БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) VIII

ВЪРХУ ЗАДАЧАТА НА КОШИ ЗА ОБЩОТО УЛТРАПАРАБОЛИЧНО УРАВНЕНИЕ

Тодор Генчев

Уводни бележки

В тази работа ще разгледаме диференциални уравнения от вида

$$(1)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, y, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$+\sum_{k=1}^{m} a_k(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial y_k}+b(x, y, t)u+f(x, y, t),$$

където

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j \geq \mu \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2, \quad \mu=\text{const}>0.$$

Уравненията от този вид ще наричаме у л т р а п а р а б о л и ч н и. Интересът към тези уравнения възникна главно след работите на Колмогоров [1] и [2], в които се разглеждат случайни процеси, водещи до ултрапараболични уравнения. При $n=1$ уравнението (1) е изследвано в [3] и [4] с метода на Роте. Обобщено решение на задачата на Дирихле за уравнението (1) е построено в [5] и [6]. Там е доказано и съществуването на обобщено решение на задачата на Коши за уравнението (1), за което интегралът

$$\iint_H \left[u^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx\,dy\,dt$$

е сходящ в разглежданата безкрайна област. В тази работа, която съдържа подробно изложение на резултатите, съобщени в [7] без доказателства, се разглежда задачата на Коши в един клас от функции, които могат да растат неограничено, когато променливата x или y клони към безкрайност. При това се изяснява, че класът от функции, в които задачата на Коши за уравнението (1) е коректно поставена, е твърде различен от съответния клас при параболичните уравнения.

Както е известно, при параболичните уравнения теоремата за съществуване и единственост на решение на задачата на Коши престава да бъде вярна, ако разглеждаме и решения, които при x, клонящо към безкрайност, имат порядъка на $e^{|x|^{2+\varepsilon}}$, $\varepsilon>0$. В нашия случай тази теорема остава в сила, ако разглеждаме решения, които заедно с първите си производни растат не по-бързо от $e^{A|x|^{2-\varepsilon}+(\varphi(|y|))^{1-\varepsilon}}$, където $\varphi(|y|)$ е функция, за която $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right| \leq \eta\varphi(|y|)$, $k=1,2,\dots,m$ ($\eta>0$ е достатъчно малка константа). Такава функция е например $\varphi(|y|)=e^{\eta|y|}$, $|y|=\sqrt{y_1^2+y_2^2+\dots+y_m^2}$. Въпросът, дали $\varphi(|y|)$ може да се замени с по-бързо растяща функция, остава открит. По същество в тази работа се използува метод, вече приложен в [5] и [6], само че вместо елиптично уравнение ние свързваме този път уравнението (1) с параболичното уравнение

$$
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}=\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{m} a_k^{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial y_k}+b^{\varepsilon}u+f^{\varepsilon}, \tag{2}
$$

което технически се оказва по-удобно и позволява малко да се подобрят някои теореми, доказани в [6]. Както в [6], и тук теоремата за съществуване се доказва с граничния преход $\varepsilon\to 0$ в уравнението (2). За тази цел предварително се установяват априорни оценки за решенията на (2). Извеждането на тези оценки, което е свързано с редица пресмятания, представлява основното съдържание на тази работа.

§ 1. Определения и означения

Нека с $E_n(E_m)$ означим n-мерното (m-мерното) евклидово пространство на точките $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, съответно $y=(y_1, y_2, \dots, y_m)$. С (x, y, t) ще означаваме точките $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, t)$ от $E_{n+m+1}=E_n\times E_m\times E_1$. Точките $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ на $E_{n+m}=E_n\times E_m$ ще означаваме с (x, y), а областта $E_{n+m}\times(0, T)$ — с H. За краткост вместо $dx_1dx_2\dots dx_n\times dy_1\dots dy_m$ ще пишем просто $dxdy$ и многократните интеграли ще означаваме като двойни. Хилбертовото пространство на функциите със сумируем квадрат в областта G, $G\subset H$, които притежават там първи производни в смисъл на Соболев със сумируем квадрат в G, ще означаваме с $W_2^1(G)$. Както обикновено се прави, норма в $W_2^1(G)$ ще дефинираме с равенството

$$
\|u\|^2_{W_2^1(G)}=\iint_G\left[u^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dxdydt.
$$

Нека $\varphi(|y|)$ е монотонно растяща положителна функция на $|y|=\sqrt{y_1^2+y_2^2+\dots+y_m^2}$ с непрекъснати частни производни от първи ред, която удовлетворява неравенствата $\left|\frac{\partial\varphi(|y|)}{\partial y_k}\right|\leq\eta\varphi(|y|)$, $\quad k=1, 2, \dots, m$;
Тук $\eta>0$ е достатъчно малка константа, големината на която зависи от коефициентите $a_k(x, y, t)$, $k=1, 2, \dots, m$, и от числото T. За краткост ще означаваме тази функция с $\varphi(y)$ или само с φ. Ще казваме, че $u(x, y, t)$ принадлежи на класа V_φ, ако във всяка ограничена област $G\subset H$ имаме $u\in W_2^1(G)$ и освен това интегралът

$$\int\limits_H\int e^{-\alpha(|x|^2+\varphi(y))}\left[u^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dxdydt$$

е сходящ за всяко $\alpha>0$ $\left(|x|=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}\right)$. Аналогично $u(x,y,t)\in V_{\varphi,y}$, ако във всяка ограничена област $G\subset H$ имаме $u(x,y,t)\in W_2^1(G)$ и интегралът

$$\int\limits_H\int e^{-\alpha(|x|^2+\varphi(y))}\left[u^2+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2\right]dxdydt$$

е сходящ за всяко $\alpha>0$.

В тази работа ще разглеждаме задачите на Коши за уравнението (1) в областта H, дефинирана с неравенствата $0\leqq t\leqq T$, $-\infty<x_i<+\infty$, $i=1,2,\ldots,n$, $-\infty<y_k<+\infty$, $k=1,2,\ldots,m$, с начално условие

$$u(x,y,0)=0,\quad (x,y)\in E_{n+m}. \tag{3}$$

Функцията $u(x,y,t)\in V_\varphi$ ще наричаме обобщено решение на тази задача, ако тя удовлетворява условието (3) и за всяка финитна по x и y функция $\Phi(x,y,t)$ от $W_2^1(H)$ е в сила интегралното тъждество

$$\begin{aligned}-\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_H\int\left[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Phi\right]dxdydt+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_H\int b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\Phi dxdydt\\=\int\limits_H\int\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\frac{\partial u}{\partial y_k}+\frac{\partial u}{\partial t}+bu+f\right)\Phi dxdydt.\end{aligned}\tag{4}$$

Веднага се вижда, че при тази постановка на задачата на Коши променливото t се интерпретира като време, а $x_1, x_2,\ldots, x_n, y_1,\ldots,y_m$ като пространствени променливи. Тази интерпретация е подсказана от някои вероятностни задачи за ултрапараболичните уравнения. Възможна е, разбира се, и друга постановка на въпроса: можем да считаме променливите t и $y_1, y_2,\ldots,y_k$, $1\leqq k\leqq m$ за „времена“, които описват интервалите $0\leqq t\leqq T$, $0\leqq y_s\leqq T_s$, $s=1,2,\ldots,k$, а останалите променливи $x_1,x_2,\ldots,x_n$, $y_{k+1}, y_{k+2},\ldots,y_m$ за пространствени променливи. Въпросът, къде трябва да се задават граничните условия, когато някоя от променливите y_ν, $\nu=1,2,\ldots,m$ описва краен интервал, е изяснен в [6]. Тъй като и в този случаи се получават аналогични резултати, и то по същия начин, ние няма да се спираме повече на тази постановка на задачата на Коши. В тази работа, освен ако е казано противното, ще предполагаме, че освен неравенството

$$\text{I)}\quad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\alpha_i\alpha_j\geqq\mu\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2,\quad \mu=\text{const}>0$$

коефициентите на уравнението (1) удовлетворяват в H следните условия: II) $a_{ij}=a_{ji}$ са непрекъснати и ограничени и притежават ограничени производни от вида $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_k}$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i\partial y_k}$, $i,j=1,2,\ldots,n$; $k=1,2,\ldots,m$;

III) $a_k(x, y, t)$ и $b_i(x, y, t)$ са ограничени, $a_k(x, y, t) \in W_2^1(G)$ за всяка ограничена област $G \subset H$ и производните $\frac{\partial a_s}{\partial y_k}$, $\frac{\partial b}{\partial y_k}$, $\frac{\partial b_i}{\partial y_k}$, $s, k=1, 2, \ldots, m$; $i=1, \ldots, n$, съществуват и са ограничени в H: IV) коефициентът $b(x, y, t)$ е ограничен отдолу и расте, когато $x+|y|$ клони към безкрайност не не по-бързо от някаква степен на функцията $|x|^2+\varphi(y)$.

Основният резултат в тази работа е следната

Теорема 1. *Ако коефициентите на* (1) *удовлетворяват условията* I—IV *и* $f(x, y, t) \in V_{\varphi, y}$, *съществува единствено обобщено решение на задачата на Коши с начално условие* (3).

§ 2. Априорни оценки

Да означим с G_ε, $G_\varepsilon \subset E_{n+m}$, областта, дефинирана с неравенствата $|x|^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<R^2(\varepsilon)$, $|y_k|<\beta(\varepsilon)$, $k=1, 2, \ldots, m$, където $R(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ са функции на $\varepsilon>0$, които монотонно клонят към безкрайност, когато ε клони към нула, и удовлетворяват следните условия:

$$\max_{G_\varepsilon} \varphi^2(y)\sqrt{\varepsilon} \leq 1 \text{ и } \max_{G_\varepsilon}(|x|^2+\varphi(y))\sqrt{\varepsilon} \leq 1.$$

Да разгледаме в областта $H_\varepsilon=G_\varepsilon\times(0,T)$ помощното параболично уравнение ($\varepsilon=\text{const}>0$).

