a_7a_2,$$
$$(\ **\ ) \qquad a'_6=-a_1a_5+a_6a_3+(a_3-a_6)a_6+a_8a_2,$$
$$a'_7=(a_4-a_7)a_7+a_5a_1-a_2a_8+a_7a_4,$$
$$a'_8=-a_1a_7+a_6a_1+(a_3-a_6)a_8+a_8a_4,$$

то аналитичните точки A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 имат съответно следните координати

$$A'_1(a'_4-a'_7,\ -a'_1,\ -a'_1,\ 0), \quad A'_2(a'_5,\ a'_3,\ a'_6,\ a'_2),$$
$$A'_3(-a'_2,\ 0,\ a'_3-a'_6,\ -a'_2), \quad A'_4(a'_7,\ a'_1,\ a'_8,\ a'_4).$$

С непосредствено пресмятане можем да се убедим, че детерминантата $\Delta'(a')$, съставена от координатите на последните четири точки, е

$$\Delta'(a')=\Delta(a)\,\Delta(a)\neq 0.$$

Следователно четирите точки A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 с координати от вида ( ) образуват двуосен репер $B'(a')$, което трябваше да се докаже.

Теорема 3. *За всеки два В-репера съществува точно една В-колинеация, която трансформира единия репер в другия.*

Доказателство. Нека двата B-репера са представени съответно със своите четворки аналитични точки. Първият репер $B(a)$ е определен с точките

$$A_1(a_4-a_7,\ -a_1,\ -a_1,\ 0), \quad A_2(a_5,\ a_3,\ a_6,\ a_2),$$
$$A_3(-\alpha_2,\ 0,\ a_3-a_6,\ -a_2), \quad A_4(a_7,\ a_1,\ a_8,\ a_4),$$

като $\Delta(a)\neq 0$, $\Delta_1(a)\neq 0$ и $\Delta_2(a)\neq 0$. Вторият репер $B'(a')$ е определен с точките

$$A'_1(a'_4-a'_7,\ -a'_1,\ -a'_1,\ 0), \quad A'_2(a'_5,\ a'_3,\ a'_6,\ a'_2),$$
$$A'_3(-a'_2,\ 0,\ a'_3-a'_6,\ -a'_2), \quad A'_4(a'_7,\ a'_1,\ a'_8,\ a'_4),$$

като $\Delta(a')\neq 0$, $\Delta_1(a')\neq 0$ и $\Delta_2(a')\neq 0$. Търсим B-колинеация, която да преобразува репера $B(a)$ в репера $B'(a')$, по-точно A_1 в A'_1, A_2 в A'_2, A_3 в A'_3, A_4 в A'_4. Ако съществува B-колинеация (1) с това свойство, то за определянето на коефициентите ѝ $a_1, \ldots, a_8$ получаваме 16 линейни уравнения, от които са независими само уравненията (**). Тях можем да разрешим еднозначно, последователно за неизвестните a_1, a_3; a_2, a_4; a_5, a_7 и a_6, a_8, тъй като $\Delta_1(a) \neq 0$, $\Delta_2(a) \neq 0$. Следователно, ако съществува B-колинеация, която да преобразува репера $B(a)$ в репера $B'(a')$, то тя е единствена. Разбира се, обратно, колинеацията, определена по този начин, има това свойство. С това теоремата е доказана.

Установените две свойства на B-реперите показват, че семейството на B-реперите принадлежи на двуосната геометрия. Всеки репер $B(a)$ се определя с някакви стойности на параметрите $a_1, a_2, \ldots, a_8$, които поточно определяха координатите на четирите аналитични точки A_1, A_2, A_3, A_4 спрямо началната координатна система $K_0 = (A_1^0 A_2^0 A_3^0 A_4^0; E^0)$. Ако разглеждаме a_i като функции на един параметър α, то диференциалите на функциите $x_i'(a_1, \ldots, a_8)$, $i=1, \ldots, 4$, от (1) определят едно ново преобразуване, което се нарича инфинитезимално [10]. Ако означим тези диференциали с $\tilde{d}x_i$, то при това преобразуване на точката (x_i) съответствува точката $(x_i + \tilde{d}x_i)$. Както е известно от [10], това преобразуване може да се разглежда като главна част на безкрайно малкото преобразуване, което се получава, ако заместим a_i в (1) с безкрайно малките величини da_i.

Четирите основни върха A_1, A_2, A_3, A_4 на аналитичния B-репер, подложени на инфинитезимално преобразуване, получават съответно нараствания dA_1, dA_2, dA_3, dA_4. Последните, разглеждани като аналитични точки и отнесени спрямо репера $A_1A_2A_3A_4$, ще имат представяния от следния вид:

$$
\begin{aligned}
dA_1 &= (\theta_4 - \theta_7) A_1 - \theta_1 A_2 - \theta_1 A_3, \\
dA_2 &= \theta_5 A_1 + \theta_3 A_2 + \theta_6 A_3 + \theta_2 A_4, \\
dA_3 &= -\theta_2 A_1 + (\theta_3 - \theta_6) A_3 - \theta_2 A_4, \\
dA_4 &= \theta_7 A_1 + \theta_1 A_2 + \theta_8 A_3 + \theta_4 A_4,
\end{aligned} \tag{2}
$$

като за коефициентите θ_i, $i=1, 2, \ldots, 8$ имаме следните изрази:

$$
\theta_1 = \frac{1}{\Delta(a)}(A_1, dA_4, A_3, A_4), \quad \theta_2 = \frac{1}{\Delta(a)}(A_1, A_2, A_3, dA_2),
$$

$$
\theta_3 = \frac{1}{\Delta(a)}(A_1, dA_2, A_3, A_4), \quad \theta_4 = \frac{1}{\Delta(a)}(A_1, A_2, A_3, dA_4),
$$

$$
\theta_5 = \frac{1}{\Delta(a)}(dA_2, A_2, A_3, A_4), \quad \theta_6 = \frac{1}{\Delta(a)}(A_1, A_2, dA_2, A_4),
$$

$$
\theta_7 = \frac{1}{\Delta(a)}(dA_4, A_2, A_3, A_4), \quad \theta_8 = \frac{1}{\Delta(a)}(A_1, A_2, dA_4, A_4).
$$

Тук с $\Delta(a) = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ е означена детерминантата, съставена от координатите на върховете A_1, A_2, A_3, A_4. Като вземем пред вид, че точката dA_i има за координати диференциалите от координатите на точката A_i, намираме следните формули за θ_i:

$$
\theta_1 = \frac{1}{\Delta(a)}[a_4(a_3 - a_6) + a_2(a_8 - a_1)][(a_4 - a_7)da_1 + a_1(da_7 - da_4)],
$$

$$\theta_2=\frac{1}{\Delta(a)}[a_3(a_4-a_7)+a_4(a_3-a_6)][(a_3-a_6)\,da_4+a_2(da_8-da_1)],$$

$$\theta_3=\frac{1}{\Delta(a)}[a_4(a_3-a_6)+a_2(a_8-a_1)][(a_4-a_7)\,da_3+a_1(da_5-da_2)],$$

$$\theta_4=\frac{1}{\Delta(a)}[a_3(a_4-a_7)+a_1(a_5-a_2)][(a_3-a_6)\,da_4+a_2(da_8-da_1)],$$

$$\theta_5=\frac{1}{\Delta(a)}[a_4(a_3-a_6)+a_2(a_8-a_1)][a_3(da_5-da_2)+(a_2-a_5)\,da_3]$$

$$+\frac{1}{\Delta(a)}[a_1(a_5-a_2)+a_3(a_4-a_7)][a_2(da_3-da_6)+(a_6-a_3)\,da_2],$$

$$\theta_6=\frac{1}{\Delta(a)}[a_3(a_4-a_7)+a_1(a_5-a_2)][a_4(da_6-da_3)+(a_1-a_8)\,da_2]$$

$$+\frac{1}{\Delta(a)}[a_4(a_3-a_6)+a_2(a_8-a_1)][(a_4-a_7)\,da_3+a_1(da_5-da_2)],$$

$$\theta_7=\frac{1}{\Delta(a)}[a_4(a_3-a_6)+a_2(a_8-a_1)][a_3(da_7-da_4)+(a_2-a_5)\,da_1]$$

$$+\frac{1}{\Delta(a)}[a_1(a_5-a_2)+a_3(a_4-a_7)][a_2(da_1-da_8)+(a_6-a_3)\,da_4],$$

$$\theta_8=\frac{1}{\Delta(a)}[a_3(a_4-a_7)+a_4(a_5-a_2)][a_4(da_8-da_1)+(a_1-a_8)\,da_4]$$

$$+\frac{1}{\Delta(a)}[a_4(a_3-a_6)+a_2(a_8-a_1)][(a_5-a_2)\,da_1+a_3(da_4-da_7)].$$

Вижда се, че θ_i са линейни диференциални форми (Пфафови форми), поточно линейни форми на диференциалите на параметрите $a_1, a_2, \ldots, a_8$ с коефициенти функции на същите.

Формулите (2) са основни в диференциалната линейна двуосна геометрия. Ще ги наричаме формули за инфинитезималните преобразования на координатите на върховете на репера при избраното от нас семейство репери.

2. Уравнения за структурата на двуосното пространство

Начален B^0-репер нарекохме съвкупността от четирите аналитични точки $A_1^0(1, 0, 0, 0)$, $A_2^0(0, 1, 0, 0)$, $A_3^0(0, 0, 1, 0)$, $A_4^0(0, 0, 0, 1)$. Ако го подложим на семейството на B-колинеациите (1), получаваме семейството на B-реперите. Началният репер има свойството, че детерминантата, образувана от координатите на върховете му, има стойност 1. Семейството на B-реперите (аналитичните B-репери) може да се ограничи, като разглеждаме такива репери $B(a)$, които имат споменатото свойство на началния репер B^0. Впрочем, излизайки от определен аналитичен B-репер, можем с подходящо пренормиране на координатите на върховете му (например на върха A_4) да постигнем детерминантата от координатите на върховете му да има стойност 1, т. е.

$$\Delta(a)=1. \tag{3_0}$$

Ако означим тази детерминанта с $(A_1A_2A_3A_4)$, то условието (3) приема вида

$$(A_1A_2A_3A_4)=1. \tag{3}$$

С диференциране на последното равенство получаваме

$$(dA_1A_2A_3A_4)+(A_1dA_2A_3A_4)+(A_1A_2dA_3A_4)+(A_1A_2A_3dA_4)=0.$$

Като вземем пред вид формулите (2) и че една детерминанта с равни стълбове е равна на нула, намираме

$$2(\theta_3+\theta_4)=\theta_6+\theta_7. \tag{4}$$

Този резултат, разбира се, се получава, ако диференцираме равенството (3_0) и вземем пред вид въведените означения за линейните диференциални форми $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_8$. Същото се получава и ако се приравни на 1 детерминантата, образувана от координатите на аналитичните точки $A_i'=A_i+dA_i$, $i=1, 2, 3, 4$, и в развитието ѝ се спрем до членовете от първи ред, включително на формите θ_i.

Не е излишно да се отбележи, че нормировката (3) стеснява семейството на аналитичните B-репери, но тя не оказва никакво влияние на геометричните B-репери.

За да бъде диференциалната система съвместима, трябва между формите θ_i да съществуват редица връзки, които сега ще изведем. Ако диференцираме външно например второто равенство от системата (2), получаваме

$$D(dA_2)=0$$

или подробно, като вземем пред вид равенствата (2), ще имаме

$$\begin{gathered}A_1D\theta_5+A_2D\theta_3+A_3D\theta_6+A_4D\theta_2\\ +[(\theta_4-\theta_7)A_1-\theta_1A_2-\theta_1A_3,\ \theta_5]+[\theta_5A_1+\theta_3A_2+\theta_6A_3+\theta_2A_4,\ \theta_3]\\ +[-\theta_2A_1+(\theta_3-\theta_6)A_3-\theta_2A_4,\ \theta_6]+[\theta_7A_1+\theta_1A_2+\theta_8A_3+\theta_4A_4,\ \theta_2]=0.\end{gathered}$$

Поради линейната независимост на точките A_i (те не лежат в една равнина) можем да приравним на нула коефициентите при тях в последното равенство. Постъпим ли по същия начин с останалите три равенства на системата (2), намираме следните връзки, на които са подчинени формите θ_i на Пфаф:

$$\begin{gathered}D\theta_1=[\theta_1,\ \theta_3-\theta_4+\theta_7],\ D\theta_2=[\theta_2,\ \theta_4-\theta_3+\theta_6],\\ D\theta_3=[\theta_1,\ \theta_5-\theta_1], D\theta_2=[\theta_2,\ \theta_8-\theta_1],\\ D\theta_5=[\theta_2,\ \theta_6+\theta_7]+[\theta_5,\ \theta_4-\theta_3-\theta_7],\\ D\theta_6=D\theta_7=[\theta_1,\ \theta_5]+[\theta_2,\ \theta_8],\\ D\theta_8=[\theta_1,\ \theta_6+\theta_7]+[\theta_8,\ \theta_3-\theta_4-\theta_6].\end{gathered} \tag{5}$$

Равенствата (5) наричаме уравнения за структурата на двуосното пространство при избраното семейство от репери. Тук D е символ за външно диференциране, а чупените скоби означават външно умножение на диференциални форми.

