БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ — ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) VIII

КОНФОРМНО ИЗОБРАЖЕНИЕ МЕЖДУ ПРАВОЛИНЕЙНИ ПОВЪРХНИНИ

Рангел Кръстев

В [2] Б. Петканчин прави класификация на роевете прави. Като използуваме получените от него резултати, ще дадем някои необходими и достатъчни условия за конформност между праволинейни повърхнини.

По-подробно ще разгледаме конформното изображение между праволинейни повърхнини, образувани от обикновени неизотропни роеве. За повърхнините, образувани от останалите роеве, ще дадем само условията за конформност, изведени при същите условия (условията в първата теорема). Разглеждаме винаги две повърхнини, образувани от роеве от един и същ тип.

Т е о р е м а. Нека σ е естественият параметър на роя, а v е ориентираното разстояние от централната точка z на правата, върху която лежи точка x от повърхнината, до самата точка x. Необходимото и достатъчно условие съответствието $\sigma=\sigma$ и $v=v$ между две праволинейни повърхнини, образувани от роеве прави от типа АА), да бъде конформно, е между инвариантите на роевете да съществуват зависимостите $\bar{a}=a$, $c^2=c^2$.

Н е о б х о д и м о с т. Нека роят прави е дефиниран в някаква едносвързана област. e, g и h са единичните вектори на триедъра на Френе. Формулите на Френе са

$$z'=ae+ch,\ e'=g,\ g'=-e+\alpha h,\ h'=-\alpha g$$

с инварианти

$$a=(ez'),\ c=(ee'z'),\ \alpha=(ee'e'').$$

Повърхнините, образувани от роевете, имат следните векторни уравнения

$$x=z+ve,\ x=z+ve.$$

За първи параметър върху повърхнините приемаме естествения параметър на роя $\sigma=u$ $(\sigma=\bar{u})$, а за втори $v\,(v)$. За горните повърхнини намираме

$$x_u=ae+ch+vg,\ x_v=e,$$

$$E=x_u^2=a^2+c^2+v^2,\ F=x_ux_v=a,\ G=x_v^2=e^2=1,$$

$$\bar{E}=a^2+c^2+v^2,\ F=a,\ G=1.$$

Нека инвариантите на първия рой означим с a, c, α, σ, а тези на втория с a, c, α и σ. Понеже върху двете повърхнини сме въвели такива параметри, че за съответните точки имаме $\bar{\sigma}=\sigma$ и $v=v$, то условието за конформност между повърхнини

$$E=\varrho E,\ F=\varrho F,\ G=\varrho G$$

става

$$a^2\quad c^2-v^2=\varrho\,(a^2+c^2+v^2),\ a=\varrho a,\ 1=\varrho 1.$$

Оттук следва, че $\varrho=1$, $a=a$ и понеже $v=v$, то и $c^2=c^2$.

Достатъчност. От това, че $\bar{a}=a$ и $c^2=c^2$, следва, че $\varrho=1$. Следователно $G=G$, $F=F$ и $E=E$. С това теоремата е доказана.

Полученото съответствие е и изометрия. На него може да се даде следното геометрично тълкуване: на права от едната повърхнина е съответна права от другата повърхнина, на точка от централната крива на първия рой е съответна точка от централната крива на другия рой. Това се вижда от уравненията на повърхнините и съответствието.

Теоремата може да се формулира и така: изображението $\sigma=\sigma$ и $\bar{v}=v$ между две праволинейни повърхнини, образувани от роеве прави от типа AA), е само тогава конформно, когато между инвариантите на роевете съществуват зависимостите $a=a$ и $c^2=c^2$.

Следвайки същия път, можем да получим и по-сложни конформни съответствия при съответни условия. Такова е например съответствието $\sigma=\sigma$ и $v=v(v)$. При него условията за конформност са

$$a=\frac{d\bar{v}}{dv}a,\ \ c^2+v^2=\left(\frac{dv}{dv}\right)^2(c^2+v^2).$$

Тук различаваме два случая:

1. $a\neq 0$ и $a\neq 0$. Тогава $\dfrac{dv}{dv}=k\neq 0\ (k=\mathrm{const})$, защото a и a не зависят от v. Съответствието следователно е $\bar{\sigma}=\sigma$ и $v=kv\quad k_1\ (k_1=\mathrm{const}=0)\ a=ka,\ c^2=k^2c^2$.

2. $a=a=0$. В този случай съответствието е

$$\sigma=\sigma,\qquad \sqrt{c^2+v^2}=k\,(\bar{v}+\sqrt{c^2+\bar{v}^2}\ ),$$

когато c и c са постоянни ($k=\mathrm{const}$).

За конформното изображение между останалите еднотипни праволинейни повърхнини, както казахме, ще дадем само условията за конформност при същите предположения като тези в горната теорема. Сведения за роевете, формулите им на Френе и вида на инвариантите не ще дадем. Тях читателят може да намери подробно изложени в [2] и [3].