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^\varepsilon(x, y, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i^\varepsilon(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$
(2)
$$+\sum_{k=1}^{m} a_k^\varepsilon(x, y, t)\frac{\partial u}{\partial y_k}+b^\varepsilon(x, y, t)u+f^\varepsilon(x, y, t),$$

където $a_{ij}^\varepsilon(x, y, t)$, $b_i^\varepsilon(x, y, t)$, $b^\varepsilon(x, y, t)$ и $f^\varepsilon(x, y, t)$ са безбройно много пъти диференцируеми функции, които при $\varepsilon\to 0$ клонят в средноквадратичен смисъл във всяка ограничена област $G\subset H$ към съответните коефициенти на уравнението (1). Освен това тези функции са така подбрани, че производните

$$\frac{\partial a_{ij}^\varepsilon}{\partial x_i}, \frac{\partial a_{ij}^\varepsilon}{\partial y_k}, \frac{\partial a_{ij}^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 a_{ij}^\varepsilon}{\partial x_i \partial y_k}, \frac{\partial a_s^\varepsilon}{\partial y_k}, \frac{\partial b^\varepsilon}{\partial y_k}, \frac{\partial b_i^\varepsilon}{\partial y_k}, \quad i, j=1, 2, \ldots, n; \quad s, k=1, 2, \ldots, m,$$

са равномерно ограничени в H_ε по отношение на ε и са удовлетворени следните условия:

a) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^\varepsilon \alpha_i \alpha_j \geq \frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$ за всички (x, y, t) от H_ε;

b) $a_\nu^\varepsilon\big|_{|y_\nu|=\beta_\nu(\varepsilon)}=0$, $\nu=1, 2, \ldots, m$;

c) $b^\varepsilon(x, y, t)$ е ограничен отдолу в H_ε с константа, която не зависи от ε и расте при $|x|+|y|$, клонящо към безкрайност, не по-бързо от някаква степен (независеща от ε) на функцията $|x|^2+\varphi(y)$;

d) функцията $f^\varepsilon(x, y, t)$ е финитна в G_ε и интегралите

$$\iint\limits_{H_\varepsilon} e^{-\alpha(|x|^2+\varphi(y))}\left[(f^\varepsilon)^2+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial y_k}\right)^2\right]dxdydt$$

са ограничени равномерно относно $\varepsilon>0$ при фиксирано $\alpha>0$.

За да се убедим, че тези условия могат да бъдат удовлетворени, ще разгледаме средните на Фридрихс — Соболев за функциите $a_{ij}(x, y, t)$, образувани в област, която съдържа H_ε във вътрешността си. Да означим тези средни с $a^\varepsilon_{ij}(x, y, t)$. При достатъчно малко $\varepsilon>0$ условието a) очевидно ще бъде удовлетворено, тъй като при $\varepsilon\to 0$ функциите $a^\varepsilon_{ij}(x, y, t)$ равномерно клонят към $a_{ij}(x, y, t)$ във всяка ограничена област G, $G\subset H_\varepsilon$. Освен това производните

$$\frac{\partial a^\varepsilon_{ij}}{\partial x_i},\ \frac{\partial a^\varepsilon_{ij}}{\partial y_k},\ \frac{\partial a^\varepsilon_{ij}}{\partial t},\ \frac{\partial^2 a^\varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial y_k},\quad i, j=1, 2, \ldots, n;\quad k=1, 2, \ldots, m,$$

клонят към съответните производни на $a_{ij}(x, y, t)$ в средноквадратичен смисъл в G и остават там равномерно ограничени [8]. Че условията b) и c) могат да бъдат удовлетворени, е очевидно. Ще се спрем на условието d). Да означим с $p_\varepsilon(x)$, $q_\varepsilon(y)$ и $\varkappa_\varepsilon(t)$ функции с непрекъснати първи производни по всички аргументи, от които зависят, дефинирани съответно при $|x|\leq R(\varepsilon)$, $|y|\leq\beta(\varepsilon)$, $0\leq t\leq T$ и притежаващи следните свойства:

$$1)\quad p_\varepsilon(x)=0,\quad q_\varepsilon(y)=0,\quad \varkappa_\varepsilon(t)=0\quad \text{съответно при}\quad |x|\geq R(\varepsilon)-1,$$
$$|y|\geq\beta(\varepsilon)-1,\quad 0\leq t\leq\varepsilon,\quad T-\varepsilon\leq t\leq T;$$

$$2)\quad p_\varepsilon(x)=1,\quad q_\varepsilon(y)=1,\quad \varkappa_\varepsilon(t)=1\quad \text{съответно при}\quad |x|\leq R(\varepsilon)-2,$$
$$|y|\leq\beta(\varepsilon)-2,\quad 2\varepsilon\leq t\leq T-2\varepsilon;$$

$$3)\quad 0\leq p_\varepsilon(x)\leq 1,\quad 0\leq\varkappa_\varepsilon(t)\leq 1,\quad \sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial y_k}\right|+|q_\varepsilon|\leq M_0$$

навсякъде в дефиниционните области на тези функции. При това константата M_0 не зависи от ε. Да разгледаме функцията

$$f_\varepsilon(x, y, t)=f(x, y, t)\,p_\varepsilon(x)\,q_\varepsilon(y)\,\varkappa_\varepsilon(t).$$

Веднага се вижда, че тя е финитна в H_ε. Очевидните неравенства

$$F^2_\alpha(f_\varepsilon)=\iint\limits_{H_\varepsilon} e^{-\alpha(|x|^2+\varphi(y))}\left[f^2_\varepsilon+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y_k}\right)^2\right]dxdydt$$

$$\leq\iint\limits_{H_\varepsilon} e^{-\alpha(|x|^2+\varphi(y))}\left[q^2_\varepsilon f^2+2\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial y_k}\right)^2 f^2+2q^2_\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)^2\right]dxdydt$$

$$\leq M_0^2(2m+1)\,F^2_\alpha(f)$$

показват, че $f_\varepsilon(x, y, t)$ удовлетворява условието d) ($\alpha>0$ е фиксирано). Да означим с $f^r_\varepsilon(x, y, t)$ средната на Фридрихс — Соболев от $f_\varepsilon(x, y, t)$, взета по областта H_ε с толкова малък радиус на усреднение $r=r(\varepsilon)$, че $f_\varepsilon^r(x, y, t)$ да е финитна в H_ε и неравенството

$$\| f_\varepsilon^r - f_\varepsilon \|_{W^1_{2,y}(H_\varepsilon)} < \varepsilon$$

да бъде в сила. Като вземем пред вид елементарното неравенство

$$|F_\alpha(f_\varepsilon^r) - F_\alpha(f_\varepsilon)| \leq F_\alpha(f_\varepsilon^r - f_\varepsilon) \leq \| f_\varepsilon^r - f_\varepsilon \|_{W^1_{2,y}(H_\varepsilon)} < \varepsilon,$$

което следва от обстоятелството, че $F_\alpha(g)$ удовлетворява неравенството на триъгълника, веднага заключаваме, че $f^\varepsilon(x, y, t) = f_\varepsilon^{r(\varepsilon)}(x, y, t)$ удовлетворява условието d). Следователно ние конструирахме редица от безбройно много пъти диференцируеми, финитни в H_ε и удовлетворяващи условието d) функции, която клони към $f(x, y, t)$ във всяка ограничена област $G \subset H$ не само в средноквадратичен смисъл, но и по норма в пространството $W^1_{2,y}(G)$.

Да разгледаме за уравнението (2) задачата на Дирихле в областта H_ε с нулеви гранични условия

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{|y_k| = \beta(\varepsilon)} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, m, \quad \text{и} \quad u|_{|x| = R(\varepsilon)} = 0.$$

Както е добре известно, тази задача е разрешима [9]. Ще покажем, че нейното решение u_ε притежава непрекъснати производни от първи ред по всички променливи и непрекъснати производни от втори ред по отношение на $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ в затворената област $\bar{H}_\varepsilon$. За да се убедим в това, достатъчно е да продължим $u_\varepsilon(x, y, t)$ по симетрия през хиперравнините $y_k = \pm\beta(\varepsilon)$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Подробностите, свързани с тази процедура, са описани в [6]. Тъй като във вътрешните точки на така получената разширена област нашето твърдение е очевидно, а при $t=0$ следва от обстоятелството, че $f^\varepsilon(x, y, t)$ е финитна и е удовлетворено условието за съгласуваност ([10], стр. 43), твърдението ни е доказано.

След тези предварителни бележки ще изведем три априорни оценки за функцията $u_\varepsilon(x, y, t)$, които са основни в тази работа. За простота при пресмятанията, които следват, навсякъде, където няма опасност от недоразумение, ще изпускаме индекса ε. Да умножим (2) с $u_\varepsilon e^{-\gamma}$ ($\gamma = a(|x|^2 + \varphi(y))(1+t) + \theta t$, $\theta = \text{const} > 0$) и да интегрираме по H_ε. Ще преобразуваме някои от събираемите в тъждеството, което се получава по този начин с интегриране по части. Като вземем пред вид, че

$$\text{(5)} \qquad \iint_{H_\varepsilon} \left[a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} u e^{-\gamma} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} u e^{-\gamma}) \right] dx dy dt$$

$$= \iint_{H_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} u \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} \right) dx dy dt = 0,$$

тъй като $u|_{|x| = R(\varepsilon)} = 0$, получаваме

$$\text{(6)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \iint_{H_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} u e^{-\gamma} dx dy dt = -\sum_{i,j=1}^{n} \iint_{H_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dxdydt + 2\alpha \sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon}\int a_{ij}(1+t) u \frac{\partial u}{\partial x_j} x_i e^{-\gamma} dxdydt.$$

По същия начин, като се възползуваме от равенството $u_{|y_k|=\beta(\varepsilon)}=0$ и проинтегрираме по части, получаваме

$$(7)\quad \begin{aligned}\iint_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} u e^{-\gamma} dxdydt &= -\iint_{H_\varepsilon}\int \left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma} dxdydt \\ &+ \alpha \iint_{H_\varepsilon}\int (1+t) \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} u \frac{\partial u}{\partial y_k} e^{-\gamma} dxdydt, \quad k=1, 2, \ldots, m.\end{aligned}$$

По-нататък

$$(8)\quad \begin{aligned}\iint_{H_\varepsilon}\int a_k \frac{\partial u}{\partial y_k} u e^{-\gamma} dxdydt &= \frac{1}{2}\iint_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial}{\partial y_k}(a_k u^2 e^{-\gamma})\, dxdydt \\ &- \frac{1}{2}\iint_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial a_k}{\partial y_k} u^2 e^{-\gamma} dxdydt + \frac{\alpha}{2}\iint_{H_\varepsilon}\int a_k u^2 (1+t) \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} dxdydt \\ &= -\frac{1}{2}\iint_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial a_k}{\partial y_k} u^2 e^{-\gamma} dxdydt + \frac{\alpha}{2}\iint_{H_\varepsilon}\int a_k u^2 (1+t) \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} e^{-\gamma} dxdydt\end{aligned}$$

при $k=1, 2, \ldots, m$, тъй като от $u_{|y_k|=\beta(\varepsilon)}=0$ следва

$$\iint_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial}{\partial y_k}(a_k u^2 e^{-\gamma})\, dxdydt = 0.$$

Накрая

$$(9)\quad \begin{aligned}\iint_{H_\varepsilon}\int u \frac{\partial u}{\partial t} e^{-\gamma} dxdydt &= \frac{1}{2}\iint_{G_\varepsilon}\int u^2 e^{-\gamma}\Big|_{t=T} dxdy \\ &+ \frac{1}{2}\iint_{H_\varepsilon}\int [\alpha(|x|^2+\varphi(y))+\theta]\, u^2 e^{-\gamma} dxdydt.\end{aligned}$$