При най-общото движение на B-репера, т. е. промяната на B-репера при изменение на параметрите $a_1, a_2, \ldots, a_8$, формите $\theta_1, \ldots, \theta_8$ са линейни форми на диференциалите на променливите $a_1, a_2, \ldots, a_8$ с коефициенти функции на същите променливи. Ако тези форми удовлетворяват уравнечията за структурата (5) на двуосното пространство, то системата (2) е напълно интегруема. Тогава тя при даден начален репер $(A_i)_0$ определя семейство от репери (A_i), удовлетворяващо началните условия.

Компонентите θ_i на диференциалните премествания на репера $A_1A_2A_3A_4$ се явяват инвариантни форми относно групата на двуосните колинеации. Това знаем от [10]. Ще покажем, че те, удовлетворявайки уравненията за структурата (5), определят единствено семейство от репери с точност до произволна B-колинеация.

Действително да допуснем, че формите θ_i удовлетворяват уравненията за структурата (5) и че имаме две решения на системата (2), които определят две семейства от репери (A_i) и (A_i^*), получени за различни начални репери $(A_i)_0$ и $(A_i^*)_0$. Подлагаме второто семейство от репери на подходяща B-колинеация, така че началният му репер $(A_i^*)_0$ да съвпадне с началния репер $(A_i)_0$ на първото семейство. При тази колинеация, както отбелязахме преди малко, относителните компоненти θ_i не се менят и координатите на трансформираното семейство ще удовлетворяват същата диференциална система (2) при същите начални условия $(A_i)_0$, както първото семейство от репери. Но знаем, че една напълно интегруема диференциална система при дадени начални условия има единствено решение: значи, трансформираното семейство от репери трябва да съвпада с първото или, иначе казано, след подходяща B-колинеация второто семейство от репери съвпада с първото.

Ако независимите параметри са три, т. е. параметрите a_i са функции на три независими променливи u, v, w, то ръбът A_2A_4 на подвижния репер ще опише комплекс от прави. Следователно формите θ_i, удовлетворяващи уравненията за структурата (5) на двуосното пространство, определят в това пространство комплекс от прави, и то само един, тъй като различните семейства от репери (комплекси) са двуосно-еквивалентни.

3. Репери от първи ред за правата от комплекса

Съвкупност от прави линии, зависещи от три параметъра u, v, w, е, както споменахме, комплекс от прави. За произволна права g от комплекса можем да пишем $g=g(u, v, w)$. Тя се определя с кои да е две свои точки, чиито координати са функции на променливите u, v, w. Целта ни ще бъде с всяка права от комплекса в двуосното пространство да свържем по геометричен път по възможност еднозначно определен B-репер, съответно определена проективна координатна система. Най-напред видяхме, че в двуосното пространство съществуват ∞^8 аналитични B-репери и съответно ∞^6 геометрични B-репери — тези, за които говорихме в предните два параграфа. Сега ще имаме пред вид само аналитични репери, чието семейство означаваме с R_0 и казваме, че те са **р е п е р и о т н у л е в р е д** за правата $g(u, v, w)$ от комплекса. При търсенето на инвариантно свързан с правата от комплекса репер ние последователно ще стесняваме съвкупността на реперите, което е свързано от своя страна с опростяване на диференциалната система (2). От всичките ∞^8 репери най-напред отделяме онези репери, които са по-тясно свързани с разглежданата права. Естествено е преди всичко да се вземат пред вид реперите, чиито върхове A_2 и A_4 са някакви точки от правата $g(u, v, w)$. Съвкупността от тези репери отбелязваме с R_1; реперите от R_1 наричаме **р е п е р и о т п ъ р в и р е д** за разглежданата права. Те зависят от четири параметъра, от които само два са съществени — тези, които преместват върховете A_2 и A_4 по правата. За да видим с какво се характеризират тези репери, ще вземем пред вид, че реперът с върхове A_2+dA_2, A_4+dA_4 принадлежи на това семейство точно когато dA_2 и dA_4 са линейни комбинации само на точките A_2 и A_4. Това изискване дава от система (2) равенствата

$$\theta_5=\theta_6=\theta_7=\theta_8=0.$$

Тези равенства са изпълнени винаги, когато с дадена права $u=u_0$, $v=v_0$, $w=w_0$ разглеждаме семейството от репери R_1. Тъй като формите θ_5, θ_6, θ_7, θ_8 се анулират при постоянна права, при променлива права от комплекса те трябва да съдържат диференциалите само на **г л а в н и т е п а р а м е т р и** u, v, w, определящи правата. Всяка една от тях има вида

$$pdu+qdv+rdw,$$

където коефициентите p, q, r са функции освен на u, v, w още и на така наречените **в т о р и ч н и п а р а м е т р и** σ', σ'', σ''', σ^{IV}, преобразуващи реперите вътре в самото семейство R_1. Четирите компоненти θ_5, θ_6, θ_7, θ_8 се наричат **г л а в н и к о м п о н е н т и** и тъй като те са линейни диференциални форми само на три променливи u, v, w, между тях съществува определено линейно съотношение, което написваме във вида

$$\theta_5=\lambda\theta_6+\mu\theta_7+\nu\theta_8. \tag{6}$$

За коефициентите λ, μ, ν може да се каже същото, както за p, q, r. Тъй като изборът на точките A_2, A_4 се определя от значението на вторичните параметри σ', σ'', σ''', σ^{IV}, ще подберем така тези точки, съответно такива значения на параметрите, че λ, μ, ν да приемат възможно най-прости числени стойности. С външно диференциране на (6) получаваме

$$[d\lambda, \theta_6]+[d\mu, \theta_7]+[d\nu, \theta_8]+\lambda D\theta_6+\mu D\theta_7+\nu D\theta_8-D\theta_5=0,$$

което след използуване на уравненията за структурата (5) и уравнението (6) приема вида

$$[\varphi_1, \theta_6]+[\varphi_2, \theta_7]+[\varphi_3, \theta_8]=0,$$

като сме положили

$$\varphi_1=d\lambda+(\lambda^2+\lambda\mu+\nu)\theta_1+\lambda(\theta_4-\theta_3-\theta_7)-\theta_2,$$

$$\varphi_2=d\mu+(\lambda\mu+\mu^2+\nu)\theta_1+\mu(\theta_4-\theta_3-\theta_7)-\theta_2,$$

$$\varphi_3=d\nu+(\lambda+\mu)(\nu\theta_1+\theta_2)+\nu(2\theta_4-2\theta_3+\theta_6-\theta_7).$$

Прилагайки известната лема на Картан, получаваме

$$\tag{7} \begin{aligned} \varphi_1 &= x_1\theta_6 + x_2\theta_7 + x_3\theta_8, \\ \varphi_2 &= x_2\theta_6 + x_4\theta_7 + x_5\theta_8, \\ \varphi_3 &= x_3\theta_6 + x_5\theta_7 + x_6\theta_8. \end{aligned}$$

Значението на формата θ_i при изменение само на вторичните параметри ще означаваме с e_i. В този случай ще употребяваме символа за диференциране δ. Тъй като вече имаме $e_5 = e_6 = e_7 = e_8 = 0$, от (7) получаваме.

$$\tag{8} \begin{aligned} &\delta\lambda + (\lambda^2 + \lambda\mu + \nu)\, e_1 + \lambda\,(e_4 - e_3) - e_2 = 0, \\ &\delta\mu + (\lambda\mu + \mu^2 + \nu)\, e_1 + \mu\,(e_4 - e_3) - e_2 = 0, \\ &\delta\nu + (\lambda + \mu)(\nu e_1 + e_2) + 2\nu\,(e_4 - e_3) = 0. \end{aligned}$$

Това са формулите, които показват измененията на функциите λ, μ, ν.

Ако разгледаме такива изменения на параметрите, за които $e_1 = 0$, $e_4 = e_3$, то първото равенство от (8) дава

$$\delta\lambda = e_2.$$

Това равенство показва, че функцията λ може да приеме всяка стойност, тъй като вторичната форма e_2 е независима от формите e_1, $e_4 - e_3$. Ще дадем на вторичните параметри такива значения, че коефициентът λ да бъде равен на 0. Ако внесем $\lambda = 0$ в равенствата (8), те приемат вида

$$\tag{8'} \begin{aligned} &e_2 = \nu e_1, \\ &\delta\mu + \mu^2 e_1 + \mu\,(e_4 - e_3) = 0, \\ &\delta\nu + 2\mu\nu e_1 + 2\nu\,(e_4 - e_3) = 0. \end{aligned}$$

Изборът $\lambda = 0$ означава някакво закрепване на върховете на репера. Действително система (2) за изменение само по вторичните параметри има вида

$$\tag{2'} \begin{aligned} &\delta A_1 = e_4 A_1 - e_1 A_2 - e_1 A_3, \quad \delta A_2 = e_3 A_2 + e_2 A_4, \\ &\delta A_3 = -e_2 A_1 + e_3 A_3 - e_2 A_4, \quad \delta A_4 = e_1 A_2 + e_4 A_4. \end{aligned}$$

Ако $\nu = 0$, то първото равенство на (8′) показва, че $e_2 = 0$ и тогава от последната система написваме

$$\delta A_2 = e_3 A_2, \quad \delta A_3 = e_3 A_3.$$

Тези равенства показват, че върховете A_2 и A_3 са вече закрепени. Ако $\nu \neq 0$, то пак първото равенство на (8′) показва, че имаме едновременно анулиране на формите e_1 и e_2. Ако по някакъв начин сме постигнали $e_1 = 0$, то първото равенство на (2) показва, че върхът A_1 е вече фиксиран, а останалите равенства на същата система показват, че и другите върхове A_2, A_3 и A_4 са също закрепени. Геометричната същност на закрепването $\lambda = 0$ ще изясним по-късно.

Да се спрем на третото равенство на (8). Може да се случи за някои комплекси да имаме $\nu = 0$. Ако $\nu \neq 0$, то може да се напише във вида

$$\delta \ln \nu + 2\mu e_1 = 2\,(e_3 - e_4).$$

Формите e_1, e_3-e_4 са независими, тъй като имаме три степени на свобода. Ако за момент положим $e_1=0$, полученото равенство

$$\delta \ln \nu = 2(e_3-e_4)$$

показва, че $\ln \nu$ приема всяка стойност. Фиксираме параметрите по такъв начин, че $\nu=1$. Тогава от система (8) получаваме

$$e_1=e_2, \quad \delta\mu=0, \quad \mu e_1=e_3-e_4.$$

Второто равенство показва, че μ не зависи от останалите вторични параметри. Тя е единствената инварианта от първи ред на правата от комплекса.

Да разгледаме изключения случай $\nu=0$. Тогава второто равенство на (8′) позволява при $\mu\neq 0$ да се осъществи $\mu=1$. И тъй има да разгледаме следните типове комплекси в B_3:

I. (Общ случай) $\lambda=0$, μ — инварианта, $\nu=1$.

II. $\lambda=0$, $\mu=1$, $\nu=0$.

III. $\lambda=0$, $\mu=0$, $\nu=0$.

4. Каноничен репер на комплекса (общ случай)

В тази точка ще разглеждаме комплексите от I тип, които в същност съставят общия случай на комплекс от прави в двуосното пространство. По-подробно този случай се характеризира с равенствата

$$\lambda=0, \quad \nu=1,$$

като между вторичните компоненти имаме следните връзки:

$$e_1=e_2, \quad \mu e_1=e_3-e_4.$$

Системата (2′) в този случай показва, че свободни върхове са A_4 (или A_2). Значи, имаме две степени на свобода. За да дадем геометрично тълкуване на $\lambda=0$, ще разгледаме комплексните линии, т. е. линиите, чиито допирателни принадлежат на комплекса. Това е равносилно с разглеждането на развиваеми роеве на комплекса.

