БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

# РЕШЕНИЕ ПОЛИЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЫКНОВЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

**Д. Манжерон и Л. Е. Кривошеин**

В ряде заметок авторов [1—5$_1$] рассматривались вопросы существования, единственности и аппроксимации решений билокальной и интегральной краевых задач для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений (и.-д.у.) в обыкновенных производных. В настоящей статье строятся преимущественно решения полилокальной краевой задачи для и.-д.у. (1.2), (1.34). При решении этих задач мы широко пользуемся методом интегральных уравнений, которые строятся с помощью специально предложенных интегральных преобразований. Установлены некоторые условия существования единственного решения, устойчивого относительно малых возмущений известных величин, входящих в краевые условия и исходные уравнения. Приближенные решения наших задач строятся с помощью полиномов Л. В. Канторовича и С. Н. Бернштейна, а также применением квадратурных формул, дифференцирования по параметру и методом линеаризации (в случае наличия в уравнении нелинейного выражения, содержащего искомую функцию) и другими путями. Отметим, что методы, используемые в настоящей статье, применимы к решению и некоторых других краевых задач.

## § 1. Существование и устойчивость решений краевых задач

1. Пусть требуется построить в области $g=\{a\leq x<b;\ \lambda_1\leq\lambda<\lambda_2\}$ $n$ раз непрерывно дифференцируемое решение[1] полилокальной краевой задачи

$$(1.1)\quad T_j[y]=\sum_{i=0}^{n-1}[a_{ij}y^{(i)}(a)+b_{ij}y^{(i)}(b)]-\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{k=1}^{\nu}c_{ijk}\,y^{(i)}(x_k)=0\quad (j=1,2,\ldots,n)$$

для линейного и.-д.у.

$$(1.2)\qquad L[y,\lambda]=f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{i=0}^{m}K_i(x,t)\,y^{(i)}(t)\,dt,$$

где $y^{(i)}$ производна $i$-ого порядка искомой функции по $x$;

[1] В дальнейшем речь будет идти только о таких решениях.

$a_{ij}, b_{ij}, c_{pjk}, a, b$ $(i=0, 1, \dots, n-1;\ p=0, 1, \dots, n;\ k=1, 2, \dots, \nu)$ — заданные числа;

$$L[y, \lambda] \equiv y^{(n)}(x)-\lambda\sum_{i=2}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x);\ a_i(x), K_j(x, t), f(x)$$

$$(i=2, 3, \dots, n;\ j=0, 1, \dots, m)-$$

заданные непрерывные функции для всех $x, t \in [a, b]$; $\lambda$ — числовой параметр; $a<x_1<x_2<\dots<x_s<b$.

Вводя функцию

$$(1.3)\qquad \varphi(x)=\sum_{i=2}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x)+\int_a^b \sum_{i=0}^{m} K_i(x, t)\, y^{(i)}(t)dt$$

и пользуясь функцией Грина $G(x, s)$ краевой задачи

$$(1.4)\qquad y^{(n)}(x)=0;\ R_j[y]\equiv\sum_{i=0}^{n-1}[a_{ij}y^{(i)}(a)+b_{ij}y^{(i)}(b)]=0\ (j=1, 2, \dots, n),$$

находим

$$(1.5)\qquad y(x)=\sum_{1}^{n} r_i y_i(x)+\int_a^b G(x, s)[f(s)+\lambda\varphi(s)]\, ds,$$

где $r_i (i=1, 2, \dots, n)$ — пока неизвестные постоянные. Очевидно, что функция (1.5) удовлетворяет уравнению (1.2) при произвольных значениях постоянных $r_i (i=1, 2, \dots, n)$. Определим величины $r_i (i=1, \dots, n)$ из условия удовлетворения функцией (1.5) краевым данным (1.1)

$$(1.6)\qquad \sum_{i=1}^{n} r_i T_j[y_i]=-T_j\left[\int_a^b G(x, s)\{f(s)+\lambda\varphi(s)\}\, ds\right]\ (j=1, 2, \dots, n).$$

Если предположить выполненным неравенство $\det\|T_j[y_i]\|\neq 0$, то из (1.6) имеем

$$(1.7)\qquad r_i=\varrho_i+\lambda\int_a^b \sigma_i(s)\varphi(s)ds\ (i=1, 2, \dots, n),$$