С помощта на тъждествата (6) — (9) получаваме

$$(10)\quad \begin{aligned}&-\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon}\int a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dxdydt - \sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} u \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dxdydt \\ &+ 2\alpha \sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon}\int a_{ij}(1+t) u \frac{\partial u}{\partial x_j} x_i e^{-\gamma} dxdydt - \varepsilon \sum_{k=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon}\int \left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma} dxdydt \\ &+ \alpha\varepsilon \sum_{k=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon}\int (1+t) \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} u \frac{\partial u}{\partial y_k} e^{-\gamma} dxdydt + \sum_{i=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon}\int b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u e^{-\gamma} dxdydt\end{aligned}$$

$$+\frac{a}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\left(x^2+\varphi(y)+\sum_{k=1}^{n}a_k(1+t)\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right)u^2e^{-\gamma}dxdydt+\frac{1}{2}\int\int_{G_\varepsilon}u^2e^{-\gamma}\Big|_{t=T}dxdy$$

$$+\int\int_{H_\varepsilon}\left(b+\frac{0}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial a_k}{\partial y_k}\right)u^2e^{-\gamma}dxdydt+\int\int_{H_\varepsilon}fue^{-\gamma}dxdydt.$$

Нека M_1 е горна граница на $\sup\limits_{H_\varepsilon}\left[a_{ij}^\varepsilon,\ \left|\frac{\partial a_{ij}^\varepsilon}{\partial x_i}\right|,\ |b_i^\varepsilon|,\ -b^\varepsilon,\ \left|\frac{\partial a_k^\varepsilon}{\partial y_k}\right|\right]$, $i, j=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, \ldots, m$, която не зависи от ε. Съгласно нашите предположения такава граница съществува. С помощта на елементарното неравенство $ab\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\delta}+\delta b^2\right)$, $\delta>0$, получаваме

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}u\frac{\partial u}{\partial x_i}e^{-\gamma}dxdydt\right|\leq M_1\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\left|u\frac{\partial u}{\partial x_i}e^{-\gamma}\right|dxdydt$$

$$(11)\qquad \leq\frac{M_1n^2}{2\delta}\int\int_{H_\varepsilon}u^2e^{-\gamma}dxdydt+\frac{M_1n\delta}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt;$$

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}2a\int\int_{H_\varepsilon}a_{ij}(1+t)u\frac{\partial u}{\partial x_j}x_ie^{-\gamma}dxdydt\right|$$

$$(12)\qquad \leq 2aM_1(1+T)\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}|u||x_i|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|e^{-\gamma}dxdydt$$

$$\leq\frac{M_1(1+T)^2na^2}{\delta}\int\int_{H_\varepsilon}u^2|x|^2e^{-\gamma}dxdydt+M_1n\delta\sum_{j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt$$

и

$$a\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\left|\int\int_{H_\varepsilon}(1+t)u\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_k}e^{-\gamma}dxdydt\right|\leq\frac{a\varepsilon}{2}(1+T)^2\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right)^2u^2e^{-\gamma}dxdydt$$

$$(13)\qquad +\frac{a\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt\leq\frac{a}{2}(1+T)^2\int\int_{H_\varepsilon}u^2e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{a\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt.$$

За да получим последното неравенство, се възползувахме от обстоятелството, че

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right|^2\varepsilon<m\eta\varphi^2(y)\varepsilon<m\eta\sqrt{\varepsilon}<1$$

при достатъчно малко ε. Предпоследното неравенство е в сила съгласно дефиницията на областта H_ε. Накрая пак по същия начин

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int\!\!\int_{H_\varepsilon}\!\!\int b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}ue^{-\gamma}dxdydt\right|\leq\frac{M_1n}{2\delta}\int\!\!\int_{H_\varepsilon}\!\!\int u^2e^{-\gamma}dxdydt \tag{14}$$

$$+\frac{M_1\delta}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\!\!\int_{H_\varepsilon}\!\!\int\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt.$$

Като се възползуваме от неравенствата (11) — (14) при $\delta=\frac{\mu}{2(3n+1)M_1}$, от (10) получаваме

$$\frac{\alpha}{2}\int\!\!\int_{H_\varepsilon}\!\!\int\left[|x|^2+\varphi(y)+\sum_{k=1}^{m}(1+t)a_k\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right.$$

$$\left.-\frac{2M_1^2(1+T)^2n(3n+1)\alpha}{\mu}|x|^2\right]u^2e^{-\gamma}dxdydt+\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{n}\int\!\!\int_{H_\varepsilon}\!\!\int\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\int\!\!\int_{H_\varepsilon}\!\!\int\left[\frac{\theta}{2}-M_1m-\frac{M_1(n^2+n)}{2\delta}-\frac{\alpha}{2}(1+T)^2-\frac{1}{2}\right]u^2e^{-\gamma}dxdydt \tag{15}$$

$$+\varepsilon\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{k=1}^{m}\int\!\!\int_{H_\varepsilon}\!\!\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt\leq\frac{1}{2}\int\!\!\int_{H_\varepsilon}\!\!\int f^2e^{-\gamma}dxdydt.$$

Нека означим $\sup_{\varepsilon}\max_{H_\varepsilon}|a_k^\varepsilon|$, $k=1,2,\ldots,m$, с M_2. Тъй като съгласно с нашите предположения $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right|\leq\eta\varphi(y)$, $k=1,2,\ldots,m$, веднага заключаваме, че

$$\left|\sum_{k=1}^{m}(1+t)a_k\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right|\leq M_2m\eta(1+T)\varphi(y).$$

Нека $\eta>0$ удовлетворява неравенството

$$\eta<\frac{1}{2mM_2(1+T)} \tag{16}$$

и да вземем α, $0<\alpha<1$, толкова малко, че неравенството

$$\Delta=\frac{2M_1^2(1+T)^2n(3n+1)\alpha}{\mu}<1$$

да бъде в сила. При тези предположения очевидно имаме

$$|x|^2+\varphi(y)+\sum_{k=1}^{m}(1+t)a_k\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}-\Delta|x|^2\geq(1-\Delta)\ x|^2+\frac{1}{2}\varphi(y)\geq0. \tag{16^0}$$

Като вземем $\theta > 0$ по-голямо от $2M_1 m + \frac{M_1(n^2+n)}{\delta} + a(1+T)^2 + 3$ и го фиксираме, от (15) получаваме окончателното неравенство

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt + \int\int_{H_\varepsilon}\int u_\varepsilon^2 e^{-\gamma}dxdydt \\
(17)\qquad & \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt \leq \frac{1}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\int (f^\varepsilon)^2 e^{-\gamma}dxdydt.
\end{aligned}
$$

Нека $\psi(y)$ е монотонно растяща неотрицателна функция на y с непрекъснати производни по $y_1, y_2, \ldots, y_m$, която удовлетворява неравенствата

$$
(18)\qquad \psi(y) \leq \varphi(y), \quad \left|\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\right| \leq A\psi(y), \quad A = \text{const} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m.
$$

За да получим още едно неравенство, от което ще имаме нужда, ще умножим (2) с $\psi(y)\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\gamma}$ и ще интегрираме по H_ε. От тъждеството

$$
\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int\left[a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial u}{\partial t}\psi(y)e^{-\gamma} + \frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\gamma}\right)\right]dxdydt = 0,
$$

което е валидно благодарение на обстоятелството, че $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{|x|=R(\varepsilon)} = 0$, получаваме

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial u}{\partial t}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt = -\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt \\
(19)\qquad & -\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt \\
& +2a\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int(1+t)x_i a_{ij}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt.
\end{aligned}
$$

От друга страна,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial}{\partial t}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}\right)dxdydt \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt \tag{20}$$

$$-a\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int[|x|^2+\varphi(y)]a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\theta\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt=\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{G_\varepsilon}\int a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}\Big|_{t=T}dxdy.$$

От (19) и (20) получаваме

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial t}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt=-\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+2a\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int(1+t)x_i a_{ij}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\frac{a}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int(|x|^2+\varphi(y))a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt \tag{21}$$

$$-\frac{\theta}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{G_\varepsilon}\int a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}\Big|_{t=T}dxdy.$$

Съвсем по същия начин се получава и

$$\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}\frac{\partial u}{\partial t}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt=-\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int(|x|^2+\varphi(y))\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}\int\int_{G_\varepsilon}\int\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}\Big|_{t=T}dxdy-\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}e^{-\gamma}dxdydt \tag{22}$$

$$-\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt+a\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int(1+t)\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\psi(y)\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\gamma}dxdydt.$$

Като преобразуваме тъждеството, което получихме, като умножихме (2) с $\psi(y)\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\gamma}$ и интегрирахме по H_ε, с помощта на (21) и (22) получаваме

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+2a\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int(1+t)x_ia_{ij}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\frac{a}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int(|x|^2+\varphi(y))a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\frac{\theta}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt$$

(23) $$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{G_\varepsilon}\int a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\psi(y)e^{-\gamma}\Big|_{t=T}dxdy$$

$$-\frac{\varepsilon a}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int(|x|^2+\varphi(y))\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\frac{\varepsilon\theta}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\int_{G_\varepsilon}\int\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}\Big|_{t=T}dxdy$$

$$-\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\gamma}dxdydt+\varepsilon a\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int(1+t)\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\psi(y)\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\int b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt=\int\int_{H_\varepsilon}\int\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int a_k\psi(y)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y_k}e^{-\gamma}dxdydt+\int\int_{H_\varepsilon}\int bu\psi(y)\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\int\int_{H_\varepsilon}\int f(x,y,t)\psi(y)\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\gamma}dxdydt.$$

Нека $M_3=\sup_{\varepsilon}\max_{H_\varepsilon}\left[M_1, M_2, \left|\frac{\partial a_{ij}^{\varepsilon}}{\partial t}\right|\right]$, $i, j=1, 2, \dots, n$. От (23), като пропуснем някои събираеми с подходящ знак (такива са например сумите, пред които стои числото θ като коефициент) и се възползуваме от неравенствата $ab\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\delta}+b^2\delta\right)$, $\delta>0$, $\left|\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right|\leq A\psi(y)$, $k=1, 2, \dots, m$, получаваме

$$\int_{H_\varepsilon}\int \psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt \leqq \left[\frac{(n^2+n+m)M_3\delta}{2}+\delta+aM_3n^2\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon m(A+a)}{2}\right]\int_{H_\varepsilon}\int \psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\left[\frac{(n+1)M_3}{2\delta}+\frac{nM_3}{2}\right]\sum_{i=1}^{n}\int_{H_\varepsilon}\int \psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+aM_3(1+T)^2\sum_{i=1}^{n}\int_{H_\varepsilon}\int |x|^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\psi(y)e^{-\gamma}dxdydt$$