Ако положим параметрите u, v, w функции на един параметър s, получаваме рой прави, съставен от прави на комплекса. Той не винаги е развиваем. В случая, когато е развиваем, има една линия върху роя, която се явява ръб на възвръщане за роя. Нека $M=A_2+tA_4$ е допирната точка на правата от комплекса до ръба на възвръщане на развиваемия рой. Тъй като за нея dM е точка от правата (A_2A_4) от комплекса, трябва да бъдат изпълнени следните равенства:

$$\theta_5+t\theta_7=0, \quad \theta_6+t\theta_8=0.$$

Тези равенства определят развиваем рой на комплекса с ръб линията $M(t)$. В този случай имаме

$$dM=(\theta_3+t\theta_1).A_2+(\theta_2+t\theta_4+dt)\,A_4.$$

С второ диференциране получаваме

$$d^2M=PA_1+QA_2+RA_3+SA_4,$$

като с P, Q, R, S сме означили следните изрази:

$$P=d(\theta_5+t\theta_7)+(\theta_5+t\theta_7)(\theta_4-\theta_7)+\theta_5(\theta_3+t\theta_1)-\theta_2(\theta_6+t\theta_8)+\theta_7(\theta_2+t\theta_4+dt),$$

$$Q=d(\theta_3+t\theta_1)-(\theta_5+t\theta_7)\theta_1+(\theta_3+t\theta_1)\theta_3+(\theta_2+t\theta_4+dt)\theta_1,$$

$$R=d(\theta_6+t\theta_8)-\theta_1(\theta_5+t\theta_7)+\theta_6(\theta_3+t\theta_1)+(\theta_3-\theta_6)(\theta_6+t\theta_8)+\theta_8(\theta_2+t\theta_1+dt),$$

$$S=d(\theta_2+t\theta_4+dt)+\theta_2(\theta_3-\theta_6+t\theta_1-t\theta_8)+\theta_4(\theta_2+t\theta_4+dt).$$

Оскулачната равнина на комплексната линия в точката $M(t)$ от правата на комплекса се определя с точките M, dM, d^2M. Тази равнина ще определим с една нейна четворка тангенциални координати, които се намират по следния начин:

Нека са дадени три произволни точки M_1, M_2, M_3 със своите хомогенни проективни координати спрямо началната проективна координатна система K_0. Матрицата, образувана от техните координати, има вида

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{Vmatrix}.$$

Съвкупността от четирите детерминанти от трети ред, които можем да образуваме от нея, наричаме външно (Грасманово) произведение на трите точки M_1, M_2, M_3 в указания ред или четворка тангенциални координати на равнината, определена от тях. Външното произведение (тангенциалните координати) ще означаваме символично така:

$$\xi=(M_1M_2M_3).$$

Това произведение притежава редица свойства:

1. Дистрибутивност

$$(M_1M_2M_3'+M_3'')=(M_1M_2M_3')+(M_1M_2M_3'').$$

2. Антикомутативност

$$(M_1M_2M_3)=-(M_1M_3M_2).$$

От второто свойство следва, че външното произведение е равно на нула ако има два съвпадащи множителя. По-общо външното произведение е равно на нула, когато трите точки са компланарни, т. е. линейно зависими. Разбира се, цикличната замяна на множителите не променя външното произведение

$$(M_1M_2M_3)=(M_3M_1M_2)=(M_2M_3M_1)=(M_1M_2M_3).$$

За четири линейно независими детерминанти, от които е съставено външното произведение, можем да вземем например следните детерминанти: $a=(234)$, $b=(341)$, $c=(412)$, $d=(123)$. При това (ijk) е означение за детерминантата, която е образувана от i-тия, j-тия, k-тия стълб, взети в този ред. Тогава лесно се съобразява, че уравнението на равнината в текущи координати x, y, z, t е

$$ax+by+cz+dt=0,$$

т. е. тангенциалните координати на равнината определят самата равнина.

Ако с $M(x, y, z, t)$ означим произволна точка от равнината, то последното равенство може да се напише и така:

$$(MM_1M_2M_3)=0,$$

което, имайки определението в параграф 2, означава, че детерминантата, образувана от координатите на точките M, M_1, M_3, M_4, е равна на нула. Понякога $(MM_1M_2M_3)$ се нарича външно произведение на четирите точки.

Имайки пред вид тези неща, за тангенциалните координати на оскулачната равнина на комплексната линия в точката $M(t)$ от правата на комплекса с оглед и на намерените изрази за dM и d^2M намираме

$$\xi_M=(M, dM, d^2M)=\theta_7(A_2A_4A_1)+\theta_8(A_2A_4A_3).$$

Специално, ако разглеждаме A_4 като комплексна линия, то A_4 е ръб за развиваемия рой, определен с равенствата $\theta_7=\theta_8=0$. За неговата оскулачна равнина намираме

$$\xi_{A_4}=\theta_5(A_2A_4A_1)+\theta_6(A_2A_4A_3).$$

Сега може да се произнесе следният резултат:

Необходимото и достатъчно условие оскулачната равнина на комплексната линия A_4 да бъде координатната равнина $(A_2A_4A_3)$ е $\lambda=0$.

Доказателството е съвсем просто и използува равенството (6), в което следва да се положи $\nu=1$.

Ако положим $\lambda=0$, $\nu=1$ в (6) и (7), те приемат следния вид:

$$\theta_5=\mu\theta_7+\theta_8, \tag{6'}$$

$$\begin{gathered}\theta_1-\theta_2=x_1\theta_6+x_2\theta_7+x_3\theta_8,\\ d\mu+\mu^2\theta_1+\mu(\theta_4-\theta_3-\theta_7)+\theta_1-\theta_2=x_2\theta_6+x_4\theta_7+x_5\theta_8,\\ \mu(\theta_1+\theta_2)+2(\theta_4-\theta_3)+\theta_6-\theta_7=x_3\theta_6+x_5\theta_7+x_6\theta_8.\end{gathered} \tag{7'}$$

Тогава развиваемият рой, който има ръб на възвръщане $M=A_2+tA_4$, се дава с

$$\theta_8=-(\mu+t)\theta_7, \quad \theta_6=t(\mu+t)\theta_7 \tag{9}$$

и тангенциалните координати на оскулачната му равнина са

$$\xi_M=(A_2A_4A_1)-(\mu+t)(A_2A_4A_3). \tag{10}$$

От последното представяне на тангенциалните координати на оскулачната равнина на комплексната линия през точката $M(t)$ е видна следната теорема на Софус Ли:

Всички ръбове на възвръщане на развиваеми роеве на комплекса (комплексни линии) в една и съща точка $M(t)$ от правата на комплекса имат в тази точка една и съща оскулачна равнина (тя зависи от t, но не и от dt, с което се различават различни роеве). Тази равнина се нарича асоциирана равнина в комплекса за точката $M(t)$ от правата $g(u, v, w)$. Тогава имаме:

Теорема 4. *Върхът A_3 на репера лежи в асоциираната равнина в комплекса за точката A_4 от правата $g(u, v, w)$ тогава и само тогава, когато $\lambda=0$.*

При по-нататъшното опростяване на диференциалната система (2) избрахме $\nu=1$. Ще покажем, че това означава някаква нормировка на координатите на върховете на репера. За целта ще се възползуваме от следните твърдения: формата $\theta_4-\theta_7$ пренормира координатите на върха A_1; формата θ_3 — на върха A_2; формата $\theta_3-\theta_6$ — на върха A_3; формата θ_4 — на върха A_4.

Ще докажем второто твърдение. Нека всичките форми θ_i са равни на нула с изключение на формата θ_3. Тогава непременно външният диференциал $D\theta_3=0$, защото една квадратична форма $(D\theta_3)$ може да бъде различна от нула само при наличие на две линейно независими линейни диференциални форми, а такива по силата на направеното предположение няма. От [10] е известно, че ако външният диференциал на линейна диференциална форма е равен на нула, то тя е диференциал от някаква променлива σ (функция). Значи

$$\theta_3=d\sigma.$$

Тогава системата (2) приема вида

$$dA_1=0, \quad dA_2=A_2 d\sigma,$$

$$dA_3=A_3 d\sigma, \quad dA_4=0.$$

Първото и последното равенство показват, че аналитичните точки $A_1=A_1^0$ $A_4=A_4^0$ са постоянни. Второто и третото показват, че геометричните точки A_2 и A_3 са постоянни. По-подробно с интегриране например на второто равенство получаваме

$$A_2=A_2^0 \, . \, e^{\sigma-\sigma_0},$$

като аналитичната точка A_2^0 е получена при стойност σ_0 на променливата σ, а аналитичната точка A_2 съответствува на стойност σ. Последното равенство показва, че когато се мени променливата σ (т. е. мени се формата θ_3), от една фиксирана четворка координати A_2^0 на геометричната точка A_2^* получаваме друга четворка координати A_2 на същата геометрична точка A_2^*. Значи, изменението на формата θ_3 води до пренормиране на координатите на върха A_2 (разбира се, и на върха A_3, което следва и от дефиницията на B-репер).

Ако сега в последното равенство на система (8) положим $\lambda=0$ (чийто геометричен смисъл вече е изяснен) и $\nu=1$, получаваме връзката

$$\mu e_1=e_3-e_4,$$

която е и връзка между формите θ_1, θ_3, θ_4, в частност между формите θ_3, θ_4. Тя показва, че с изменението на едната е свързано и изменението на другата, т. е. пренормиранията на A_2 и A_4 са свързани.

Може и по друг начин да се убедим, че $\nu=1$ не означава закрепване на върховете на репера, а само пренормиране. Именно при $\lambda=0$, $\nu=1$ са в сила равенствата (2′), като $e_1=e_2$, $\mu e_1=e_3-e_4$. Те показват, че ако по някакъв начин закрепим върха A_4 $(e_1=0)$, тогава са закрепени и върховете A_1, A_3, A_2. Тъй като $\lambda=0$ означава вече закрепване (върхът A_3 се определя от положението на върха A_4), то $\nu=1$ не може да означава също закрепване, иначе реперът би бил фиксиран, което видяхме, че още не е налице.

След направения избор $\lambda=0$, $\nu=1$ съвкупността от реперите R_1 съществено се е стеснила. Сега вече свободен е само един от основните върхове като геометрична точка и предстои да се извърши още една нормировка. Значи, сега останалите B-репери, които наричаме **р е п е р и о т в т о р и р е д**, зависят от два параметъра; тяхната съвкупност означаваме с R_2. За да видим как се менят функциите $x_1, x_2, \ldots, x_6$ при изменение на тези два параметъра, диференцираме външно равенствата (7′). Най-напред първото ни дава

$$\begin{aligned} \psi_1 &= y_1\theta_6+y_2\theta_7+y_3\theta_8, \\ \psi_2 &= y_2\theta_6+y_4\theta_7+y_5\theta_8, \qquad (11) \\ \psi_3 &= y_3\theta_6+y_5\theta_7+y_6\theta_8, \end{aligned}$$

където

$$\psi_1=dx_1+x_3\theta_1+\theta_2+\frac{1}{2}(x_3 \quad 1)(\theta_1+\theta_2),$$

$$\psi_2=dx_2+(x_1+x_2)\mu\theta_1+x_3\theta_1-\theta_1+\frac{1}{2}(x_5+1)(\theta_1+\theta_2),$$

$$\psi_3=dx_3+(x_1+x_2)(\theta_1+\theta_2)+x_3(\theta_4-\theta_3+\theta_6)+\frac{1}{2}x_6(\theta_1+\theta_2).$$

По същия начин може да бъде диференцирано второто и третото равенство (7′). Изчисленията са доста сложни и използват няколко пъти равенствата (6′) и (7′). Ние написваме резултата от външното диференциране само при вариация на двата вторични параметъра. Имаме

$$\begin{aligned} &\delta x_1+2x_3e_1=0, \quad \delta x_2+(\mu x_1+\mu x_2+x_3+x_5)e_1=0, \\ &\delta x_3+(2x_1+2x_2+x_6-\mu x_3)e_1=0, \\ (12) \qquad &\delta x_4+2[\mu(x_4+\mu)+x_5+\mu x_2]e_1=0, \\ &\delta x_5+[2(x_4+\mu)+\mu x_3+x_6+2x_2]e_1=0, \\ &\delta x_6+[4x_3+2(2x_5-\mu x_5)]e_1=0. \end{aligned}$$

Ще отбележим още, че в същност се получават 9 равенства, от които само горните 6 са независими. В тези равенства участвува само една вторична компонента e_1, поради което може само един параметър да бъде фиксиран.

Най-напред ще разгледаме комплекси, за които $x_3 \neq 0$. Първото равенство на последната система показва, че можем да подберем $x_1=0$. Тогава $e_1=0$ и останалите равенства показват, че x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 са инварианти — те не зависят от изменението на другия вторичен параметър. По този начин околност от втори ред на правата от комплекса се характеризира с 6 инварианти μ, x_i, $i=2, \ldots, 6$.

Геометричната същност на избора $x_1=0$ ще изясним по-късно. Сега ще продължим специализирането на репера. Тъй като $e_1=e_2=0$, системата (2′) показва, че четирите върха A_1, A_2, A_3, A_4 са закрепени. Остава да се направи още една нормировка. За целта ще направим нормирането (3). То, както знаем, води до (4), което при вариация по вторичния параметър дава $e_3 + e_4 = 0$. Понеже при $e_1 = 0$ имаме $e_3 = e_4$, следва $e_3 = e_4 = 0$. Полученият репер не зависи от вторични параметри и се нарича **каноничен репер** за правата от комплекса. Разбира се, всичките функции y_i са инварианти от трети ред.