где $\varrho_i, \sigma_i(s)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ — известные величины. Поэтому (1.5), с учетом соотношений (1.7), примет вид

$$(1.8)\qquad y(x)=\psi(x)+\lambda\int_a^b M(x, s)\varphi(s)ds,$$

где

$$\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}\varrho_i y_i(x)+\int_a^b G(x, s)f(s)ds;\ M(x, s)\equiv G(x, s)+\sum_{i=1}^{n} y_i(x)\sigma_i(s).$$

Заменяя в (1.3) $y^{(n-i)}(x)$ и $y^{(i)}(t)$ согласно (1.8), приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=F(x), \tag{1.9}$$

где $K(x,s)$ и $F(x)$ — известные непрерывные функции для всех $x,s\in[a,b]$.

Теорема 1. Если параметр $\lambda$ не является собственным значением ядра $K(x,s)$, то краевая задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение вида

$$y(x)=\psi(x)+\lambda\int_a^b M(x,s)h(s,\lambda)ds, \tag{1.10}$$

где $h(x,\lambda)$ — непрерывное решение интегрального уравнения (1.9). Если $\lambda$ — собственное значение ранга $r$ ядра $K(x,s)$ и $a_i(x)$ $(i=1,2,\dots,r)$ — собственные функции, отвечающие собственному значению $\lambda$ ядра $K(s,x)$, то решение нашей задачи можно представить в виде (1.8) тогда и только тогда, когда имеют место равенства

$$\int_a^b a_i(x)F(x)dx=0 \quad (i=1,2,\dots,r). \tag{1.11}$$

В положительном случае имеем

$$y(x)=\psi(x)+\lambda\int_a^b M(x,s)\left[\beta_0(s,\lambda)+\sum_{i=1}^{r}c_i\beta_i(s)\right]ds, \tag{1.12}$$

где $\beta_i(x)$ $(i=1,2,\dots,r)$ собственные функции, отвечающие собственному значению $\lambda$ ядра $K(x,s)$; $\beta_0(x,\lambda)$ произвольное частное решение уравнения (1.9).

Замечания. 1. Теорема 1 имеет место и в том случае, когда функции $K_i(x,s)$ обладают свойством

$$K_i(x,s)=\begin{cases}K_{i0}(x,s)\quad 0, & a\le s\le x\le b,\\ 0, & a\le x\le s\le b.\end{cases} \tag{1.13}$$

2. Если для всех $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$ выполняется неравенство

$$\lambda<1:\max_{[a,b]}\int_a^b K(x,s)|\,ds, \tag{1.14}$$

то задача (1.1), (1.2) имеет единственное $n$ раз непрерывно дифференцируемое для всех $x\in[a,b]$ решение, представимое формулой (1.10).

3. Если $c_{ijk}=0$ $(i=0,1,\dots,n\;\;2;\; j=1,2,\dots,n;\; k=1,2,\dots,\nu)$, то в (1.5) $r_j=0$ $(j=1,2,\dots,n)$.

Пусть известные коэффициенты из (1.1) и (1.2) подвергаются некоторым возмущениям, в результате чего мы приходим к задаче

$$(1.15)\qquad T_{j1}[z]\equiv\sum_{i=0}^{n-1}[a_{ij1}z^{(i)}(a)+b_{ij1}z^{(i)}(b)-\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{k=1}^{\nu}c_{ijk1}z^{(i)}(x_k)=0\ (j=1,2,\ldots,n),$$

$$(1.16)\qquad L_1[z,\lambda]=f_1(x)+\lambda\int_a^b\sum_{i=0}^{m}K_{i1}(x,t)z^{(i)}(t)dt.$$

Тогда, пользуясь тем же методом, что и при построении системы интегральных уравнений (1.8), (1.9), получим

$$(1.17)\qquad z(x)=\psi_1(x)+\lambda\int_a^b M_b(x,s)\varphi_1(s)ds,$$

$$(1.18)\qquad \varphi_1(x)-\lambda\int_a^b K_b(x,s)\varphi_1(s)ds=F_1(x).$$

Оценим близость функций $y=y(x)$ и $z=z(x)$ для всех $x\in[a,b]$. С этой целью предположим, что $\lambda$ не является собственным значением ядер $K(x,s)$, $K_b(x,s)$. Тогда

$$\varphi(x)-\varphi_1(x)=F(x)-F_1(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)[\varphi(s)-\varphi_1(s)]ds$$

$$+\lambda\int_a^b[K(x,s)-K_b(x,s)]\varphi_1(s)ds,$$

$$(1.19)\qquad \varphi(x)-\varphi_1(x)=\Delta(x,\lambda)+\lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)\Delta(s,\lambda)ds\equiv\mu(x,\lambda),$$