(24)
$$+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int \psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{\varepsilon a}{2}(1+T)^2\sum_{k=1}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\right)^2\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{M_3}{2\delta}\sum_{k=1}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int \psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{1}{2\delta}\int_{H_\varepsilon}\int b^2\psi(y)\,u^2e^{-\gamma}dxdydt+\frac{1}{2\delta}\int_{H_\varepsilon}\int \psi(y)f^2e^{-\gamma}dxdydt.$$

От друга страна, от неравенството $|b^\varepsilon|\leqq K(|x|^2+\varphi(y))^\nu$ ($\nu>0$ не зависи от ε), което е изпълнено по условие, от елементарното неравенство $x^q e^{-x}\leqq Me^{-\frac{x}{2}}$, $x>0$, $M=\mathrm{const}$, и от (17) веднага следват

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{H_\varepsilon}\int \psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2(1+|x|^2)e^{-\gamma}dxdydt$$

(25)
$$\leqq\sum_{i=1}^{n}\int_{H_\varepsilon}\int \varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2(1+|x|^2)e^{-\gamma}dxdydt$$

$$\leqq M_0(a)\sum_{i=1}^{n}\int_{H_\varepsilon}\int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\frac{\gamma}{2}}dxdydt\leqq\frac{2M_0(a)}{\mu}\int_{H_\varepsilon}\int f^2e^{-\frac{\gamma}{2}}dxdydt$$

и

$$\int_{H_\varepsilon}\int b^2u^2\psi(y)\,e^{-\gamma}dxdydt+\int_{H_\varepsilon}\int \psi(y)f^2e^{-\gamma}dxdydt$$

(26)
$$\leqq M_1(a)\int_{H_\varepsilon}\int f^2e^{-\frac{\gamma}{2}}dxdydt.$$

Да поставим в (24) достатъчно малко $\delta > 0$ и да го фиксираме; като се възползуваме от (25) и (26) и вземем пред вид, че в H_ε е в сила неравенството $\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \leq -m\eta\sqrt{\varepsilon}$ при достатъчно малки $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$ получаваме

$$(27) \qquad \int\int_{H} \varphi(y)\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt \leq M_4 \sum_{k=1}^{m} \int\int_{H_\varepsilon} \varphi(y)\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$+ M(\alpha) \int\int_{H_\varepsilon} (f^\varepsilon)^2 e^{-\frac{\gamma}{2}} dx dy dt$$

където M_4 не зависи от ε и α, а $M(\alpha)$ не зависи от ε.

След като разполагаме с това неравенство, можем да пристъпим към извода на основната оценка в тази работа. За тази цел ще умножим (2) с $\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma}$ $\gamma = \alpha(x^2 + \varphi(y))(1+t) + \theta t$, $\theta = \mathrm{const} > 0$, и ще интегрираме по H_ε. Както и досега, ще получим неравенството, което ни е необходимо, като преобразуваме повечето членове на полученото тъждество с интегриране по части. При тези преобразувания ще се възползуваме от обстоятелството, че вторите производни на $u_\varepsilon(x, y, t)$ по $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ са непрекъснати в H_ε. Като се възползуваме от тъждеството

$$\int\int_{H_\varepsilon} \left[a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma}\right)\right] dx dy dt$$

$$= \int\int_{H_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2}\right) dx dy dt = 0,$$

което следва от равенството $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2}\right|_{x=R(\varepsilon)} = 0$, получаваме

$$(28) \qquad \int\int_{H_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma} dx dy dt = -\int\int_{H_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^3 u}{\partial y_\nu^2 \partial x_i} e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$-\int\int_{H_\varepsilon} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dx dy dt + 2\alpha \int\int_{H_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} (1+t) x_i e^{-\gamma} dx dy dt.$$

От друга страна, от $\left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{y_\nu = R(\varepsilon)} = 0$ следва

$$0 = \int\int_{H_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\nu}\left(a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma}\right) dx dy dt = \int\int_{H_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial^3 u}{\partial y_\nu^2 \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$(29) \qquad + \int\int_{H_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_\nu} e^{-\gamma} dx dy dt + \int\int_{H_\varepsilon} \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_\nu} \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$-\alpha \int\int_{H_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_\nu} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} (1+t) e^{-\gamma} dx dy dt.$$

От тъждествата (28) и (29), като преобразуваме събираемите

$$\iint_{H_\varepsilon} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2}\frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dxdydt \quad \text{и} \quad \iint_{H_\varepsilon} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2}\frac{\partial u}{\partial x_j}(1+t)\, x_i e^{-\gamma} dxdydt$$

с още едно интегриране на части, получаваме

$$\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma} dxdydt = \sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_\nu} e^{-\gamma} dxdydt$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon}\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dxdydt$$

$$-a\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu}(1+t) e^{-\gamma} dxdydt$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon}\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dxdydt + \sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_\nu} e^{-\gamma} dxdydt$$

$$\text{(30)} \qquad -a\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon}(1+t)\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dxdydt$$

$$-2a\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon}\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial x_j}(1+t)\, x_i e^{-\gamma} dxdydt$$

$$-2a\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H_\varepsilon}(1+t)\, a_{ij} x_i \frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_\nu} e^{-\gamma} dxdydt$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} 2a^2 \iint_{H_\varepsilon} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial x_j}(1+t)^2\frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu}\, x_i e^{-\gamma} dxdydt.$$

Съвсем по същия начин се получава и

$$\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma} dxdydt = \varepsilon\sum_{k=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma} dxdydt$$

$$\text{(31)} \qquad +a\varepsilon\sum_{\substack{k=1\\ k\neq\nu}}^{m}\iint_{H_\varepsilon}(1+t)\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k} e^{-\gamma} dxdydt$$

$$-a\varepsilon\sum_{\substack{k=1\\ k\neq\nu}}^{m}\iint_{H_\varepsilon}(1+t)\frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial y_k} e^{-\gamma} dxdydt.$$

С интегриране по части получаваме и тъждеството

$$\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma}dxdydt = -\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\frac{\partial b_i}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial y_\nu} e^{-\gamma}dxdydt$$

$$(32)\qquad -\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon} b_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_\nu} e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+a\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}(1+t)\, b_i \frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} e^{-\gamma}dxdydt.$$

Ще преобразуваме събираемите от другата страна на равенството. Имаме

$$\int\int_{H_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma}dxdydt = \int\int_{H_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y_\nu} e^{-\gamma}\right)dxdydt$$

$$(33)\qquad -\int\int_{H_\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_\nu} e^{-\gamma}dxdydt + a\int\int_{H_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}(1+t)\frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} e^{-\gamma}dxdydt$$

$$= -\int\int_{H_\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_\nu} e^{-\gamma}dxdydt + a\int\int_{H_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}(1+t)\frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} e^{-\gamma}dxdydt,$$

тъй като $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{|y_\nu|=\beta(t)} = 0$. Като вземем пред вид, че

$$\int\int_{H_\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_\nu} e^{-\gamma}dxdydt = \frac{1}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}\right]dxdydt$$

$$+\frac{\theta}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt + \frac{a}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2(|x|^2+\varphi(y))\, e^{-\gamma}dxdydt$$

$$= \frac{1}{2}\int\int_{G_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}\Big|_{t=T} dxdy + \frac{\theta}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{a}{2}\int\int_{H_\varepsilon}[|x|^2+\varphi(y)]\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt,$$

от (33) получаваме

$$\int\int_{H_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma}dxdydt = a\int\int_{H_\varepsilon}(1+t)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} e^{-\gamma}dxdydt$$

$$(34)\qquad -\frac{1}{2}\int\int_{G_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdy - \frac{a}{2}\int\int_{H_\varepsilon}[|x|^2+\varphi(y)]\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\frac{\theta}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt.$$

По-нататък нека $k \neq \nu$. Имаме

$$\int\int_{H_\varepsilon}\int a_k \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma} dxdydt = \int\int_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial}{\partial y_\nu}\left(a_k \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_\nu} e^{-\gamma}\right) dxdydt$$

$$(35) \qquad -\int\int_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial a_k}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_k} e^{-\gamma} dxdydt - \int\int_{H_\varepsilon}\int a_k \frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial y_k} e^{-\gamma} dxdydt$$

$$+a\int\int_{H_\varepsilon}\int (1+t) a_k \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} e^{-\gamma} dxdydt.$$

Като вземем пред вид, че $\int\int_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial}{\partial y_\nu}\left(a_k \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_\nu} e^{-\gamma}\right) dxdydt = 0$, тъй като $\left.\frac{\partial u}{\partial y_k}\right|_{|y_\nu|=\beta(\varepsilon)} = 0$, и че

$$\int\int_{H_\varepsilon}\int a_k \frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial y_k} e^{-\gamma} dxdydt = \frac{1}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial}{\partial y_k}\left[a_k \left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}\right] dxdydt$$

$$-\frac{1}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial a_k}{\partial y_k}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dxdydt + \frac{a}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\int a_k \left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 (1+t)\frac{\partial \varphi}{\partial y_k} e^{-\gamma} dxdydt$$

$$= -\frac{1}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial a_k}{\partial y_k}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dxdydt + \frac{a}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\int a_k \left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 (1+t)\frac{\partial \varphi}{\partial y_k} e^{-\gamma} dxdydt$$

$\left(\int\int_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial}{\partial y_k}\left[a_k \left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}\right] dxdydt = 0\right.$, защото $\left. a_k^\varepsilon\big|_{|y_k|=\beta(\varepsilon)} = 0\right)$, от (35) получаваме

$$(36) \qquad \int\int_{H_\varepsilon}\int a_k \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma} dxdydt = -\int\int_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial a_k}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_\nu} e^{-\gamma} dxdydt$$

$$+a\int\int_{H_\varepsilon}\int (1+t) a_k \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} e^{-\gamma} dxdydt + \frac{1}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial a_k}{\partial y_k}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dxdydt$$

$$-\frac{a}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\int a_k \left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 (1+t)\frac{\partial \varphi}{\partial y_k} e^{-\gamma} dxdydt.$$

Да разгледаме сега случая $k=\nu$. Имаме

$$(37) \qquad \int\int_{H_\varepsilon}\int a_\nu \frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma} dxdydt = -\frac{1}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\int \frac{\partial a_\nu}{\partial y_\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dxdydt$$

$$+\frac{a}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\int a_\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu}(1+t) e^{-\gamma} dxdydt,$$

тъй като от $a_\nu^{\varepsilon}|_{\beta(\varepsilon)} = 0$ следва $\int\int_{H_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\nu}\left[a_\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}\right] dxdydt = 0.$ По същия начин

$$
(38) \qquad
\begin{aligned}
\int\int_{H_\varepsilon} b \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} u e^{-\gamma} dxdydt &= -\int\int_{H_\varepsilon} b \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 e^{-\gamma} dxdydt \\
&- \int\int_{H_\varepsilon} \frac{\partial b}{\partial y_\nu} \frac{\partial u}{\partial y_\nu} u e^{-\gamma} dxdydt + a \int\int_{H_\varepsilon} b \frac{\partial u}{\partial y_\nu} u (1+t) \frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} e^{-\gamma} dxdydt.
\end{aligned}
$$