Окончателно можем да кажем следното. Околност от първи ред на правата $g(u, v, w)$ от комплекса се характеризира само с една инварианта μ, околност от втори ред — с 6 инварианти μ; x_i, $i = 2, \ldots, 6$, а околност от трети ред — с 9 инварианти μ; x_i, $i = 2, \ldots, 6$; y_k, $k = 1, 2, 3$. Използувайки равенствата (6′), (7′), първото равенство на (11) и равенство (4), успяваме да определим всичките форми $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ чрез основните форми $\theta_6, \theta_7, \theta_8$. Получаваме следните основни формули в двуосната диференциална геометрия на комплекс от прави:

$$
\begin{aligned}
&\theta_1 = p'\theta_6 + q'\theta_7 + r'\theta_8, \quad \theta_2 = p''\theta_6 + q''\theta_7 + r''\theta_8,\\
&\theta_3 = \frac{1}{4}\left[(1-\alpha)\theta_6 + (1-\beta)\theta_7 - \gamma\theta_8\right],\\
&\theta_4 = \frac{1}{4}\left[(1+\alpha)\theta_6 + (1+\beta)\theta_7 + \gamma\theta_8\right],\\
&\theta_5 = \mu\theta_7 + \theta_8,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

където

$$
\begin{aligned}
&p' = p'' = \frac{y_1}{2x_3}, \qquad \beta = \frac{1}{2x_3}\left[2x_3(x_5+1) - 2\mu y_2 + \mu x_2(x_3-1)\right],\\
&q' = \frac{1}{4x_3}(2y_2 + x_2x_3 + x_2), \quad r' = \frac{1}{4x_3}(2y_3 + x_3^2 + x_3),\\
&q'' = \frac{1}{4x_3}(2y_2 - 3x_2x_3 + x_2), \quad r'' = \frac{1}{4x_3}(2y_3 - 3x_3^2 + x_3),\\
&\alpha = x_3 - 1 - \mu\frac{y_1}{x_3}, \quad \gamma = \frac{1}{2x_3}\left[2x_3x_6 - 2\mu y_3 + \mu x_3(x_3-1)\right].
\end{aligned}
\tag{13′}
$$

За да дадем геометрично тълкуване на направения избор $x_1 = 0$ и с това геометрично тълкуване на върха A_4, ще намерим така наречените инфлексионни центрове на правата от комплекса. Определението им е следното.

В асоциираната равнина на правата (A_2A_4) за точката $M(t)$ в комплекса е разположена една равнинна крива $\varkappa$, която се явява обвивка на правите от комплекса, лежащи в тази равнина. Тя допира правата (A_2A_4) в точката M. Точките M от правата, които са особени за съответните им криви $\varkappa$, се наричат **инфлексионни центрове** на правата.

За да намерим инфлексионните центрове на правата, най-напред трябва да изразим условието, че кривата $\varkappa$ е равнинна. Ако кривата $\varkappa$ е отнесена спрямо параметър s, то тангенциалните координати на оскулачната ѝ равнина също са функции на s. Но тъй като кривата е равнинна и във всяка точка на кривата оскулачната ѝ равнина съвпада с равнината на кривата, то трябва да бъде изпълнено равенството

$$d\xi = \varrho\xi, \quad \varrho \neq 0.$$

Като вземем пред вид (10), получаваме

$$\theta_6+(\mu+t)\theta_5=0, \quad \theta_8+(\mu+t)\theta_7=0,$$

$$(14) \qquad dt-t^2\theta_2+t(\theta_3-\theta_4-\theta_6+\theta_7-2\mu\theta_2)+\mu(\theta_3-\theta_4-\theta_6+\theta_7)$$

$$+d\mu-\mu^2\theta_2+\theta_1=0.$$

Сега трябва да изразим условието, че инфлексионните центрове са особени точки за кривата $\varkappa$. Особена точка на една крива е точка, в която тангентата е неопределена. Тъй като тангентата на кривата се определя с точките M и dM, то една точка е особена точно когато е изпълнено равенството

$$dM=\varrho M, \quad \varrho\neq 0.$$

Последното равенство дава три нови равенства:

$$(15) \qquad \theta_5+t\theta_7=0, \quad \theta_6+t\theta_8=0,$$

$$dt-t^2\theta_1+t(\theta_4-\theta_3)+\theta_2=0.$$

Първите две равенства на (14) и (15) ни показват, че се касае за развиваеми роеве на комплекса. Ако извадим третите равенства, получаваме

$$(16) \qquad (\theta_1-\theta_2)t^2+[2(\theta_3-\theta_4)-(\theta_6+\theta_7)-2\mu\theta_2]t$$

$$+d\mu-\mu^2\theta_2+\mu(\theta_3-\theta_4-\theta_6+\theta_7)+\theta_1-\theta_2=0.$$

Като използуваме равенствата (7′), последното добива вида

$$(17) \qquad (x_1\theta_6+x_2\theta_7+x_3\theta_8)t^2+[(\mu x_1-x_3)\theta_6+(\mu x_2-x_5)\theta_7+(\mu x_3-x_6)\theta_8]t$$

$$+(x_2-\mu x_3)\theta_6+(x_4-\mu x_5+\mu)\theta_7+(x_5-\mu x_6)\theta_8=0.$$

Сега прилагаме формулите за комплексна линия, тъй като равнинната крива $\varkappa$ е преди всичко комплексна крива. След преработване получаваме следното уравнение от четвърта степен за t:

$$(18) \qquad x_1t^4+(2\mu x_1-2x_3)t^3+(x_6+2x_2+\mu^2x_1-4\mu x_3)t^2$$

$$+(2\mu x_2-2x_5+2\mu x_6-2\mu^2x_3)t+\mu^2x_6+\mu+x_4-2\mu x_5=0.$$

Това е уравнението, което определя инфлексионните центрове на правата от комплекса. В коефициентите на това уравнение участвуват инвариантите на правата, определящи околността от втори ред на същата права: μ, x_i. Значи инфлексионните центрове са обекти, които принадлежат на околност от втори ред на правата. Тъй като уравнението е от четвърта степен за неизвестното t, в общия случай върху всяка права от комплекса има 4 инфлексионни центъра. Един от тях може да бъде избран за връх A_4 на придружаващия репер. Благоприятно обстоятелство е, че коефициентът пред най-високата степен е равен на x_1. Направеният избор $x_1=0$ показва, че върхът A_4 на репера е поставен в един инфлексионен център на правата. Сега вече можем да дадем пълна геометрична характеристика на построения придружаващ B-репер. Четвъртият връх A_4 на репера е поставен в един инфлексионен център на правата от комплекса. Първият връх A_1 се определя от геометричната същност на избрания репер. Той е пресечна точка на първата абсолютна права j с равнината, определена от четвъртия връх A_4 и втората абсолютна права k. Върхът A_3 е пресечна точка на втората абсолютна права k с асоциираната равнина в комплекса за точката A_4 от разглежданата права на комплекса. Найсетне вторият връх A_2 е пресечна точка на правата от комплекса с равнината, минаваща през третия връх A_3, и първата абсолютна права j. Нека отбележим, че когато е даден комплексът, върху всяка негова права в общия случай съществуват 4 инфлексионни центъра и поне засега не може да се направи някакво предпочитание на някой от центровете. Или другояче казано, съществуват 4 канонични репера като описания по-горе.

Нека припомним уговорката, която направихме още в § 1. В настоящата работа ние построяваме каноничен репер, състоящ се от четири некомпланарни точки $A_1A_2A_3A_4$, тясно свързан с разглежданата права от комплекса. По този начин добихме възможността да изследваме околността на произволна права от даден комплекс прави. Канонична проективна координатна система, тясно свързана с правата от комплекса, може да се построи по следния начин. Изхождаме от така построения каноничен репер. Към четворката върхове A_1, A_2, A_3, A_4 присъединяваме единична точка E, която може да бъде някъде по правата, определена с точките A_2+A_3 и A_1+A_4. Точката A_2+A_3 е пресечната точка на ръба A_2A_3 с първата абсолютна права j, а A_1+A_4 е пресечната точка на ръба A_1A_4 с втората абсолютна права k. По този начин с всяка права от комплекса могат да се свържат ∞^1 канонични проективни координатни системи $K=(A_1A_2A_3A_4\,;\,E)$. Може обаче да се търсят начини за намаляване на този произвол, като върху указаната права се намери точка E, геометрично свързана с разглежданата права от комплекса.

С оглед на по-нататъшните приложения да намерим така наречените главни роеве на комплекса. Ако поставим параметрите u, v, w функции на един параметър, то между главните форми θ_6, θ_7, θ_8 възникват две линейни съотношения

$$\theta_8=f\theta_7,\quad \theta_6=g\theta_7. \tag{19}$$

Последните равенства определят рой от комплекса, който минава през разглежданата права от комплекса. Коефициентите f и g са произволни функции на параметрите u, v, w и системата (19) е напълно интегруема. Така че през всяка права от комплекса минават ∞^2 роеве, които съдържат тази права и се състоят от прави, принадлежащи на комплекса. От това двупараметрично семейство от роеве веднага можем да отделим развиваемите роеве. Ако сравним (19) и (9), виждаме, че един рой (19) е развиваем само тогава, когато е изпълнено равенството

$$f^2+f\mu-g=0. \tag{20}$$

Значи, през всека права от комплекса минават ∞^1 развиваеми роеве.

За да намерим други забележителни роеве през правата от комплекса, разглеждаме допирателната равнина към произволен рой (19) в точката $M=A_2+tA_4$ от разглежданата права. Тя има тангенциални координати

$$\eta_M=(A_2A_4dM)=(\mu+f+t)\,(A_2A_4A_1)+(\dot{g}+ft)\,(A_2A_4A_3). \tag{21}$$

Търсим такива роеве, за които тази равнина съвпада с асоциираната равнина в комплекса за същата точка M. Съвпадането на равнините (10) и (21) ни дава квадратното уравнение за t:

$$t^2+2(\mu+f)t+\mu^2+f\mu+g=0. \tag{22}$$

Тогава можем да кажем, че върху всяка права A_2A_4 от комплекса, за всеки рой (f, g) има две забележителни точки, които ще наричаме оскулачни точки на роя за разглежданата права. Условието двете оскулачни точки да съвпадат ни води до квадратната зависимост (20), така че точно развиваемите роеве имат съвпадащи оскулачни точки. Засега развиваемите роеве няма да разглеждаме.

Геометричното място на оскулачните точки върху роя (f, g) е една линия, която ще наричаме оскулачна линия на роя, принадлежащ на комплекса. Могат да се търсят роеве, за които тази линия е забележителна върху роя. От особен интерес са онези роеве, принадлежащи на комплекса, за които оскулачната линия е асимптотична за роя. Тези роеве се наричат главни роеве на комплекса. Линията M е асимптотична точно когато е изпълнено следното равенство:

$$(A_2, A_4, dM, d^2M)=0.$$

Последното равенство, подробно написано, изглежда така:

$$\begin{gathered}(\theta_5+t\theta_7)\,[d(\theta_6+t\theta_8)-\theta_1(\theta_5+t\theta_7)+\theta_6(\theta_3+t\theta_1)+(\theta_3-\theta_6)(\theta_6+t\theta_8)\\+\theta_8(\theta_2+t\theta_4+dt)]=(\theta_6+t\theta_8)\,[d(\theta_5+t\theta_7)+(\theta_5+t\theta_7)(\theta_4-\theta_7)\\+\theta_5(\theta_3+t\theta_1)-\theta_2(\theta_6+t\theta_8)+\theta_7(\theta_2+t\theta_4+dt)].\end{gathered}$$

Всички членове, които съдържат явно диференциали, след преработване дават израза

$$-d\mu\,(f^2+f\mu-g)\,\theta_7^2.$$

След известни преработвания, при които се използуват (19), няколко пъти (22), както и следното следствие от него:

$$(\mu+f+t)^2=f^2+f\mu-g,$$

се получава квадратно уравнение за t

$$\begin{gathered}(\theta_1-\theta_2)\,t^2+[2(\theta_3-\theta_4)-\theta_6+\theta_7-2\mu\theta_2]\,t\\+d\mu+\mu(\theta_3-\theta_4-\theta_6+\theta_7)-\mu^2\theta_2+\theta_1-\theta_2=0;\end{gathered} \tag{16}$$

то е абсолютно същото, както при инфлексионните центрове. Само че сега вместо уравненията за комплексна линия (развиваем рой) използуваме уравненията (19) за произволен неразвиваем рой. Ако сравним уравненията (16) и (22), получаваме следната система за определяне на главните роеве на комплекса:

$$\begin{gathered}x_1g+x_2-\varrho+x_3f=0,\\(x_2-\varrho)\,g+x_4+\mu+(x_5+\mu s)\,f=0,\\x_3g+x_5+\mu s+(x_6+2s)\,f=0.\end{gathered} \tag{23}$$

Тук s е множител на пропорционалност. Последната система има решение за f, g точно когато s е корен на кубичното уравнение

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \quad s & x_3 \\ x_2-s & x_4+\mu & x_5+\mu s \\ x_3 & x_5+\mu s & x_6+2s \end{vmatrix} = 0,$$

така че изобщо през всяка права от комплекса минават три главни роя. Техните оскулачни точки са нови забележителни точки върху правата A_2A_4 от комплекса.