И така за праволинейни повърхнини, образувани от роеве, условието за конформност е, както следва:

AB111) $\bar{a}\quad a$:

AB1221) изображението е конформно винаги;

AB121) $\bar{\lambda}=\lambda$;

AB21) $\bar{a}=a$;

BA1) $\overline{\eta\beta}=\eta\beta,\ \bar{a}^2=a^2,\ \bar{\gamma}^2=\gamma^2$;

BA21) $\overline{PQ}=\overline{P}\overline{Q},\ Q^2=\bar{Q}^2$;

BA22) $\bar{Q}^2=Q^2\ (\bar{e}'^2=e'^2)$

BB111) $\varrho^2=\bar{\varrho}^2,\ \bar{Q}^2=Q^2, (\bar{e}'^2=e'^2), (\bar{z}^2=z'^2)$;

BB112) $Q^2=\bar{Q}^2,\ (e'^2=\bar{e}'^2)$;

BB12211) изображението е конформно винаги;

AB1122) изображението е конформно винаги;

AB122) изображението е конформно винаги;

AB22) $(\bar{x}_1\bar{e})=(x_1e)$;

(горните съответствия са и изометрии);

BB2111) $(pz')=\varrho(\overline{p}\overline{z}')$;

BB12212) $\bar{p}'^2=\varrho p'^2$;

BB1222) $\bar{p}_1^2=\varrho p_1^2$;

BB2112) $(\bar{z}'\bar{p})=\varrho(z'p)$;

BB212) $(\bar{z}_1\bar{p})=\varrho(z_1p)$;

BB22) $\bar{x}_1^2=\varrho x_1^2$;

При $\varrho=1$ последните съответствия са изометрии.

За повърхнините, образувани от роеве прави с изотропни дирекционни равнини [3], условието за конформност е

$$\bar{Q}=Q.$$

Аналогично може да се приложи и първият критерий за конформност за праволинейни повърхнини. Така за две праволинейни повърхнини от типа AB1121) ще потърсим съответствие от вида $\bar{\sigma}=\sigma$, $\bar{v}=\bar{v}(\sigma,v)$. Инвариантите на повърхнините са

$$\bar{E}=2\bar{v},\ \bar{F}=0,\ \bar{G}=1;\ E=2v,\ F=0,\ G=1.$$

Условието за конформност става

$$2v+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right)^2=\varrho 2v,\quad \frac{\partial v}{\partial v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\sigma}=0,\quad \left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{v}}\right)^2=\varrho.$$

Оттук заключаваме, че

$$\frac{\partial v}{\partial\sigma}=0,\ \varrho=\frac{\bar{v}}{v},\ \bar{v}=(\sqrt{v}+\mathrm{const})^2.$$

И така съответствието $\bar{\sigma}=\sigma$, $\bar{v}=(\sqrt{v}+\mathrm{const})^2$ е конформно с функция $\varrho=\frac{1}{v}(\sqrt{v}+\mathrm{const})^2$.

Подобни разглеждания могат да се направят и за повърхнини, образувани от други роеве. Могат да се намерят и условията за конформност между праволинейни повърхнини от различни типове.

Направените разглеждания дават възможност да направим един друг интересен извод. Нека между две праволинейни повърхнини от един и същ тип съществува конформното изображение $\sigma=\sigma$ и $v=v$. Тогава:

1. За случаите, когато съответствието е изометрия, Гаусовите кривини k и k на двете повърхнини са равни в съответните точки от повърхнини. Следователно съответните точки от повърхнините са едновременно хиперболични, елиптични или параболични ($k=k$).

2. За случаите BB2111), BB2112) и BB212) Гаусовите кривини са равни на нула ($k=k=0$), което ще рече, че целите повърхнини са параболични и следователно и съответните точки от повърхнините са едновременно параболични.

3. За случаите BB12212) и BB1222) Гаусовите кривини са едновременно $\bar{k}=\infty$, $k=\infty$.

4. В случая BB22) Гаусовите кривини са едновременно неопределени $k=\frac{0}{0}$, $k\ \frac{0}{0}$

Постъпила на 9. I. 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Петканчин Б., Диференциална геометрия, София, 1955.
2. Петканчин Б., Върху диференциалната геометрия на холоморфните роеве прави, Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак. **40,** кн. 1 (мат. и физ.) 1943/44, 261—347, и **41,** кн. 1 (мат. и физ.) 1944/45, 1—25.
3. Петканчин Б., Върху централната крива на един рой прави с изотропна дирекционна равнина. Год. на Физ.-мат. фак. **47,** кн. 1 (мат. и физ.), ч. **I,** 1950/52, 107—135

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Р. Крыстев

(*Резюме*)

В [2] Б. Петканчин проводит классификацию линейчатых поверхностей. Используя полученные им результаты, автор указывает некоторые необходимые и достаточные условия для конформности между линейчатыми поверхностями.

Для каждого типа линейчатых поверхностей можно доказат теорему конформности. В настоящей работе доказывается теорема для линейчатых поверхностей типа AA). Для остальных типов линейчатых поверхностей приводятся лишь условия конформности при тех же предположениях, как и в первой теореме.

Итак, доказывается следующая теорема:

Пусть σ естественный параметр семейства, а v — ориентированное расстояние от центральной точки z прямой, на которой лежит точка x поверхности, до точки x. Необходимым и достаточным условием, чтобы соответствие $\bar{\sigma}=\sigma$ и $\bar{v}=v$ между двумя линейчатыми поверхностями типа AA) было конформным, является выполнение зависимостей $\bar{a}=a$ и $\bar{c}^2=c^2$.

CONFORMAL MAPPING BETWEEN RULED SURFACES

R. Krăstev

(*Summary*)

B. Petkanchin gives in [2] a classification of the 1-parametric systems of straight-lines. Using his results we are giving some necessary and sufficient conditions, a correspondence between ruled surfaces to be conformal.

For every type of the 1-parametric systems such conditions may be formed. We are proving a corresponding theorem for the type AA). For the resting types we are giving only the conditions under the same assumptions as in the first theorem.

So we are proving the following:

Theorem: Let σ be the natural parameter of the system and v the oriented distance from the central point z of the straight-line on which is lying the point x of the surface to the said point. The necessary and sufficient conditions, the correspondence $\bar{\sigma}=\sigma$ and $\bar{v}=v$, between two ruled line surfaces formed by two systems of type AA), to be conformal is the existence of the equations $\bar{a}=a$, $\bar{c}^2=c^2$ between the invariants of the systems.