Накрая, като вземем пред вид, че $f^\varepsilon(x, y, t)$ е финитна в H_ε, получаваме

$$
(39) \qquad
\begin{aligned}
\int\int_{H_\varepsilon} f \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma} dxdydt &= -\int\int_{H_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y_\nu} \frac{\partial f}{\partial y_\nu} e^{-\gamma} dxdydt \\
&+ a \int\int_{H_\varepsilon} f \frac{\partial u}{\partial y_\nu} (1+t) \frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} e^{-\gamma} dxdydt.
\end{aligned}
$$

И така ние умножихме (2) с $\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y_\nu^2} e^{-\gamma}$ и интегрирахме по H_ε. От полученото равенство с помощта на тъждествата (30) — (39) намираме

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} \int\int_{H_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial x_j} e^{-\gamma} dxdydt + \sum_{i,j=1}^{n} \int\int_{H_\varepsilon} \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} e^{-\gamma} dxdydt \\
&\quad - a \sum_{i,j=1}^{n} \int\int_{H_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} (1+t) e^{-\gamma} dxdydt \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \int\int_{H_\varepsilon} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial y_\nu} \frac{\partial u}{\partial y_\nu} \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dxdydt + \sum_{i,j=1}^{n} \int\int_{H_\varepsilon} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_\nu} \frac{\partial u}{\partial y_\nu} e^{-\gamma} dxdydt \\
&\quad - a \sum_{i,j=1}^{n} \int\int_{H_\varepsilon} (1+t) \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} \frac{\partial u}{\partial y_\nu} \frac{\partial u}{\partial x_j} e^{-\gamma} dxdydt \\
&\quad - 2a \sum_{i,j=1}^{n} \int\int_{H_\varepsilon} \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_\nu} \frac{\partial u}{\partial y_\nu} \frac{\partial u}{\partial x_j} (1+t) x_i e^{-\gamma} dxdydt \\
&\quad - 2a \sum_{i,j=1}^{n} \int\int_{H_\varepsilon} (1+t) a_{ij} x_i \frac{\partial u}{\partial y_\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_\nu} e^{-\gamma} dxdydt \\
&\quad + 2a^2 \sum_{i,j=1}^{n} \int\int_{H_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial y_\nu} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu} x_i (1+t)^2 e^{-\gamma} dxdydt
\end{aligned}
$$

$$+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\alpha\varepsilon\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int(1+t)\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\alpha\varepsilon\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int(1+t)\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial y_k}e^{-\gamma}dxdydt \tag{40}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial b_i}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt-\sum_{i=1}^{n}\int_{H_\varepsilon}\int b_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\alpha\sum_{i=1}^{n}\int_{H_\varepsilon}\int(1+t)\,b_i\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt$$

$$=\alpha\int_{H_\varepsilon}\int(1+t)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt-\frac{1}{2}\int_{G_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\frac{\alpha}{2}\int_{H_\varepsilon}\int[|x|^2+\varphi(y)]\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{\theta}{2}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial a_k}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt+\alpha\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int(1+t)\,a_k\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial a_k}{\partial y_k}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt-\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\frac{\alpha}{2}\int_{H_\varepsilon}\int a_k(1+t)\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial a_\nu}{\partial y_\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{\alpha}{2}\int_{H_\varepsilon}\int a_\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}(1+t)\,e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\int_{H_\varepsilon}\int b\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt-\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial b}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}u\,e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\alpha\int_{H_\varepsilon}\int b\frac{\partial u}{\partial y_\nu}u(1+t)\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt-\int_{H_\varepsilon}\int\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\alpha\int_{H_\varepsilon}\int(1+t)f\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt.$$

Да положим

$$M_5=\sup_{\varepsilon}\max_{H_\varepsilon}\left[M_1,\ \left|\frac{\partial a_{ij}^{\varepsilon}}{\partial y_k}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 a_{ij}^{\varepsilon}}{\partial x_i \partial y_k}\right|,\ \left|\frac{\partial b_i^{\varepsilon}}{\partial y_k}\right|,\ \left|\frac{\partial b}{\partial y_k}\right|\right]$$

$$i,j=1,2,\ldots,n;\quad k=1,2,\ldots,m.$$

Както по-рано, с M_5 ще означаваме $\sup_\varepsilon \max_{H_\varepsilon} |a_k^\varepsilon|$, $k=1, 2, \ldots, m$. От (40), като пропуснем някои събираеми, които имат подходящ знак, и се възползуваме от неравенствата $ab \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\delta}+b^2\delta\right)$, $\delta>0$, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right| \leq \eta\varphi(y)$, $k=1, 2, \ldots, m$, и $\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right|^2 \varepsilon \leqq m\eta\sqrt{\varepsilon} \leq 1$, получаваме

$$\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu \partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$+\alpha\int\int_{H_\varepsilon}(|x|^2+\varphi(y))\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt+\frac{\theta}{2}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$<\frac{M_5 n\delta}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt+\frac{M_5 n}{2\delta}\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$+\frac{1}{2}M_5 n\alpha\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$+\frac{1}{2}M_5(1+T)^2\eta^2 n\alpha\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\varphi^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$+\frac{1}{2}M_5 n^2\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt+\frac{1}{2}M_5 n\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$+\frac{1}{2}M_5 n\delta\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt+\frac{M_5 n^2}{2\delta}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$+\frac{\alpha}{2}M_5 n^2\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt+\frac{\alpha M_5(1+T)^2 n\eta^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\varphi^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$+\alpha n^2 M_5\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt+\alpha M_5(1+T)^2\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}|x|^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$+M_5 n\delta\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt+\frac{M_5}{\delta}n(1+T)^2\alpha^2\int\int_{H_\varepsilon}|x|^2\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$+\alpha^2(1+T)^2 n^2 M_5\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$+\alpha^2(1+T)^2\eta^2 M_5\int\int_{H_\varepsilon}|x|^2\varphi^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma} dx dy dt$$

$$+\frac{\alpha\varepsilon}{2}(m-1)\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{\alpha}{2}(1+T)^2\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{\alpha\varepsilon}{2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{\alpha}{2}(1+T)^2\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$(41)\qquad +\frac{M_5}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{nM_5}{2}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{M_5\delta}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{M_5 n}{2\delta}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{\alpha}{2}(1+T)\,nM_5\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{\alpha}{2}(1+T)\,\eta^2 M_5\sum_{i=1}^{n}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\varphi^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{\alpha}{2}(1+T)\,\eta\int_{H_\varepsilon}\int\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{\alpha}{2}\eta(1+T)\int_{H_\varepsilon}\int\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2\varphi^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{M_5}{2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{M_5}{2}(m-1)\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{\alpha(1+T)M_2\eta}{2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2\varphi e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{\alpha}{2}(1+T)\,M_2\eta\,(m-1)\int_{H_\varepsilon}\int\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{1}{2}(m-1)\,M_5\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{\alpha}{2}M_2(1+T)\,\eta\,(m-1)\int_{H_\varepsilon}\int\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{M_5}{2}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{\alpha}{2}(1+T)\,M_2\eta\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2\varphi(y)\,e^{-\gamma}dxdydt$$

$$\frac{3M_5}{2}\int\limits_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{M_5}{2}\int\limits_{H_\varepsilon}\int u^2e^{-\gamma}dxdydt+\int\limits_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{a\eta^2}{2}\int\limits_{H_\varepsilon}\int\varphi^2(y)\,b^2u^2e^{-\gamma}dxdydt+\frac{a}{2}(1+T)^2\int\limits_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 dxdydt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{a^2}{2}(1+T)^2\eta^2\int\limits_{H_\varepsilon}\int\varphi^2(y)f^2e^{-\gamma}dxdydt.$$

От друга страна, от основното неравенство (17) и от елементарното неравенство $x^qe^{-ax}\leq c(a)\,e^{-\frac{a}{2}x}$, $c(a)>0$, $x>0$, $a>0$ следва

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma}\left(1+\varphi^2(y)+|x|^2+|x|^2\varphi^2(y)\right)dxdydt \tag{42}$$

$$+\frac{M_5}{2}\int\limits_{H_\varepsilon}\int e^{-\gamma}\left(u^2+b^2u^2\varphi^2(y)+\varphi^2(y)f^2\right)dxdydt\leq D(a)\int\limits_{H_\varepsilon}\int f^2e^{-\frac{\gamma}{2}}dxdydt.$$

Да дадем на ν в (41) стойностите $1, 2, \ldots, m$ и да съберем получените неравенства. По този начин с помощта на (42) получаваме

$$\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\int\limits_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{\nu,k=1}^{m}\int\limits_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+a\sum_{\nu=1}^{m}\int\limits_{H_\varepsilon}\int g(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+M_6\sum_{\nu=1}^{m}\int\limits_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$\leq\frac{am(1+T)\eta}{2}\int\limits_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\varphi(y)\,e^{-\gamma}dxdydt \tag{43}$$

$$+\frac{(m-1)\,a(1+T)\,M_2\eta}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2\varphi(y)\,e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\left(a(1+T)^2+\frac{M_5}{2}\right)(m-1)\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+M_7(a)\int\limits_{H_\varepsilon}\int f^2e^{-\frac{\gamma}{2}}dxdydt+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{m}\int\limits_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt,$$

където сме положили за краткост

$$g(x,y)=\left(1-\frac{M_5n(1+T)^2}{\delta}a\right)|x|^2+\left(1-\frac{\eta(1+T)(1+2mM_2)}{2}\right)\varphi(y),$$

$$M_6=\frac{\theta}{2}-1-M_5\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n^2}{2\delta}+\frac{3an^2}{2}+(1+T)^2an^2+\frac{n}{2}+\frac{n}{2\delta}\right)$$
$$+M_5\left(\frac{a(1+T)n}{2}+m+1+\frac{a(1+T)^2}{2}\right)$$

и константата $M_7(a)$ не зависи от ε. От (43), като се възползуваме от спомагателното неравенство (27) при $\psi(y)=\varphi(y)$, получаваме

$$\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial y_\nu}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{\nu,k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial^2u}{\partial y_\nu\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt$$
$$+a\sum_{\nu=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int g(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt+M_6\sum_{\nu=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt$$
$$\leq\frac{a}{2}m\eta(1+T)M_4\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\varphi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt \tag{44}$$
$$+\frac{a}{2}(m-1)(1+T)M_2\eta\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2\varphi(y)e^{-\gamma}dxdydt$$
$$+(m-1)\left(a(1+T)^2+\frac{M_5}{2}\right)\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt$$
$$+M_8(a)\int\int_{H_\varepsilon}\int f^2e^{-\frac{\gamma}{2}}dxdydt+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt.$$