Уравнението (24) позволява да се направи класификация на комплексите в B_3. Комплекс с три различни корена $s_1 \neq s_2 \neq s_3 \neq s$ притежава три различни главни роя. Комплекс с двукратен корен на (24) може да бъде наречен по аналогия с теорията на повърхнините двуоснoротационен. Комплекс с трикратен корен $s_1 = s_2 = s_3$ ще наричаме сферичен комплекс.

Да се върнем към уравнение (18) за центровете на правата. Ако са изпълнени равенствата

$$(25) \qquad x_1 = x_3 = x_6 + 2x_2 = x_5 + \mu x_2 - x_4 \quad \mu = 0,$$

то има всичките си коефициенти равни на нула и, значи, инфлексионните центрове са неопределени. По-право всяка точка от правата (A_2A_4) е център за правата. В този случай имаме л и н е е н комплекс от прави. Сега в система (12) всичките коефициенти при вторичната форма e_1 са равни на 0 и величините x_2, x_4, x_5, x_6 са инварианти. С лъча $g(u, v, w)$ от комплекса не може да се свърже каноничен репер.

Но не само с линеен комплекс не може да се свърже подвижен каноничен репер. Имаме по-общ случай, именно когато са изпълнени следните равенства:

$$(26) \qquad \begin{gathered} x_3 = 0, \quad x_5 + \mu x_2 + \mu (x_4 + \mu) = 0, \\ x_5 + \mu (x_1 + x_2) = 0, \quad x_6 + 2 (x_1 + x_2) = 0. \end{gathered}$$

И в този случай всичките коефициенти при e_1 в (12) са равни на нула и всички x_i, $i = 2, \ldots, 6$, са инварианти. Ако специално към равенствата (26) присъединим още равенството $x_1 = 0$, получаваме линеен комплекс. Значи, класата от комплексите (26) е по-обща от класата на линейните комплекси. За тях уравнението (18), което дава инфлексионните центрове, приема сравнително простия вид

$$t^4 + 2\mu t^3 + (\mu^2 - 2) t^2 - 2\mu t + 1 = 0.$$

Последното уравнение показва, че центровете на комплексите (26) са два по два двойни и принадлежат на околност от първи ред на правата. Те са

$$A_2 + \frac{\mu \mp \sqrt{\mu^2 + 4}}{2} A_4.$$

Комплексите, за които не е изпълнено поне едно от равенствата на система (26), допускат каноничен репер така, както направихме при $x_3 \neq 0$.

5. Определяне на комплекс прави в B_3 с три форми на Пфаф

В настоящата точка ще решим проблемата на Блашке за определянето на комплекс от прави в двуосното пространство с помощта на три линейни форми. Използувайки уравненията за структурата (5) и изведените основни формули (13 и (13'), ще покажем, че трите базисни форми θ_6, θ_7, θ_8 са достатъчни за определянето на комплекса. По-точно, ако са дадени тези форми, могат да бъдат определени всичките коефициенти, участвуващи в (13'), а с това — формите θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5 и диференциалната система (2).

Най-напред от (13') имаме уравнението

$$a=r'-r''-1-2\mu p'. \tag{27}$$

От шестото уравнение за структурата (5) с външно умножение на θ_6 получаваме уравнението

$$q'+q''-\mu r'=\frac{1}{\psi}[D\theta_6,\ \theta_6]. \tag{28}$$

При това, тъй като формите θ_6, θ_7, θ_8 са дадени и линейно независими, е изпълнено неравенството

$$\psi=[\theta_6,\ \theta_7,\ \theta_8]\neq 0.$$

Освен това външният диференциал на известна форма трябва да се счита за известна величина, така че вдясно на последното уравнение дробта трябва да се счита за известна. Аналогична забележка важи и за следващите уравнения, които ще напишем. При това ще бъде видно от кои уравнения на (5) се тръгва. Имаме

$$\begin{gathered} p'=p''=-\frac{1}{2\psi}[D\theta_6,\ \theta_7],\quad \mu=-2\frac{[D\theta_6,\ \theta_8]}{[D\theta_6,\ \theta_7]}, \\ \frac{1}{2}\beta-r'=\frac{1}{\psi}[D\theta_8,\ \theta_8],\quad r'-\frac{1}{2}a-1=\frac{1}{\psi}[D\theta_8,\ \theta_7], \\ q'=-\frac{1}{2\psi}[D\theta_6,\ \theta_7]-\frac{1}{\psi}[D\theta_8,\ \theta_8]. \end{gathered} \tag{29}$$

Тъй като функцията $\mu(u,\ v,\ w)$ е вече намерена, известни са и нейните инвариантни производни μ_1, μ_2, μ_3 относно трите основни форми на Пфаф. Те са коефициентите в разлагането

$$d\mu=\mu_1\theta_6+\mu_2\theta_7+\mu_3\theta_8.$$

Тогава от петото уравнение на структурата получаваме още две независими уравнения

$$\begin{gathered} q''+\frac{1}{2}\mu a=q'-\mu^2 p'-\mu_1, \\ \frac{1}{2}\mu\gamma-\frac{1}{2}\beta-r''=\frac{1}{\psi}D\theta_8. \end{gathered} \tag{30}$$

Уравненията (27), (28), (29) и (30) са необходими и достатъчни за определяне на неизвестните коефициенти $\mu, p', q', r', p'', q'', r'', \alpha, \beta, \gamma$, които участвуват в (13).

Между базисните форми $\theta_6, \theta_7, \theta_8$ съществуват редица сложни връзки, произхождащи от уравненията за структурата и онези, които се получават чрез външни диференцирания на (13).

Резултатът, който установихме, може да бъде изказан в следната теорема:

Теорема. *Нека са дадени три линейни диференциални форми* $\theta_6, \theta_7, \theta_8$ *на* du, dv, dw, *които са линейно независими помежду си. Тогава формите* $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ *са определени с формули* (13), *като коефициентите* $\mu, p', q', r', p'', q'', r'', \alpha, \beta, \gamma$ *се получават от решението на системата, съставена от уравненията* (27), (28), (29), (30). *Нека освен това формите* $\theta_6, \theta_7, \theta_8$ *удовлетворяват всичките уравнения* (5) *и онези, които се получават с външни диференцирания на (13). Тогава в двуосното пространство* B_3 *с точност до произволна B колинеация е определен комплекс от прави, чиито форми* $\theta_6, \theta_7, \theta_8$ *са точно дадените.*

6. Рoeве и конгруенции от даден комплекс прави

Преди да преминем към разглеждането на някои специални роеве, принадлежащи на комплекса, най-напред ще намерим възловите точки за произволен рой прави. Предполагаме, че правата от роя е определена с точките A_2, A_4. Сега в диференциалната система (2) трябва да мислим, че само една от формите θ_i е независима. Ще се възползуваме от следното определение на възловите точки [1]:

Произволна точка M от правата $g(s)=(A_2A_4)$ има представяне

$$M=\lambda A_2+\mu A_4,$$

а произволна точка от правата $g(s+ds)=(A_2+dA_2,\ A_4+dA_4)$ се дава с

$$M'=\lambda'(A_2+dA_2)+\mu'(A_4+dA_4).$$

Коя да е трансверзала h на тези прави има параметрично представяне

$$H=\varrho M+\varrho' M'.$$

Правата h, която сече още и абсолютните прави j, k, по терминологията на Б. Петканчин [1] се нарича ос на съседните прави $g(s), g(s+ds)$. Когато $ds\to 0$, пресечните точки на оста с правата A_2A_4 клонят към точки, които се наричат възлови точки за тази права.

Тъй като правата h сече първата абсолютна права j, изпълнени са равенствата

$$\begin{aligned}\varrho\lambda+\varrho'[\lambda'(1+\theta_3)+\mu'\theta_1]&=\varrho'(\lambda'\theta_6+\mu'\theta_8),\\ \varrho\mu+\varrho'[\lambda'\theta_2+\mu'(1+\theta_4)]&=0.\end{aligned}\tag{31}$$

Аналогично правата h сече втората абсолютна права k точно когато

$$\begin{aligned}\varrho_1'(\lambda'\theta_5+\mu'\theta_7)&=\varrho_1\mu+\varrho_1'[\lambda'\theta_2+\mu'(1+\theta_4)],\\ \varrho_1\lambda+\varrho_1'[\lambda'(1+\theta_3)+\mu'\theta_1]&=0.\end{aligned}\tag{32}$$

Хомогенната система (31) има ненулево решение за ϱ, ϱ' само тогава, когато

$$(31') \qquad \lambda'[\lambda\theta_2-\mu(1+\theta_3-\theta_6)]+\mu'[\lambda(1+\theta_4)-\mu(\theta_1-\theta_8)]=0.$$

Аналогично за ненулево решение на системата (32) трябва

$$(32') \qquad \lambda'[\lambda(\theta_2-\theta_5)-\mu(1+\theta_3)]+\mu'[\lambda(1+\theta_4-\theta_7)-\mu\theta_1]=0.$$

Сега разглеждаме системата, съставена от уравненията (31') и (32'). Тя има нетривиално решение относно λ', μ' само тогава, когато λ, μ са корени на квадратното уравнение

$$(33) \qquad \theta_5\lambda^2+(\theta_6+\theta_7)\lambda\mu+\theta_8\mu^2=0.$$

При опростяване сме взели само членовете от първи ред на диференциалите. Тъй като уравнението (33) в общия случай има две решения, то върху правата A_2A_4 има две възлови точки, които имат представяне

$$M=\lambda A_2+\mu A_4.$$

Сега разглеждаме роеве, принадлежащи на комплекса и минаващи през разглежданата права A_2A_4. Когато поставим параметрите u, v, w, определящи произволна права от комплекса, да бъдат функции на един параметър s, то линейните форми $\theta_6, \theta_7, \theta_8$ на трите диференциала du, dv, dw стават линейни форми само на диференциала ds. Тогава между тях съществуват две линейни връзки, които написваме във вида

$$(19) \qquad \theta_8=f\theta_7, \quad \theta_6=g\theta_7.$$

като f, g са някакви функции на параметрите u, v, w. Квадратното уравнение за възловите точки приема нехомогенен вид

$$(34) \qquad f\sigma^2+(g+1)\sigma+f+\mu=0$$

и възловите точки на правата от роя, принадлежаща на комплекса, са

$$A_2+\sigma_{1,2}A_4,$$

като

$$\sigma_{1,2}=\frac{-(g+1)\pm\sqrt{(g+1)^2-4f(f+\mu)}}{2f}.$$

От това представяне се вижда, че те принадлежат на околност от първи ред на правата от комплекса, тъй като се изразяват с единствената инварианта μ от първи ред. В тази точка изобщо няма да напускаме околността от първи ред.

С всяка дадена права може да се свържат две абсолютни проективности в двуосното пространство. Нека

$$B=A_2+\sigma A_4$$

е произволна точка от правата A_2A_4. На тази точка съответствува точно една точка J върху първата абсолютна права j. Тя е пресечната точка на първата абсолютна права с равнината, определена от точката B и втората абсолютна права k. Тази точка J има представяне

$$\pi_1 \qquad J=\sigma A_1-(A_2+A_3).$$

Ясно е, че съответствието $B \to J$ е проективност, тъй като запазва двойното отношение на четири точки. Тази проективност ще наричаме първа абсолютна проективност в двуосното пространство и ще означаваме с π_3. Имаме и втора абсолютна проективност π_2, определена по следния начин: на точката B съответна е точката K от втората абсолютна права, която е пресечна точка на тази права с равнината, минаваща през точката B и първата абсолютна права. Тя има представяне

$$\pi_2: \qquad K = A_3 - \sigma(A_1 + A_4).$$

Разглеждането на роеве и конгруенции от даден комплекс прави позволява да се направят някои геометрични тълкувания за някои от инвариантите. Могат да се намерят нови забележителни точки върху правата в зависимост от избраните точки A_2, A_4 на тази права.