где $R(x,s,\lambda)$ — резольвента ядра $K(x,s)$;

$$\Delta(x,\lambda)\equiv F(x)-F_1(x)+\lambda\int_a^b[K(x,s)-K_b(x,s)]\varphi_1(s)ds.$$

$$|y(x)-z(x)|\le|\psi(x)-\psi_1(x)|+|\lambda|\int_a^b[|M(x,s)|\,|\varphi(s)-\varphi_1(s)|$$

$$+|M(x,s)-M_b(x,s)|\,|\varphi_1(s)|]ds=|\psi(x)-\psi_1(x)|+\int_a^b|\lambda[M(x,s)$$

$$-M_b(x,s)]\varphi_1(s)|\,ds+\int_a^b|\lambda M(x,s)\mu(s,\lambda)|\,ds.$$

Поэтому, если

$$|\psi(x)-\psi_1(x)|<\varepsilon:3;\quad M(x,s)-M_b(x,s)<\varepsilon:\left[3\max_g\int_a^b|\lambda\varphi_1(s)|\,ds\right];$$

(1.20) $$|\mu(x,\lambda)|<\varepsilon:\left[3\max_g\int_a^b \lambda M(x,s)|\,ds\right],\ x,\lambda\in g=\{a\le x,\ s\le b;\ \lambda_1\le\lambda\le\lambda_2\},$$

то $y(x)-z(x)|<\varepsilon$, $x\in[a,b]$.

Теорема 2. Пусть задачи (1.1), (1.2); (1.15), (1.16) имеют в области $g$ единственные $n$ раз непрерывно дифференцируемые (по $x$) решения. Тогда для того, чтобы на сегменте $[a,b]$, $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$, функция $z(x)$ уклонялась от функции $y(x)$ не более, чем на $\varepsilon>0$, достаточно, чтобы выполнялись неравенства (1.20).

Если оценка величины $|\mu(x,\lambda)$ неизвестна, то в этом случае вместо формулы (1.19) можно воспользоваться выражением

(1.21) $$\psi(x)-\varphi_1(x)=F(x)-F_1(x)+\lambda\int_a^b[K(x,s)-K_b(x,s)]\varphi(s)ds+\lambda\int_a^b R_1(x,t,\lambda)\Big\{F(t)-F_1(t)+\lambda\int_a^b[K(t,s)-K_b(t,s)]\varphi(s)ds\Big\}dt\equiv F_2(x,\lambda)+\lambda\int_a^b M_1(x,t,\lambda)\varphi(t)dt,$$

где $R_1(x,t,\lambda)$ — резольвента ядра $K_b(x,t)$. Предполагая выполненным неравенство

(1.22) $$l=1-\max_g\int_a^b \lambda M_1(x,s,\lambda)\ ds>0,$$

из (1.21) находим

(1.23) $$\max_{[a,b]}\ \varphi(x)|\le\max_g|\varphi_1(x)+F_2(x,\lambda)\ :l=l_1.$$

Поэтому

$$|\varphi(x)-\varphi_1(x)|\le|F_2(x,\lambda)|+l_1\int_a^b|\lambda M_1(x,s,\lambda)\ ds\equiv S(x,\lambda);$$

(1.24) $$|y(x)-z(x)\quad \psi(x)-\psi_1(x)+\lambda\int_a^b[M(x,s)-M_b(x,s)]\psi_1(s)ds+\int_a^b|\lambda M(x,s)|\,S(s,\lambda)\,ds.$$

Следовательно, если

(1.25) $$\max_g\ \psi(x)-\psi_1(x)+\lambda\int_a^b[M(x,s)-M_b(x,s)]\psi_1(s)ds<\varepsilon:3,$$

$$(1.26)\qquad \max_g \int_a^b |\lambda M(x,s)|\, S(s,\lambda)ds < \varepsilon : 2,$$

то

$$|y(x)-z(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a,b].$$

Теорема 3. Для того, чтобы задача (1.1), (1.2) имела устойчивое относительно малых возмущений известных величин из (1.1), (1.2) решение, достаточно, чтобы выполнялись неравенства (1.22), (1.25), (1.26).