В това неравенство константата $M_8(a)$ не зависи от ε. Да предположим, че η е толкова малко, че е в сила неравенството

$$g(x,y)\geq\frac{a}{2}m\eta(1+T)M_5\varphi(y)+\frac{a}{2}\eta(1+T)(m-1)M_2\varphi(y). \tag{45}$$

След това да вземем $\theta>0$ толкова голямо, че да бъде изпълнено неравенството

$$M_8\geq1+(m-1)\left(a(1+T)^2+\frac{M_5}{2}\right)$$

и да го фиксираме; при така избраните $\eta>0$ и $\theta>0$ от (44) получаваме основното неравенство

$$\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial v_\nu}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{\nu,k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial^2u}{\partial y_\nu\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2e^{-\gamma}dxdydt\leq M_8(a)\int\int_{H_\varepsilon}\int f^2e^{-\frac{\gamma}{2}}dxdydt \tag{46}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt.$$

Като се възползуваме от (17), получаваме от (46)

$$(47)\quad \frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{\nu,k=1}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y_\nu\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\sum_{k=1}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+\int_{H_\varepsilon}\int u_\varepsilon^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$\leq M_0(\alpha)\int_{H_\varepsilon}\int (f^\varepsilon)^2 e^{-\frac{\gamma}{2}}dxdydt+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_{H_\varepsilon}\int\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt,$$

което е основно в тази работа ($M_0(\alpha)$ не зависи от ε). Като поставим в това неравенство $\alpha=0$, което дава $\gamma=0$, и вземем пред вид, че ако областта G, в която интегрираме, е ограничена и фиксирана, $|x|+|y|\leq c=\text{const}$, получаваме

$$(48)\quad \begin{aligned}&\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\int_{G}\int\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i\partial y_\nu}\right)^2 dxdydt+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{\nu,k=1}^{m}\int_{G}\int\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y_\nu\partial y_k}\right)^2 dxdydt\\ &+\sum_{i=1}^{n}\int_{G}\int\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right)^2 dxdydt+\sum_{k=1}^{m}\int_{G}\int\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_k}\right)^2 dxdydt+\int_{G}\int u_\varepsilon^2 dxdydt\\ &\leq M\int_{G}\int (f^\varepsilon)^2 dxdydt+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_{G}\int\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial y_k}\right)^2 dxdydt,\end{aligned}$$

за което ставаше дума в [6] и което позволява да се усилят малко доказаните там теореми 1 и 4.

Ще отбележим, че когато функцията $\varphi(y)$ расте по-бавно при $|y|\to\infty$, основната оценка (47) е вярна и при по-слаби предположения за коефициентите $a_k(x,y,t)$, $k=1,2,\ldots,m$.

Лема 1. *Ако $\varphi(y)=|y|^{2p}$ (p — естествено число) и всички коефициенти на (1) удовлетворяват условията I—IV с изключение на условието $|a_k(x,y,t)|\leq M$, $k=1,2,\ldots,m$, което е заменено с по-слабото изискване в H да бъдат в сила неравенствата*

$$(49)\qquad a_k(x,y,t)|\leq B(|x|^{\frac{1}{p}}+\varrho|y|),\quad k=1,2,\ldots,m,$$

където $B>0$ е произволна константа, а $\varrho>0$ е достатъчно малко число, което зависи от p, основната оценка (47) остава в сила.

Доказателство. За да докажем току-що формулираната лема, ще проверим, че пресмятанията, необходими за доказателството на (47), с незначителни изменения са валидни и при новите предположения. Преди това ще отбележим, че без ограничение на общността можем да предполагаме, че вместо (49) е изпълнено неравенството

(50) $\qquad a_k(x,y,t) \le \varrho(|x|^{\frac{1}{p}} + |y|)$, където $\varrho>0$ е достатъчно малко.

Неравенството (50) се получава от (49) със смяната $x'_i = x_i$, $y'_k = ky_k$, $t'=t$, където $k>0$ е достатъчно малко.

Един бегъл преглед на разсъжденията, с които получихме (17), показва, че при извода на (15) условието $a_k \le M$, $k=1,2,\ldots,m$, не е използувано. Следователно то и сега остава в сила. Тъй като сега $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right| = p|y|^{2p-2}|2y_k| \le 2p|y|^{2p-1}$, с неравенството на Юнг

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ a\ge 0,\ b\ge 0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>0,\ q>0,$$

получаваме

$$\left|\sum_{k=1}^{m}(1+t)a_k\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right| \le 2mp(1+T)\varrho|y|^{2p-1}(|x|^{\frac{1}{p}}+|y|)$$

$$\le 2mp(1+T)\varrho\varphi(y) + 2mp(1+T)\varrho\left(\frac{|x|^2}{2p} + \frac{2p-1}{2p}|y|^{2p}\right)$$

$$=(4p-1)m(1+T)\varrho\varphi(y) + m(1+T)\varrho|x|^2.$$

Следователно и сега

$$(16^0_a)\qquad \begin{aligned} |x|^2+\varphi(y)-A|x|^2+\sum_{k=1}^{m}(1+t)a_k\frac{\partial\varphi}{\partial y_k} &\ge [1-A-m(1+T)\varrho]|x|^2 \\ &+[1-m(1+T)(4p-1)\varrho]\varphi(y)\ge 0, \end{aligned}$$

стига $\varrho>0$ да е достатъчно малко. По такъв начин и при нашите нови предположения неравенството (17) е доказано.

Да се заемем с оценката (27). Тъй като тъждеството (23) се получава само с интегриране по части, то и сега остава в сила. Единственото събираемо, което не се оценява както по-рано, е

$$\sum_{k=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon} a_k\psi(y)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y_k}e^{-\gamma}dxdydt,$$

защото в другите събираеми коефициентите $a_k(x,y,t)$ не участвуват. Като се възползуваме от неравенството

$$\sum_{k=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon} a_k\psi(y)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y_k}e^{-\gamma}dxdydt \le \frac{1}{2}\iint_{H_\varepsilon}\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{m}{2}\sum_{k=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon} a_k^2\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

и при оценката на събираеми от вида

$$\sum_{k=1}^{m}\varepsilon\int\int_{H_\varepsilon}(x^2+\varphi(y))\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt,\quad \varepsilon\int\int_{H_\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y_k}e^{-\gamma}dxdydt$$

вземем пред вид неравенствата

$$(x^2+\varphi(y))\varepsilon\leq\sqrt{\varepsilon},\quad \sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right|\varepsilon\leq M\sqrt{\varepsilon},$$

които следват от дефиницията на областта H_ε и от неравенствата

$$\psi(y)\leq\varphi(y),\quad \left|\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right|\leq A\psi(y),\quad k=1,2,\ldots,m,$$

получаваме

$$\text{(27 a)}\quad \begin{aligned}\int\int_{H_\varepsilon}\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt &\leq 2m\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}a_k^2\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt\\ &+M_4\sqrt{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\psi(y)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+M(a)\int\int_{H_\varepsilon}f^2e^{-\frac{\gamma}{2}}dxdydt,\end{aligned}$$

което за нашите цели е напълно достатъчно.

Ще покажем, че (47) остава в сила. Очевидно тъждеството (40) и сега остава в сила, тъй като се получава с интегриране по части. Единствените събираеми в това тъждество, в които участвуват коефициентите $a_k(x, y, t)$, а не техните производни по $y_1, y_2, \ldots, y_m$, които по предположение са ограничени в H, са

$$a\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}(1+t)a_k\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt,$$

$$\text{(51)}\quad -\frac{a}{2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}a_k(1+t)\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

и

$$\frac{a}{2}\int\int_{H_\varepsilon}(1+t)a_\nu\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt.$$

За образец ще оценим първото от тях. Тъй като $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}\right|=2p|y_\nu|y_\nu^{2p-2}\leq 2p\,y_\nu^{2p-1}$, имаме

$$\left|a\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}(1+t)a_k\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt\right|$$

$$-pa(1-T)\varrho\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\iint_{H_\varepsilon}|y|^{2p-1}(|x|^{\frac{1}{p}}+|y|)\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+pa(m-1)(1+T)\varrho\iint_{H_\varepsilon}|y|^{2p-1}(|x|^{\frac{1}{p}}+|y|)\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt.$$

Като вземем пред вид, че съгласно неравенството на Юнг

$$|y|^{2p-1}(|x|^{\frac{1}{p}}+|y|)\leq\frac{|x|^2}{2p}+\frac{4p-1}{2p}|y|^{2p},$$

получаваме

$$a\left|\sum_{k=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon}(1+t)a_k\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt\right|$$

$$\leq ap(1-T)\varrho\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}\iint_{H_\varepsilon}\left[\frac{|x|^2}{2p}+\frac{4p-1}{2p}\varphi(y)\right]\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+p(m-1)(1+T)a\varrho\iint_{H_\varepsilon}\left[\frac{|x|^2}{2p}+\frac{4p-1}{2p}\varphi(y)\right]\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt.$$

Очевидно е, че тези членове се уравновесяват с члена

$$\frac{a}{2}\sum_{\nu=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon}[|x|^2+\varphi(y)]\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt,$$

който стои от другата страна на тъждеството, стига $\varrho>0$ да е достатъчно малко. По същия начин [пак с (52)] при достатъчно малко $\varrho>0$ се оценяват и останалите събираеми (51). Малко по-сложен е случаят с члена

$$a\iint_{H_\varepsilon}(1+t)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt.$$

В този случай ще постъпим по следния начин: очевидно

$$a\left|\iint_{H_\varepsilon}(1+t)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}e^{-\gamma}dxdydt\right|$$

$$\leq 2pa(1+T)\iint_{H_\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right||y|^{2p-1}e^{-\gamma}dxdydt$$

$$\leq\frac{ap(1+T)}{\delta}\iint_{H_\varepsilon}|y|^{2p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+ap(1+T)\delta\iint_{H_\varepsilon}|y|^{2p}\left(\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

и ако вземем $\delta>0$ достатъчно малко, последното събираемо се уравновесява с (52). За да оценим

$$\frac{ap(1+T)}{\delta}\iint_{H_\varepsilon}|y|^{2p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt,$$

ще се възползуваме от (27 а) при $\psi(y)=|y|^{2p-2}$. По такъв начин получаваме

$$\iint_{H_\varepsilon}|y|^{2p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$\leqq 2m\varrho^2\sum_{k=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon}[|x|^{\frac{1}{p}}+|y|]^2|y|^{2p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\sqrt{\varepsilon}M_4\sum_{k=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon}|y|^{2p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt+M(a)\iint_{H_\varepsilon}f^2e^{-\frac{\gamma}{2}}dxdydt.$$