Както знаем, роят (19) е развиваем само тогава, когато е изпълнено равенството

$$f^2 + f\mu - g = 0. \tag{20}$$

От друга страна, рой (19) със съвпадащи възлови точки се нарича параболичен рой. Параболичните роеве се дават с

$$(g+1)^2 - 4f(f+\mu) = 0. \tag{35}$$

Равенството (20) показва, че имаме ∞^1 развивами роеве на комплекса, а равенството (35) — ∞^1 параболични роеве на комплекса. Двата снопа от роеве имат точно една обща двойка роеве. Тя се получава, като се реши системата, съставена от уравненията (20) и (35). Получаваме

$$f_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2+4}}{2}, \quad g_{1,2} = 1.$$

И тъй в общия случай има два параболични развиваеми роя, принадлежащи на комплекса и минаващи през разглежданата права A_2A_4. Техните възлови точки са

$$B_{1,2} = A_2 - \frac{1}{f_{1,2}} A_4.$$

За двойното отношение на четирите точки A_2, A_4, B_1, B_2 намираме

$$\delta = (A_2A_4B_1B_2) = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2+4}}{\mu + \sqrt{\mu^2+4}},$$

откъдето

$$\mu^2 = -\frac{(1+\delta)^2}{\delta}; \tag{36}$$

това представлява едно геометрично тълкуване за инварианта μ. Комплексите $\mu = 0$ и само те се характеризират с това, че за тях групата A_2, A_4, B_1, B_2 е хармонична.

Ще въведем някои други специални роеве на комплекса. Разглеждаме онези роеве на комплекса, за които едната възлова точка съвпада с единия връх на репера. Отначало ще намерим представяне за онези роеве, на които едната възлова точка съвпада с инфлексионния център A_4 на правата. Тогава квадратното уравнение (34) трябва да има решение $\sigma=\infty$, което е възможно точно в случаите $f=0$. И тъй всички роеве, на които едната възлова точка е инфлексионният център A_4 на правата, образуват сноп от роеве и се дават с

$$\theta_8=0,\ \theta_6=g\theta_7, \tag{37}$$

като g е параметър. Допирателната равнина към рой от този сноп в точката $M(t)=A_2+tA_4$ има тангенциални координати

$$\eta=(A_2A_4dM)=(A_2, A_4, A_1+\lambda A_3),$$

като

$$\lambda=\frac{g}{\mu+t}.$$

Тя сече първата абсолютна права j в точката

$$J=-\frac{1}{\lambda}A_1-(A_2+A_3).$$

На тази точка чрез π_1^{-1} съответствува точката

$$P=A_2-\frac{1}{\lambda}A_4$$

от правата $g(u, v, w)$.

Сега разглеждаме два роя g_1, g_2 от този сноп и техните допирателни равнини в една и съща точка $M(t)$ от правата A_2A_4. По описания път на тях отговарят две точки от същата права. Те са

$$P_1=A_2-\frac{1}{\lambda_1}A_4,\ P_2=A_2-\frac{1}{\lambda_2}A_4.$$

Точките P_1 и P_2 се намират в инволюторна връзка само тогава, когато

$$\lambda_2=-\lambda_1, \tag{38}$$

което дава

$$g_2=-g_1, \tag{39}$$

т. е. когато и самите роеве се намират в инволюция. Значи в снопа от роеве (37) съществува инволюцията (39), която възбужда инволюцията (38) в реда $g(u, v, w)$.

Двойните елементи на инволюцията (38) са $\lambda'=0$, $\lambda''=\infty$, което показва, че върховете на репера A_2, A_4 са двойни елементи в една определена инволюция върху правата $g(u, v, w)$ от комплекса. Това е едно геометрично тълкуване за тях.

Двойните елементи на инволюцията (39) са $g'=0$, $g''=\infty$. Значи в дефинирания геометрично сноп от роеве (37) има два забележителни роя. Те са

$$\text{a) } \theta_8=\theta_6=0, \qquad \text{b) } \theta_8=\theta_7=0.$$

Сега може да се даде ново геометрично тълкуване за върховете на репера. Възловите точки на втория рой са тъкмо върховете A_2, A_4 на репера. Едната възлова точка на първия рой е, разбира се, A_4, а другата е

$$Z_1=A_2-\mu A_4$$

и тя е нова забележителна точка върху правата A_2A_4 от комплекса.

Дефинираме геометрично втори сноп от роеве по следния начин: Това са всички роеве на комплекса, едната възлова точка на които е върхът A_2 на репера. Този сноп от роеве се дава с

$$\theta_8=-\mu\theta_7, \quad \theta_6=g\theta_7. \tag{40}$$

В този сноп съществува инволюцията

$$g_2=-g_1, \tag{41}$$

която възбужда инволюцията

$$\lambda_2=\frac{\lambda_1}{2\mu\lambda_1-1} \tag{42}$$

в реда $g(u, v, w)$. Двойните елементи на (42) са A_2 и

$$Z_2=\mu A_2+A_4,$$

която е нова забележителна точка върху правата от комплекса. За двойното отношение на двата върха на репера и новите две забележителни точки имаме

$$\delta_1=(A_2A_4Z_1Z_2)=-\mu^2. \tag{43}$$

Двойните роеве на инволюцията (41) са

$$\text{a) } \theta_8=-\mu\theta_7, \ \theta_6=0$$

с възлови точки A_2 и Z_2;

$$\text{b) } \theta_8=\theta_7=0$$

с възлови точки A_2, A_4.

Сега в реда (правата от комплекса) A_2A_4 са установени две инволюции: (38) и (42). Те имат точно една обща двойна точка — в случая това е вторият връх A_2 на репера.

Могат да бъдат разгледани и други снопове от роеве и намерени нови забележителни роеве и точки. Например може да се разгледат онези роеве, чийто възлови точки са хармонично спрегнати с върховете A_2 и A_4 на репера. От това условие се получават два снопа от роеве, които заслужават интерес.

Сега ще намерим някои забележителни конгруенции от комплекса. Произволна конгруенция от комплекса се дава с уравнението

$$\theta_7=\alpha\theta_6+\beta\theta_8, \tag{44}$$

като a, β са функции на u, v, w. За фокусите ѝ получаваме квадратното уравнение

45) $$at^2+(a\mu-\beta)t-(1+\beta\mu)=0.$$

Има точно една конгруенция, принадлежаща на комплекса, чиито фокуси са върховете A_2, A_4 на репера; тя е

(46) $$\theta_8=-\mu\theta_7.$$

Нейните фокуси са, значи, A_2, A_4. Тази конгруенция ще наричаме **главна конгруенция** на комплекса. Чрез нея може да бъде характеризирана по друг начин намерената втора забележителна точка Z_2. Именно допирателната равнина към фокалната повърхнина $A_4(u, v)$ има тангенциални координати

$$(A_2A_4A_1)-\mu(A_2A_4A_3)$$

и сече първата абсолютна права j в точката

$$A_1-\mu(A_2+A_3),$$

на която чрез π_1^{-1} съответствува точката Z_2.

Освен главната конгруенция (46) на комплекса ще дадем още други две забележителни конгруенции. За удобство произволна конгруенция на комплекса ще представим във вида

$$\theta_6=a\theta_7+\beta\theta_8.$$

Нейните фокуси се дават от

$$t^2+(\mu+\beta)t+\mu\beta-a=0.$$

Тя е параболична, когато те съвпадат, условието за което е

(*) $$(\mu-\beta)^2+4a=0.$$

Има ∞^1 параболични конгруенции, принадлежащи на комплекса. Развиваемият рой на такава конгруенция се дава с

$$\theta_6=\frac{1}{2}(\beta^2-\beta\mu+2a)\theta_7,\ \theta_8=\frac{1}{2}(\beta-\mu)\theta_7.$$

Той е параболичен, когато е изпълнено условието

$$(\theta_6+\theta_7)^2-4\theta_5\theta_8=0.$$

Оттук и от равенството (*) получаваме

$$\beta=\pm\sqrt{\mu^2+4},$$

а a се определя от (*).

Значи, през всека права от комплекса има точно две параболични конгруенции, принадлежащи на комплекса, чиито развиваеми рoеве са параболични. Разбира се, параболичните развиваеми роеве са намерените по-рано. Сега установихме само, че те са развиваеми роеве на две специални конгруенции на комплекса.

Във връзка с намерените параболични развиваеми роеве на комплекса може да се даде една чиста двуосна класификация (В-класификация) на комплексите. Последните могат да се разделят на хиперболични, елиптични и параболични комплекси от прави [6].

1. Хиперболичен комплекс от прави ще наричаме комплекс, през всяка права на който минават точно две реални параболични развиваеми роя принадлежащи на комплекса.

2. Елиптичен комплекс от прави ще наричаме комплекс, през всяка права на който минават два комплексно спрегнати параболични развиваеми роя, принадлежащи на комплекса.

3. Параболичен комплекс от прави ще наричаме комплекс, през всяка права на който минава точно един параболичен развиваем рой, принадлежащ на комплекса.

Комплексите с $\mu=\pm 2i$ са параболични. За $\mu=2i$ единствената възлова точка на параболичния развиваем рой е

$$B_1=A_2-iA_4.$$

В този случай от общите формули (7′) се получават следните връзки:

$$\mu x_3+2x_1-2x_2-\mu+2\mu_1=-\mu^2 x_1,$$
$$\mu x_5+2x_2-2x_4-\mu+2\mu_2=-\mu^2 x_2,$$
$$\mu x_6+2x_3-2x_5+2\mu_3=-\mu^2 x_3,$$

които ни позволяват да заключим, че горната забележителна точка B_1 е двоен инфлексионен център на правата. Разбира се, трябва да се вземе пред вид, че $x_1=0$. Този резултат съвпада с едно твърдение от нашата работа [6].

7. Разглеждане на другите типове комплекси (II и III)

В тази точка ще се спрем съвсем накратко на комплексите от II и III тип.

Комплекси от II тип. Тези комплекси се характеризират с равенствата

$$\lambda=0, \quad \mu=1, \quad \nu=0,$$

като между вторичните компоненти имаме зависимостите

$$e_2=0, \quad e_1=e_3-e_4.$$

Система (2′) показва, че върховете A_2 и A_3 са закрепени. За да намерим положението на точката A_2 върху правата от комплекса, ще разгледаме специални роеве на комплекса. Произволен рой на комплекса се задава с

$$\theta_6=f\theta_8, \quad \theta_7=g\theta_8$$

и е развиваем точно, когато е изпълнено равенството

$$g(f-1)=0. \tag{47}$$

Условието за параболичен рой е

$$(f+g)^2-4g=0.$$

Има точно два параболични развиваеми роя на комплекса и те са

$$\theta_6=\theta_7=0$$

с единствена възлова точка A_2 и

$$\theta_6=\theta_7=\theta_8$$

с възлова точка A_2-A_4. Значи, закрепеният връх A_2 е възлова точка на единия от двата параболични развиваеми роя на комплекса.

Ще покажем, че тези комплекси в общия случай също допускат канонични репери. В този случай равенствата (6) и (7) приемат вида

$$\theta_5=\theta_7, \tag{6*}$$

$$\theta_2=\alpha\theta_6+\beta\theta_7-\alpha\theta_8,$$

$$\theta_1+\theta_4-\theta_3=(\alpha-\beta)\,\theta_6+\gamma\theta_7+(\beta-\alpha)\,\theta_8. \tag{7*}$$

Диференцираме външно равенствата (7*). При вариация само по вторичните параметри получаваме само три независими равенства

$$\delta\alpha-2\alpha e_1=0,\ \delta\beta=0,$$

$$\delta\gamma+2\,(\gamma-\beta)\,e_7=0.$$

Второто равенство показва, че величината β е инварианта. Изключването на съвсем специалния случай $\alpha=0$, $\gamma=\beta$ позволява да се постигне $\alpha=1$ или $\gamma=\beta+1$. И в двата случая се получава $e_1=0$. Нормировката $(A_1A_2A_3A_4)=1$ довежда до каноничен репер за лъча.

Тези комплекси притежават някои особености. Равенството (47) показва, че има да се разглеждат два снопа от развиваеми роеве.

Първият сноп от развиваеми роеве има представяне

$$\theta_7=0,\ \theta_6=f\theta_8,$$

като f е параметър. При дадено f ръбът на този рой е A_2-fA_4 и, значи, различни развиваеми роеве имат различни ръбове. Всички те обаче притежават една и съща асоциирана равнина $(A_2A_4A_3)$.

Вторият сноп от развиваеми роеве се дава с

$$\theta_6=\theta_8,\ \theta_7=g\theta_8;$$

като g е параметър. Всички роеве от този сноп имат един и същ ръб с точка A_2-A_4, която може да бъде наречена нерегулярна точка на правата $g\,(u, v, w)$.

Единият от двата параболични развиваеми роя принадлежи на единия сноп, а другият — на другия сноп. С тях могат да се свържат оскулачни повърхнини от втори ред, които зависят от два параметъра. За параболичния развиваем рой $f=g=0$ тези повърхнини са конуси с връх — върха A_2 на репера.

Комплекси от III тип. Те се характеризират с равенствата

$$\lambda=\mu=\nu=0,$$

като само $e_2=0$. В този случай върховете A_2, A_3 също са закрепени. Уравнението (6) дава

$$\theta_5=0,$$

а система (7) дава единственото равенство

$$\theta_2=x(\theta_6+\theta_7).$$

В случая, когато $x=0$, третото равенство на системата (2) показва, че върхът A_3 на комплекса е постоянна точка в B_3, тъй като

$$dA_3=(\theta_3-\theta_6)A_3.$$

Второто равенство става

$$dA_2=\theta_3A_2+\theta_6A_3.$$

То ни показва, че точката A_2 се движи по една права през постоянната точка A_3.

Тъй като всяка права от комплекса пресича една права в пространството, имаме специален линеен комплекс [11]. Каноничен репер не може да се построи и за по-общия случай $x\neq 0$.

Тъй като за този тип комплекси $\theta_5=0$ уравнението за възловите точки на произволен рой

$$(\theta_6+\theta_7)\sigma+\theta_8\sigma^2=0$$

дава $\sigma=0$, можем да произнесем резултата:

Всички рое, принадлежащи на комплекса, имат една обща възлова точка. Тя е фиксираният връх A_2 на репера.

8. Специални комплекси от прави с $\mu=0$

Тук ще разгледаме комплексите в B_3, за които единствената инварианта от първи ред е $\mu=0$. Както казахме, тези комплекси са разгледани в нашата работа [5]. Сега ще направим някои допълнения и ще посочим еднозначността на подвижния репер поне в общия случай.

Всички резултати от общия случай 4 важат и сега. Системата (7) ни дава връзките

$$x_1=x_2=x_4,\quad x_3=x_5.$$

Системата, която дава главните рое на комплекса, добива простия вид

$$x_3f+x_1g+x_1-s=0,\quad x_3f+(x_1-s)g+x_1=0,$$

$$(x_6+2s)f+x_3g+x_3=0,$$

а характеристичното уравнение е

$$s[2s^2+(x_6-4x_1)s+2x_3^2-2x_1x_6]=0.$$

Системата (12) се превръща в

$$\delta x_1+2x_3e_1=0,\quad \delta x_6+8x_3e_1=0,$$

$$\delta x_3+(x_6+4x_1)e_1=0.$$

От тази система най-напред се получава инвариантата

$$x_6-4x_1=J.$$

Може да се провери също така, че е инварианта и изразът

$$(x_6+4x_1)^2-16x_3^2=\varepsilon k^2.$$

Той може да бъде $\lesseqgtr 0$, поради това сме въвели означението εk^2, като $k\neq 0$, а $\varepsilon=\pm 1$ или $\varepsilon=0$.

Нека $\varepsilon=1$. Можем да положим

$$x_6+4x_1=k\operatorname{ch}\varphi,\ 4x_3=k\operatorname{sh}\varphi,$$

а за вариацията на φ получаваме равенството

$$\delta\varphi+4e_1=0.$$

Величината φ може да приеме произволна стойност, поради което фиксираме вторичен параметър с избора $\varphi=0$. Така получаваме $e_1=0$, а x_1, x_6 са инварианти и $x_3=0$. Нормировката $(A_1A_2A_3A_4)=1$ довежда до каноничен репер.

Уравнението за инфлексионните центрове е

$$x_1t^4+(x_6+2x_1)t^2+x_1=0.$$

Ако означим с δ двойното отношение на четирите инфлексионни центъра, взети в подходящ ред, в сила е следното геометрично тълкуване:

$$\frac{x_6}{x_1}=\frac{4}{\delta-1}.$$

Характеристичното уравнение има корени

$$s_1=2x_2,\ s_2=-\frac{1}{2}x_6,\ s_3=0.$$

Първият главен рой се дава с $\theta_6=\theta_7=0$. Неговите оскулачни точки са върховете на репера A_2 и A_4, а възловите му точки са

$$A_2\pm iA_4,\ i^2=-1.$$

Вторият главен рой се дава с $\theta_8=0, \theta_6=\theta_7$. Неговите оскулачни точки са $A_2\pm iA_4$, а възловите му точки са върховете A_2, A_4 на репера.

Третият главен рой се дава с $\theta_8=0$, $\theta_6=-\theta_7$. Неговите оскулачни точки са $A_2\pm A_4$, а възловите му точки са върховете A_2, A_4 на репера.

Сравнявайки получените резултати, можем да изкажем следния резултат.

В случая $\mu=0$, $x_3=0$, $x_6+4x_1\neq 0$ имаме еднозначно определен репер. Неговите върхове A_2 и A_4 са главните оскулачни точки на онзи главен рой, които са възлови точки на другите два главни роя.

Нека сега $\varepsilon=-1$. Полагаме

$$4x_3=k\operatorname{ch}\varphi,\ x_6+4x_1=k\operatorname{sh}\varphi.$$

С вариране на вторичните параметри постигаме $\varphi=0$, което дава $e_1=0$. Нормирането $(A_1A_2A_3A_4)=1$ също води до каноничен репер. Имаме три инварианти x_1, x_3, x_6, като

$$x_3 \neq 0, \quad x_6+4x_1=0.$$

Характеристичното уравнение показва, че единият корен е $s_3=0$, а другите два са комплексно спрегнати. Поради това роят има един реален и два комплексно спрегнати главни роя. Лесно може да се установи, че върховете на репера са възловите точки на единствения главен реален рой.

Нека $\varepsilon=0$. Сега се постига $x_3=1$, $x_6+4x_1=\pm 4$. Каноничен репер може да се построи. Ще изясним неговата геометрична същност. Характеристичното уравнение показва, че имаме един прост корен $s_3=0$ и един двоен корен $s_{1,2}=2x_1\mp 1$. Значи такива комплекси имат един прост главен рой, а другият е двоен. Възловите точки на простия главен рой са тъкмо върховете A_2 и A_4 на репера.

При този специален клас от комплекси симетрията (λ,μ) е запазена. За комплексите от общия случай в 4 е известно, че асоциираната равнина в комплекса за точката A_4 от правата A_2A_4 минава през точката A_3. Комплексите $\mu=0$ се характеризират с това, че асоциираната равнина в комплекса за точката A_2 от правата A_2A_4 минава през точката A_1. Освен това тези комплекси допускат една проста класификация в зависимост от корените на характеристичното уравнение.

Накрая изказвам сърдечна благодарност на Б. Петканчин, който ми постави настоящата тема и ми помогна при нейното разработване.

Постъпила на 2. VIII. 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петканчин Б., Хиперболични роеве прави в двуосната геометрия, Год. на Соф. унив., физ.-мат. фак., **48**, кн. 1 (мат. и физ.), ч. I, 1953 54, 33—67.
2. Петканчин Б., Параболични роеве прави в двуосната геометрия, Год. на Соф. унив., физ.-мат. фак., **49**, кн. 1 (мат. и физ.), ч. 1. 1954—55, 48—84.
3. Петканчин Б., Върху елиптичните роеве прави в двуосната геометрия, Изв. на Мат. инст. на БАН, II, 2, 1957, 135—161.
4. Петканчин Б., Изотропни роеве прави в двуосната геометрия, Изв. на Мат. инст. на БАН, II, 1, 1956, 69—86.
5. Станилов Г., Канонический тетраэдр комплекса прямых в биаксиальной геометрии, Докл. БАН, **16**, 5, 1963, 473—476.
6. Станилов Г., Классификация комплексов в биаксиальном пространстве. Докл. БАН,. **17**, 3, 1964, 221—222.
7. Кованцов Н. И., Канонический тетраэдр комплекса прямых в проективном пространстве, Укр. мат. журн., VIII, 2, 1956, 140—158.
8. Haack W., Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe, Math. Zeitschrift, **40**, 1935. 560—581.
9. Фиников С. П., Геометрия комплекса прямых, Уч. зап. Моск. гор. пединст. им. Потемкина, **1**, 1940, 3—26.
10. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана, М.—Л., 1948.
11. Клейн Ф., Высшая геометрия, М.—Л., 1939.

КОМПЛЕКСЫ ПРЯМЫХ В БИАКСИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Г Станилов

(Резюме)

В работе строится дифференциально-геометрический апарат для исследования комплексов прямых в биаксиальной геометрии.

1. Инфинитезимальные преобразования репера в биаксиальной геометрии. Гиперболическо-биаксиальное пространство B_3 задается в трехмерном проективном пространстве P_3 двумя скрещивающимися, вещественными прямыми j и k называющимися абсолютными. Фундаментальную группу преобразований составляют B-коллинеации, оставляющие в покое j и k. Используем проективные системы координат $k=(A_1A_2A_3A_4;E)$, обладающие следующими свойствами: $A_1 \not\in j, A_3 \not\in k$, а E находиться на прямой, определенной точками A_2+A_3, A_1+A_4 где A_2+A_3 — точка пересечения j с ребром A_2A_3, а A_1+A_4 — точка пересечения k с ребром A_1A_4. Семейство этих систем-семичленно. Относительно такой началной координатной системы $K_0=(A_1^0A_2^0A_3^0A_4^0;E)$ с вершинами $A_1^0(1,0,0,0)$, $A_2^0(0,1,0,0)$, $A_3^0(0,0,1,0)$, $A_4^0(0,0,0,1)$ и единичной точкой $E^0(1,1,1,1)$ абсолютные прямые выражаются уравнениями

$$j: x_2=x_3,\ x_4=0;\ k: x_1=x_4,\ x_2=0.$$

Аналитическим $B(a_1,\ldots,a_8)=B(a)$ — репером назовем совокупность из четырех аналитических точек $A_1(a_4-a_7, -a_4, -a_1, 0)$, $A_2(a_5, a_3, a_6, a_2)$, $A_3(-a_2, 0, a_3-a_6, -a_2)$, $A_4(a_7, a_1, a_8, a_4)$ заданных относительно начальной системы K_0, причем определитель, составленный из их координат $\Delta(a)\neq 0$. В аналитических точках любая B-колинеация задается формулами (1).

Теорема 1. *Любая B-коллинеация определяется при помощи двух точек $A_2(a_5, a_3, a_6, a_2)$, $A_4(a_7, a_1, a_8, a_4)$ относительно K_0 при $\Delta(a)\neq 0$.*

Теорема 2. *Любой B-репер, подвергнутый любой B-коллинеации преобразуется также в B-репер.*

Теорема 3. *Для любых двух B-реперов существует только одна B-коллинеация, преобразующая один репер в другой.*

Инфинитезимальное преобразование преобразует аналитическую точку (x_i) в аналитическую точку $(x_i+\tilde{d}x_i)$, причем $\tilde{d}x_i$—дифференциалы функции $x_i'(a_1,\ldots,a_8)$ (1) в тех случаях, когда рассматриваемые параметры a_i как функции одной единственной переменной. Это преобразование можно рассматривать как главную часть бесконечно малого преобразования, которое получается, если в (1) заменим a_i бесконечно малыми величинами da_i. Для инфинитезимальных преобразований вершин B-репера получаем формулы (2), причем $\theta_1,\ldots,\theta_8$ — линейны формы дифференциалов переменных a_i с коэффициентами функций этих переменных.

2. Уравнения структуры биаксиального пространства. Через $(A_1A_2A_3A_4)$ обозначим внешнее произведение четырех аналитических точек, заданных относительно K_0. Нормировка (3) приводит к соотношению (4). Для того, чтобы дифференциальная система (2) была вполне интегрируемой, необходимо, чтобы формы θ_i удовлетворяли уравнениям структуры (5) биаксиального пространства. Уравнения структуры

получаются посредством внешнего дифференцирования (2). Если из числа параметров a_i только три величины являются независимыми, то формы Пфаффа θ_i, удовлетворяющие (5), определяют комплекс прямых в B_3 с точностью до любой B-коллинеации.

3. Реперы первого порядка прямой комплекса. Если поставим вершины A_2, A_4 на прямую $g(u, v, w)$ данного комплекса прямых, то получаем возможность выделить главные формы $\theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8$. Между ними существует линейное соотношение (6). Необходимо рассмотреть три вида комплексов:

I. $\lambda=0,\ \nu=1,\ \mu$ — инвариант;

II. $\lambda=0,\ \nu=0,\ \mu=1$;

III. $\lambda=0,\ \nu=0,\ \mu=0$.

4. Канонический репер комплекса (общий случай). Варьируя соответствующим образом вторичные параметры, устанавливаем, что μ — единственный инвариант первого порядка прямой комплекса. Внешним дифференцированием (6) получаем (7). Доказываем следующую теорему Софуса Ли:

Все комплексные линии, касающие прямую A_2A_4 в одной и той же точке $M=A_2+tA_4$, имеют в этой точке одну и ту же соприкасающаяся плоскость, называемую ассоциированной плоскостью в комплексе для точки M прямой A_2A_4. Доказательство основывается на представлении (10), причем через ξ_M обозначены тангенциальные координаты ассоциированой плоскости.

Теорема 4. *Вершина A_3 лежит на ассоциированной плоскости для точки A_4 тогда и только тогда, когда $\lambda=0$.*

Выбор $\nu=1$ означает нормировку координат вершин репера.