Като вземем пред вид, че $(|x|^{\frac{1}{p}}+|y|)^2\leqq 2|x|^{\frac{2}{p}}+2|y|^2$, получаваме

$$(|x|^{\frac{1}{p}}+|y|)^2|y|^{2p-2}\leqq 2(|x|^{\frac{2}{p}}|y|^{2p-2}+|y|^{2p}),$$

откъдето с помощта на неравенството

$$|x|^{\frac{2}{p}}|y|^{2p-2}\leqq\frac{|x|^2}{p}+\frac{p-1}{p}|y|^{2p}$$

следва

$$\iint_{H_\varepsilon}(|x|^{\frac{1}{p}}+|y|)^2|y|^{2p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$\leqq\frac{2}{p}\iint_{H_\varepsilon}[|x|^2+(2p-1)|y|^{2p}]\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt.$$

По такъв начин получихме

$$\frac{ap(1+T)}{\delta}\iint_{H_\varepsilon}|y|^{2p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$\leqq\frac{4ma(1+T)\varrho^2}{\delta}\sum_{k=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon}[|x|^2+(2p-1)\varphi(y)]\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{\sqrt{\varepsilon}M_4}{\delta}ap(1+T)\sum_{k=1}^{m}\iint_{H_\varepsilon}|y|^{2p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{pa(1+T)}{\delta}M(a)\iint_{H_\varepsilon}f^2e^{-\frac{\gamma}{2}}dxdydt.$$

Очевидно първото събираемо от дясната страна на това неравенство се уравновесява с (52), ако $\rho>0$ е достатъчно малко ($\delta>0$ е фиксирано). Накрая

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} M_4 ap(1+T)\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon} y^{2p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$\le\frac{\sqrt{\varepsilon} M_4}{\delta} ap(1+T)\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\frac{\sqrt{\varepsilon} M_4}{\delta} ap(1+T)\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon} y^{2p}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt.$$

Първото събираемо в дясната част на последното неравенство се уравновесява с

$$\rho\sum_{k=1}^{m}\int\int_{H_\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 e^{-\gamma}dxdydt,$$

което се намира от другата страна на (41), а второто — с (52) при достатъчно малко $\varepsilon>0$. С това лема 1 е доказана.

§ 3. Теореми за съществуване и единственост

Да разгледаме задачата на Коши за уравнението (1) в областта H (вж. § 1). Ще докажем две теореми за съществуване и единственост.

Теорема 1. *Ако коефициентите на* (1) *удовлетворяват условията* I—IV *и* $f(x, y, t)\in V_{\varphi,\gamma}$ *съществува единствено обобщено решение на задачата на Коши за уравнението* (1), *което принадлежи на класата* V_φ *и удовлетворява началното условие*

$$u(x, y, 0)=0,\ (x, y)\in E_{n+m}.$$

Теорема 2. *Ако коефициентите на* (1) *удовлетворяват условията на лема* 1 *и* $f\in V_{\varphi_p,\gamma}$, *където* $\varphi_p(y)=y^{2p}$ (*p — естествено число*), *съществува единствено обобщено решение на задачата на Коши за уравнението* (1), *което принадлежи на класата* $V_{\varphi_p,\gamma}$ *и удовлетворява началното условие*

$$u(x, y, 0)=0,\ (x, y)\in E_{n+m}.$$

Доказването на теорема 1 и теорема 2 ще извършим едновременно.

Доказателство. Да разгледаме задачата на Дирихле за помощното параболично уравнение (2) в областта H_ε с нулеви гранични значения по контура. Нека $u_\varepsilon(x, y, t)$ е решението на тази задача. Съгласно [9] такова решение съществува. Да означим с $\Phi(x, y, t)$ произволна финитна по x и y функция от класата $W_2^1(H)$ и да вземем $\varepsilon>0$ толкова малко, че носителят Q на $\Phi(x, y, t)$ да остане вътре в H_ε. Да умножим (2) с $\Phi(x, y, t)$ и да интегрираме по H_ε. С интегриране по части получаваме

$$\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{H}\left(a^{\varepsilon}_{ij}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}+\frac{\partial a^{\varepsilon}_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_i}\Phi\right)dxdydt$$

$$(53)\qquad \sum_{i=1}^{n}\iint_{H} b^{\varepsilon}_{i}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_i}\Phi dxdydt+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\iint_{H}\frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial y_k^2}\Phi dxdydt$$

$$=\iint_{H}\left(\sum_{k=1}^{m}a^{\varepsilon}_{k}\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y_k}+\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}+b^{\varepsilon}u_{\varepsilon}+f^{\varepsilon}\right)\Phi\, dxdydt.$$

(В (53) вместо H_{ε} можем да пишем H, защото извън H_{ε} функцията $\Phi(x, y, t)$ се анулира тъждествено.) Като вземем пред вид неравенствата (47) и (27) при $\psi(y)\equiv 1$, веднага заключаваме, че фамилиите от функции

$$\left\{\frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial x_i \partial y_k}\right\},\ \left\{\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_i}\right\},\ \left\{\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y_k}\right\},\ \left\{\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t}\right\},\ \{u_{\varepsilon}\},\ i=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, m,$$

са слабо компактни. Следователно можем да изберем такава редица $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\nu}, \ldots$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon_{\nu}=0$, че редиците

$$\left\{\frac{\partial^2 u_{\varepsilon_\nu}}{\partial x_i \partial y_k}\right\},\ \left\{\frac{\partial u_{\varepsilon_\nu}}{\partial x_i}\right\},\ \left\{\frac{\partial u_{\varepsilon_\nu}}{\partial y_k}\right\},\ \left\{\frac{\partial u_{\varepsilon_\nu}}{\partial t}\right\},\ \{u_{\varepsilon_\nu}\}$$

да са слабо сходящи във всяка ограничена област $G\subset H$. Да означим с $u(x, y, t)$ слабата граница на $\{u_{\varepsilon_\nu}\}$. Тогава редицата $\left\{\frac{\partial u_{\varepsilon_\nu}}{\partial x_i}\right\}$ клони слабо към $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, редицата $\left\{\frac{\partial u_{\varepsilon_\nu}}{\partial y_k}\right\}$ — към $\frac{\partial u}{\partial y_k}$ и пр. и функцията $u(x, y, t)$ принадлежи на $W_2^1(G)$ за всяка ограничена област G, $G\subset H$ [8]. Нещо повече, пак с помощта на (47) може да се докаже, че $u(x, y, t)$ притежава обобщени втори производни от вида $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_k}$, $i=1, 2, \ldots, n$; $k=1, 2, 3, \ldots, m$. Да изпуснем в (47) всички членове, които съдържат производни от втори ред, и да поставим в така полученото неравенство $\varepsilon=\varepsilon_{\nu}$. Като извършим в това неравенство граничния преход $\varepsilon_{\nu}\to 0$ при фиксирано $a>0$, заключаваме с помощта на условието d) от § 2, че $u(x, y, t)\in V_p$ (или съответно, че $u(x, y, t)\in V_{\sigma p}$). Като се възползуваме от неравенството

$$\sum_{k=1}^{m}\varepsilon\iint_{Q}\frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial y_k^2}\Phi dxdydt\leq\left(\sum_{k=1}^{m}\varepsilon\iint_{Q}\left(\frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial y_k^2}\right)^2 dxdydt\right)^{\frac{1}{2}}\left(m\varepsilon\iint_{Q}\Phi^2 dxdydt\right)^{\frac{1}{2}}$$

(Q е носителят на $\Phi(x, y, t)$) и вземем пред вид, че съгласно неравенството (48) имаме

$$(54)\qquad \sum_{k=1}^{m}\varepsilon\iint_{Q}\left(\frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial y_k^2}\right)^2 dxdydt\leq M\iint_{Q}(f^{\varepsilon})^2 dxdydt$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\int_{Q}\left(\frac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial y_k}\right)^2 dxdydt<\text{const}$$

(изразът в дясната част на (54) е ограничен с константа, независеща от ε, защото областта Q е ограничена и фиксирана), веднага заключаваме, че

$$\lim_{\to 0}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon\int\int_{Q}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y_k^2}\Phi dxdydt=0. \tag{55}$$

Накрая $\left\{a_{ij}^{\varepsilon}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right\}$ слабо клони към $a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}$ във всяка ограничена подобласт G на H, защото $\{a_{ij}^{\varepsilon}\}$ по условие клони в G към a_{ij} в средноквадратичен смисъл, а $\left\{\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right\}$, както вече отбелязахме, клони слабо към $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Разбира се, това разсъждение важи за всички събираеми в (53). Като извършим граничния преход $\varepsilon_\nu\to 0$ в (53) и се възползуваме от (55), заключаваме, че $u(x,y,t)$ удовлетворява интегралното тъждество (4). От друга страна, очевидно $u(x,y,0)=0$, защото $u_\varepsilon(x,y,0)=0$ [8]. С това съществуването на слабото решение, за което се говори в теорема 1 и 2, е доказано. Остава да докажем теоремите за единственост. Ще покажем, *че ако $u(x,y,t)$ се анулира при $t=0$, принадлежи на класата V_φ (съответно на V_{φ_p}) и при всяка финитна по x и y функция $\Phi(x,y,t)\in W_2^1(H)$ удовлетворява тъждеството*

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\int\int_{H}\left[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Phi\right]dxdydt+\sum_{i=1}^{n}\int\int_{H}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\Phi dxdydt$$
$$=\int\int_{H}\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\frac{\partial u}{\partial y_k}+\frac{\partial u}{\partial t}+bu\right)\Phi dxdydt, \tag{56}$$

то $u(x,y,t)\quad 0$.