Уравнение (18) определяет инфлекционные центры прямой. — Они объекты,принадлежащие окресности вторго порядка прямой. Вершину A_4при $x_3 \neq 0$ поставим в один инфлекционных центров. Это дает $x_1=0$. Нормировка(3) приводит к каноническому реперу. Вершина A_3 лежит на прямой k в ассоциированной для точка A_4 плоскости. A_1 — точка пересечения j с плоскостью, определенной при помощи A_4 и прямой k; A_2 лежит на прямой комплекса и в плоскости через A_3 и j. Если построенный таким образом репер $A_1A_2A_3A_4$ дополним единичной точкой E, как это было сказано выше, то получаем каноническую проективную систему координат для прямой комплекса. Основными формулами являются (13), (13') и следствия из (5). Система (23) и уравнение (24) определяют главные линейчатые поверхности комплекса.

Комплексы (26) содержат линейные комплексы и не обладают каноническим репером. Если присоединим $x_1=0$, получаем линейный комплекс.

В § 5 показано, что базисные формы θ_5, θ_7 и θ_8 достаточны для определения комплекса.

6. Линейчатые поверхности и конгруэнции данного комплекса прямых. Прежде всего находим узловые точки Петканчина для прямой линейчатой поверхности. Пусть $g(s)$ — прямая данной линейчатой поверхности, опеределенная точками A_2, A_4. Прямая h, пересекающая прямые $g(s), g(s+\Delta s)$ по терминологии Б. Петканчина называется осью

прямых $g(s), g(s+\Delta s)$. В общем случае существуют две оси, пересекающие прямую A_2A_4 в двух точках. Граничные положения этих осей, когда $\Delta s \to 0$, называются узловыми точками прямой линейчатой поверхности [1]. Они определяются уравнением (33). Линейчатая поверхность со совпадающими узловыми точками называется параболической. Через каждую прямую комплекса проходят 2, 1 или 0 вещественных параболических развертывающихся линейчатых поверхностей, принадлежащих комплексу. Они получаются, решив систему (20), (35). Из (36) находим геометрическое толкование инварианта μ, причем δ — двойное отношение A_2, A_4 и рёбер возврата B_1, B_2 обеих параболических развертывающихся линейчатых поверхностей.

Обнаружение параболических развертывающихся линейчатых поверхностей позволяет нам дать кроме того чисто биаксиальную классификацию комплексов. Комплекс, через любую прямую которого проходят две вещественные параболические развертывающиеся линейчатые поверхности будем называть гиперболическим комплексом. Комплекс с одной параболической развертывающейся линейчатой поверхностью — параболическим. Комплекс с двумя комплексно-сопряженными параболическими развертывающимися линейчатыми поверхностями — эллиптическим [6].

В § 7 показано, что комплексы II-го типа допускают канонический репер, а комплексы типа III — не допускают.

В последнем § 8 подробно рассмотрены комплексы для которых $\mu = 0$. Показываем однозначность построенного репера. Инварианту $x_6 : x_1$ толкуем при помощи сложного отношения.

GERADENKOMPLEXE IN DER ZWEIACHSIGEN GEOMETRIE

G. Stanilov

(Zusammenfassung)

Es wird ein differentialgeometrischer Apparat zur Behandlung von Geradenkomplexen der zweiachsigen Geometrie aufgebaut.

1. Infinitesimaltransformation eines Bezugssystems der zweiachsigen Geometrie. Der hyperbolisch-zweiachsige Raum B_3 wird im reellen dreidimensionalen projektiven Raum P_3 durch zwei windschiefe Geraden, j und k, gegeben. Man nennt sie absolute Geraden. Die fundamentale Transformationsgruppe ist die Gruppe der B-Kollineationen, die die absoluten Geraden j und k in sich überführen. Die verwendeten projektiven Koordinatensysteme $K=(A_1A_2A_3A_4;\ E)$ besitzen folgende Eigenschaften: $A_1 Z j$, $A_3 Z k$, E liegt auf der Geraden, die durch die Punkte A_2+A_3, A_1+A_4 bestimmt wird, wobei A_2+A_3 der Schnittpunkt von j mit der Kante A_2A_3, A_1+A_4 der Schnittpunkt von k mit der Kante A_1A_4 ist. Die Familie dieser Koordinatensysteme ist siebengliedrig. In bezug auf ein derartiges projektives Koordinatensystem, $K_0=(A_1^0A_2^0A_3^0A_4^0;\ E)$ mit den Grundpunkten $A_1^0(1,0,0,0)$, $A_2^0(0,1,0,0)$,

$A_3^0(0,0,1,0)$, $A_4^0(0,0,0,1)$ und dem Einheitspunkt $E^0(1,1,1,1)$ haben die absoluten Geraden folgende Gleichungen: $j: x_2=x_3, x_4=0$; $k: x_1=x_4, x_2=0$.

Als ein analytisches Bezugssystem $B(a_1,\ldots, a_8)=B(a)$ bezeichnen wir den Quadrupel der analytischen Punkte $A_1(a_4-a_7, -a_1, -a_1, 0)$, $A_2(a_5, a_3, a_6, a_2)$, $A_3(-a_2, 0, a_3\ a_6, -a_2)$, $A_4(a_7, a_1, a_3, a_4)$, die in bezug auf das System K_0 gegeben sind, wobei die aus deren Koordinaten gebildete Determinante Δ (a) $\neq 0$ ist. In analytischen Punkten wird die B-Kollineation durch die Formel (1) gegeben.

Theorem 1. *Jede B-Kollineation wird durch Angaben der beiden analytischen Punkte $A_2(a_5, a_3, a_6, a_2)$, $A_4(a_7, a_1\ a_8, a_4)$ in bezug auf das Anfangskoordinatensystem K_0, bei Bedingung $\Delta(a)\neq 0$ bestimmt.*

Theorem 2. *Jedes B-Bezugssystem, einer beliebigen B-Kollineation unterworfen, wird ebenfalls in ein B-Bezugssystem transformiert.*

Theorem 3. *Zu je zwei B-Bezugssystemen existiert genau eine B-Kollineation, die das eine in das andere transformiert.*

Die Infinitesimaltransformation transformiert den analytischen Punkt (x_i) in den analytischen Punkt $(x_i+\tilde{d}x_i)$, wobei $\tilde{d}x_i$ die Differentiale der Funktionen $x_i'(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ aus (1) sind, wenn wir die Parameter a_i als Funktionen einer Veränderlichen betrachten. Diese Transformation kann als Hauptteil der unendlich kleinen Transformation betrachtet werden, die sich ergibt, wenn wir in (1) a_i durch die unendlich kleinen Größen da_i ersetzen. Für die Infinitesimaltransformationen der Grundpunkte des B-Bezugssystems erhalten wir die Formeln (2). Darin sind $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_8$ Linearformen der Differentiale der Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_8$ mit Koeffizienten, die Funktionen von $a_1, a_2, \ldots, a_8$ sind.

2. Strukturgleichungen für den zweiachsigen Raum Mit $(A_1A_2A_3A_4)$ bezeichnen wir das äußere Produkt der vier analytischen Punkte die in bezug auf K_0 gegeben sind. Die Normierung (3) führt zur Beziehung (4) Damit das Differentialsystem (2) vollständig integrierbar sei, müssen die Formeln θ_i die Strukturgleichungen (5) des zweiachsigen Raums erfüllen. Man erhält sie durch äußeres Differenzieren von (2). Sind von den Parametern a_i nur drei unabhängig, so bestimmen die (5) erfüllenden Pfaffschen θ_i-Formen einen Geradenkomplex in B_3 bis auf eine beliebige B-Kollineation.

3. Bezugssysteme erster Ordnung für die Komplexgerade. Lassen wir die Grundpunkte A_2, A_4 auf die Gerade $g(u,v,w)$ einer gegebenen Regelschar liegen, dann haben wir die Möglichkeit, als Hauptformen $\theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8$ zu wählen. Zwischen ihnen besteht die lineare Abhängigkeit (6). Es sind drei Typen von Regelscharen zu behandeln:

$$\mathrm{I}.\ \lambda=0, \nu=1, \mu= -\text{Invariante};$$

$$\mathrm{II}.\ \lambda=0, \nu=0, \mu=1;$$

$$\mathrm{III}.\ \lambda=0, \nu=0, \mu=0.$$

4. Kanonisches Bezugssystem des Geradenkomplexes (allgemeiner Fall). Durch geeignetes Variieren der sekundären Parameter stellen wir fest, daß μ die einzige Invariante erster Ordnung des Geradenkomplexes ist. Durch äußeres Differenzieren von (6) erhalten wir (7). Es wird folgendes Theorem von Sophus Lie bewiesen:

Alle Komplexkurven, die die Gerade A_2A_4 in einem und demselben Punkt $M=A_2+tA_4$ berühren, haben in diesem Punkt eine und dieselbe Schmiegebene, welche wir assoziierte Ebene des Komplexes im Punkte M der Geraden A_2A_4 nennen wollen. Der Beweis beruht auf der Darstellung (10). Mit ξ_M bezeichnen wir die Tangentialkoordinaten der assoziierten Ebene.

Theorem 4. *Der Grundpunkt A_3 liegt in der assoziierten Ebene für den Punkt 4 dann und nur dann, wenn $\lambda=0$.*

Die Wahl $\nu=1$ bedeutet Normierung der Koordinaten der Grundpunkte des Bezugssystems.

Gleichung (18) bestimmt die Inflexionszentren der Geraden. Sie sind Objekte, die der Umgebung zweiter Ordnung der Geraden angehören. Den Grundpunkt A_4 bei $x_3 \neq 0$ lassen wir mit dem einen Inflexionszentrum zusammenfallen. Das ergibt $x_1=0$. Die Normierung (3) führt zum kanonischen Bezugssystem. Der Grundpunkt A_3 liegt auf der Geraden k in der assoziierten Ebene für den Punkt A_4. A_1 ist Schnittpunkt von j mit der Ebene, die durch A_4 und die Gerade k geht; A_2 liegt auf der Komplexgeraden und in der Ebene, die durch A_3 und j geht. Wenn wir nunmehr das so konstruierte Bezugssystem, wie oben erwähnt, durch einen Einheitspunkt E ergänzen, erhalten wir ein projektives kanonisches Bezugssystem der Komplexgeraden. Die Grundformeln sind (13), (13′) und die Folgerungen von (5). Das System (23) und Gleichung (24) bestimmen die Hauptscharen des Komplexes.

Die durch (26) definierten Komplexe enthalten die linearen Komplexe und lassen kein kanonisches Bezugssystem zu. Wenn wir $x_1=0$ dazu voraussetzen, erhalten wir einen linearen Komplex.

Im Punkte 5 wird gezeigt, daß die drei Basisformen θ_6, θ_7, θ_8 hinreichen, um den Komplex zu bestimmen.

6. Scharen und Kongruenzen eines gegebenen Geradenkomplexes. Zunächst suchen wir die Knotenpunkte von Petkantschin für eine Gerade einer gegebenen Regelschar, die durch die Punkte A_2, A_4 bestimmt wird. Die Gerade h, welche die Geraden $g(s+\Delta s)$, j, k schneidet, heißt nach B. Petkantschin Achse der Geraden $g(s)$, $g(s)$, $g(s+\Delta s)$. Im allgemeinen Fall gibt es zwei Achsen, welche die Gerade A_2A_4 in zwei Punkten schneiden. Die Grenlagen der letzteren heißen, bei $\Delta s \to 0$, Knotenpunkte der Geraden der Rezgelschar [1]. Sie werden mit der Gleichung (33) gegeben. Eine Schar mit übereinstimmenden Knotenpunkten heißt parabolische Schar. Durch jede Gerade gehen 2, 1 oder 0 reelle abwickelbare parabolische Regelschare, die dem Komplex angehören. Man erhält sie durch Lösung des Systems (20), (35). Aus (36) ergibt sich die geometrische Deutung der Invariante μ, wobei δ das Doppelverhältnis von A_2, A_4 und den Rückkehrkanten B_1, B_2 der beiden abwickelbaren parabolischen Regelscharen ist.

Die Aufstellung der abwickelbaren parabolischen Regelscharen gestattet, eine rein zweiachsige Klassifikation der Komplexe anzugeben. Gehen durch jede Gerade eines Komplexes zwei reelle abwickelbare Scharen, so nennen wir den Komplex einen hyperbolischen Komplex. Einen Komplex mit **einer** abwickelbaren parabolischen Schar nennen wir parabolischen Komplex und einen Komplex mit zwei komplexkonjugierten abwickelbaren parabolischen Scharen elliptischen Komplex (6).

Im Punkte 7 wird gezeigt, daß die Komplexe vom 2. Typus ein Kanonisches Bezugssystem zulassen, nicht aber die. Komplexe vom 3. Typus.

Der letzte Punkt 8 behandelt ausführlicher die Komplexe mit $\mu=0$. Es wird die Eindeutigkeit des aufgebauten Bezugssystems aufgezeigt. Die Invariante $x_6:x_1$ wird als Doppelverhältnis gedeutet.