Доказателство. Нека $q_R(x,y)$ е функция с непрекъснати частни производни от първи ред по всички променливи, която е дефинирана за всяко $(x,y)\in E_{n+m}$ и притежава следните свойства:

1) $q_R(x,y)=\begin{cases}1 & \text{за}\quad x^2+y^2\leq R^2,\\ 0 & \text{за}\quad x^2+y^2\geq 4R^2;\end{cases}$

2) за всяка точка (x,y) са изпълнени неравенствата

$$0\leq q_R\leq 1\quad\text{и}\quad\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial q_R}{\partial y_k}\right|+\sum_{1}^{n}\left|\frac{\partial q_R}{\partial x_i}\right|\leq 1.$$

Да положим за краткост $\gamma=\alpha(x^2+\varphi(y))(1+t)+\theta t$, където константите $\theta>0$ и $\alpha>0$ ще определим допълнително. Като поставим в (56) $\Phi_R=q_R e^{-\gamma}u$ (очевидно $\Phi_R(x,y,t)$ е финитна по x и y и принадлежи на $W_2^1(H)$), получаваме

$$\sum_{i,j=1}^{n}\iint_H a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u}{\partial x_j}q_R e^{-\gamma}+u\frac{\partial q_R}{\partial x_j}e^{-\gamma}-2a(1+t)\,x_j u q_R e^{-\gamma}\right]dxdydt$$

(57) $$-\sum_{i,j=1}^{n}\iint_H\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}q_R e^{-\gamma}u\,dxdydt+\sum_{i=1}^{n}\iint_H b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}q_R u e^{-\gamma}dxdydt$$

$$=\iint_H\left(q_R u\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\gamma}+\sum_{k=1}^{m}a_k q_R u\frac{\partial u}{\partial y_k}e^{-\gamma}-bq_R u^2 e^{-\gamma}\right)dxdydt.$$

Ще преобразуваме някои членове в това тъждество с интегриране по части. Имаме

(58) $$\sum_{k=1}^{m}\iint_H a_k\frac{\partial u}{\partial y_k}q_R u e^{-\gamma}dxdydt=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\iint_H q_R\frac{\partial a_k}{\partial y_k}u^2e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\iint_H\frac{\partial q_R}{\partial y_k}a_k u^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{m}\iint_H(1+t)\,a_k q_R\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}u^2e^{-\gamma}dxdydt.$$

(Контурните членове са нули, защото $q_R(x,y)$ е финитна по x и y.) Аналогично

(59) $$\iint_H q_R u\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\gamma}dxdydt=\frac{1}{2}\iint_{E_{n+m}}q_R u^2 e^{-\gamma}\Big|_{t=T}dxdy$$

$$+\frac{a}{2}\iint_H[|x|^2+\varphi(y)]\,q_R u^2 e^{-\gamma}dxdydt+\frac{\theta}{2}\iint_H q_R u^2 e^{-\gamma}dxdydt.$$

Да означим с K_R цилиндъра, дефиниран с неравенствата $0\leq t\leq T$, $|x|^2+|y|^2\leq R^2$. Като вземем пред вид свойствата на функцията $q_R(x,y)$ и се възползуваме от (58) и (59), от (57) получаваме

$$\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{K_{2R}}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}q_R e^{-\gamma}dxdydt-\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{K_{2R}-K_R}a_{ij}u\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial q_R}{\partial x_j}e^{-\gamma}dxdydt$$

$$-2a\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{K_{2R}}(1+t)\,a_{ij}x_j\frac{\partial u}{\partial x_i}uq_Re^{-\gamma}dxdydt-\sum_{i,j=1}^{n}\iint_{K_{2R}}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}q_R u e^{-\gamma}dxdydt$$

(60) $$+\sum_{i=1}^{n}\iint_{K_{2R}}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}uq_Re^{-\gamma}dxdydt=\frac{1}{2}\iint_{E_{n+m}}q_R u^2e^{-\gamma}\Big|_{t=T}dxdy$$

$$+\frac{a}{2}\iint_{K_{2R}}\left[|x|^2+\varphi(y)-\sum_{k=1}^{m}(1+t)\,a_k\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right]q_R u^2 e^{-\gamma}dxdydt$$

$$+\iint\limits_{K_{2R}}\left(b+\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial a_k}{\partial y_k}\right)q_R u^2 e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\iint\limits_{K_{2R}-K_R}\frac{\partial q_R}{\partial y_k}a_k u^2 e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt.$$

Ще припомним, че както при предположенията на теорема 1, така и при предположенията на теорема 2 е в сила неравенството

$$(61)\qquad g(x,y,t)=|x|\,\varphi(y)-\sum_{k=1}^{m}(1-t)a_k\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\geq\delta(|x|^2+\varphi(y)),$$

където $\delta>0$ е достатъчно малко. (Вж. неравенствата (16^0) и (16^0_a) от § 2.) Като пропуснем някои събираеми с подходящ знак, от (60) получаваме

$$\mu\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{K_{2R}}q_R\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt+\frac{\alpha}{2}\iint\limits_{K_{2R}}g(x,y,t)\,q_R u^2 e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt$$

$$\leq\iint\limits_{K_{2R}}\left(b-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial a_k}{\partial y_k}\right)q_R u^2 e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt-\sum_{i,j=1}\iint\limits_{K_{2R}-K_R}a_{ij}u\frac{\partial u}{\partial x_i}e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt$$

$$\leq\frac{\alpha(1+T)^2c^2n}{\delta}\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{K_{2R}}q_R\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt-\alpha\delta n\iint\limits_{K_{2R}}q_R|x|^2u^2e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt$$

$$(62)\qquad+\frac{n}{2}C\delta_1\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{K_{2R}}q_R\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt+\frac{Cn^2}{2\delta_1}\iint\limits_{K_{2R}}q_R u^2 e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt$$

$$+\frac{Cn}{2\delta_1}\iint\limits_{K_{2R}}q_R u^2 e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{C\delta_1}{2}\iint\limits_{K_{2R}}q_R\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\iint\limits_{K_{2R}-K_R}|a_k|\,u^2e^{-\gamma}\,dx\,dy\,dt,$$

където $C=\sup\limits_{H}\left(|a_{ij}|+|b_i|+\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right|\right)$, $i,j=1,2,\ldots,n$. Да вземем $\delta>0$ толкова малко, че да имаме

$$g(x,y,t)\geq 2\delta n|x|$$

и да го фиксираме. Това е възможно съгласно (61). След това да вземем $\alpha>0$ и $\delta_1>0$ толкова малки, че да е изпълнено неравенството

$$(63)\qquad \mu>\frac{a(1+T)^2C^2n}{\delta}+\frac{Cn\delta_1}{2}+\frac{C\delta_1}{2}$$

и да ги фиксираме. Накрая да вземем $\theta>0$ толкова голямо, че да бъде в сила

$$(64)\qquad b-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial a_k}{\partial y_k}-\frac{Cn^2}{2\delta_1}-\frac{nC}{2\delta_1}\geq 1;$$

това е възможно, защото $b(x, y, t)$ е ограничена отдолу, а $\frac{\partial a_k}{\partial y_k}$, $k=1,2,\ldots,m$, са ограничени. Накрая от дефиницията на $q_R(x, y)$ следва

$$(65)\qquad \iint\limits_{K_{2R}} q_R u^2e^{-\gamma}dxdydt\geq\iint\limits_{K_R} u^2e^{-\gamma}dxdydt.$$

От (62) с помощта на (63), (64) и (65) получаваме

$$(66)\qquad \begin{aligned}\iint\limits_{K_R} u^2e^{-\gamma}dxdydt &\leq\sum_{i,j=1}^{n}\iint\limits_{K_{2R}-K_R} a_{ij}u\frac{\partial u}{\partial x_i}e^{-\gamma}dxdydt\\ &+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\iint\limits_{K_{2R}-K_R}|a_k|u^2e^{-\gamma}dxdydt.\end{aligned}$$

Ще отбележим, че както при предположенията на теорема 1, така и при предположенията на теорема 2 интегралите

$$\sum_{i,j=1}^{n}\iint\limits_{H} a_{ij}u\frac{\partial u}{\partial x_i}e^{-\gamma}dxdydt \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m}\iint\limits_{H}|a_k|u^2e^{-\gamma}dxdydt$$

са сходящи, защото $u(x, y, t)\in V_{\varphi}$ (съответно $u(x, y, t)\in V_{\varphi_p}$) и $|a_k|\leq M$, съответно $|a_k|\leq M(|x|^{\frac{1}{p}}+|y|)$. Следователно, като оставим R да клони към безкрайност, от (66) получаваме

$$\iint\limits_{H} u^2e^{-\gamma}dxdydt\leq 0, \quad \text{т. е. } u\equiv 0,$$

защото интегралите вдясно клонят към нула. С това теоремите за единственост са доказани.

Ще отбележим, че при $p=1$ теорема 2 ни дава теорема за съществуване и единственост на решение на задачата на Коши за уравнението

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+f(x, y, t), \quad a=\text{const}>0,$$

на Брауновото движение във фазовото пространство.

Постъпила на 21. XI. 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogoroff A., Zufällige Bewegungen, Ann. of Math., **35**, 1, 1934, 116—117.
2. Kolmogoroff A., Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse, Math. Ann., **108**, 1937, 150—159.
3. Пискунов Н. С., Краевые задачи для уравнения эллиптико-параболического типа, Мат. сб. **7**, 1940, 385—424.
4. Piskounoff N. S., Solution du premier problème au limites pour l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ $a_1\frac{\partial u}{\partial x}+a_2\frac{\partial u}{\partial y}+a_3\frac{\partial u}{\partial t}+Su+f$, Мат. сб., **1**, 1936, 936—952.
5. Генчев Т., Об ультрапараболических уравнениях, ДАН СССР, **151**, 2, 1963, 265—268.
6. Генчев Т., Върху задачите на Дирихле и Коши за ултрапараболичните уравнения, Год. на Соф. унив., Мат. фак., **57**, 1962/63, 9—40.
7. Генчев Т., О задаче Коши для общего ультрапараболического уравнения, Докл. БАН, **17**, № 7, 1964, 609—612.
8. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V, Москва, 1959.
9. Friedman A., Boundary Estimates for Second Order Parabolic Equations and Their Applications, Journ. of Math. and Mech. **7**, No. 5, 1958, 771—791.
10. Ильин А. М., А. С. Калашников, О. А. Олейник, Линейные уравнения второго порядка параболического типа, Усп. мат. наук, XVII, 1962, 3—146.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОБЩЕГО УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Т. Генчев

(Резюме)

В этой работе рассматривается уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

$$+\sum_{k=1}^{m} a_k(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial y_k}+b(x,y,t)\,u+f(x,y,t),$$

где $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\alpha_i\alpha_j \geq \mu\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$, $\mu=\mathrm{const}>0$. Это уравнение мы будем называть ультрапараболическим. В работе доказываются две теоремы о существовании и единственности обобщенного решения задачи Коши для уравнения (1). При этом выясняется, что класс корректности задачи Коши для уравнения (1) сильно отличается от соответствующего класса для параболического уравнения. Частным случаем одной из наших теорем является теорема существования и единственности обобщенного решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+f(x,y,t),\quad a=\mathrm{const}>0$$

броуновского движения в фазовом пространстве.

ON CAUCHY'S PROBLEM FOR THE GENERAL ULTRAPARABOLIC EQUATION

T. Genchev

(*Summary*)

The present paper deals with Cauchy's problem for the equation

$$(1) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{dt}$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial y_k} \quad b(x, y, t) u \quad f(x, y, t)$$

where $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \alpha_i \alpha_j \quad \mu \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$, $\mu = \text{const} > 0$ which is called ultraparabolic.

The author proves some theorems about the existence and uniqueness of weak solutions of Cauchy's problem for (1). It is shown that the class of functions in which the problem is correct is essential different from the correctness class of Cauchy's problem for the parabolic equations.

A particular case of these theorems is a theorem for existence and uniqueness of the weak solution for the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial y_i} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + f(x, y, t), \quad a = \text{const} > 0$$

of the Brownean motion.