Пусть неравенство (1.22) не имеет места. Тогда из (1.21) находим

$$(1.27)\qquad \varphi(x) = F_3(x,\lambda,\varphi) + \lambda \int_a^b M_2(x,t,\lambda)\varphi(t)dt,$$

где

$$F_3(x,\lambda,\varphi) \equiv \varphi_1(x) + F_2(x,\lambda) + \lambda \int_a^b M_3(x,t,\lambda)\varphi(t)dt,$$

$$M_2(x,t,\lambda) + M_3(x,t,\lambda) \equiv M_1(x,t,\lambda).$$

Подберем ядро $M_2(x,t,\lambda)$ так, чтобы для него была известна резольвента $R_2(x,t,\lambda)$. Тогда

$$(1.28)\qquad \varphi(x) = F_3(x,\lambda,\varphi) + \lambda \int_a^b R_2(x,t,\lambda)F_3(t,\lambda,\varphi)dt \equiv F_4(x,\lambda)$$

$$+\lambda \int_a^b M_4(x,t,\lambda)\varphi(t)dt.$$

Если

$$l_2 = 1 - \max_g \int_a^b |\lambda M_4(x,t,\lambda)|\, dt > 0,$$

то

$$|\varphi(x) - \varphi_1(x)| \leq |F_3(x,\lambda)| + l_3 \int_a^b |\lambda M_1(x,s,\lambda)|\, ds \equiv A_1(x,\lambda)$$

и поэтому

$$|y(x) - z(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi_1(x)| + \left|\lambda \int_a^b [M(x,s) - M_b(x,s)]\varphi_1(s)ds\right|$$

$$+ \int_a^b |\lambda M(x,s)|\, A_1(s,\lambda)ds, \quad x,\lambda \in g.$$

Сходным представлением можно воспользоваться и для ядра $M_4(x,t,\lambda)$.

Замечание. При построении системы интегральных уравнений вида (1.8), (1.9) можно использовать функцию Грина $G(x,s,\lambda)$ краевой задачи

$$(1.30)\quad L_1[y,\lambda]\equiv y^{(n)}(x)-\lambda\sum_{i=2}^{n}{}' c_i(x)\,y^{(n-i)}(x)=0,\ R_j[y]=0\ (j=1,2,\ldots,n),$$

где $c_i(x)$ $(i=1, 2,\ldots, n)$ — известные непрерывные функции для всех $x\in[a,b]$. С этой целью положим

$$(1.31)\qquad \varphi(x)\equiv\sum_{i=2}^{n}{}'[a_i(x)-c_i(x)]\,y^{(n-i)}(x)+\int_a^b\sum_{i=0}^{m}{}'K_i(x,t)\,y^{(i)}(t)dt.$$

Тогда

$$(1.32)\qquad y(x)=\sum_{i=1}^{n}{}' r_i(\lambda)\,y_i(x,\lambda)+\int_a^b G(x,s,\lambda)[f(s)+\lambda\varphi(s)]ds,$$

где $y_i(x,\lambda)$ $(i=1, 2,\ldots, n)$ — фундаментальная система решений уравнения $L_1[y,\lambda]=0$.

Пусть величины

$$(1.33)\qquad r_i(\lambda)=\varepsilon_i(\lambda)+\lambda\int_a^b g_i(s,\lambda)\varphi(s)ds\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

найдены из системы

$$\sum_{i=1}^{n}r_i(\lambda)T_j[y_i(x,\lambda)=-\int_a^b T_j[G][f(s)+\lambda\varphi(s)]ds\ \ (j=1,2,\ldots,n).$$

Тогда, вставляя (1.33) в (1.32), а полученный результат — в (1.31), приходим к следующей системе интегральных уравнений:

$$y(x)=\Phi_1(x,\lambda)+\lambda\int_a^b G_1(x,s,\lambda)\varphi(s)ds,$$

$$\varphi(x)=\Phi_2(x,\lambda)+\lambda\int_a^b G_2(x,s,\lambda)\varphi(s)ds,$$

где $\Phi_i(x,\lambda)$, $G_i(x,s,\lambda)$ $(i=1,2)$ — известные непрерывные функции для всех $x,\lambda\in g$. В дальнейшем эту систему можно положить в основу для анализа и аппроксимации решения задачи (1.1), (1.2).

2. В этом пункте рассмотрим вопрос о решении краевой задачи (1.1) для нелинейного и.-д.у.

$$(1.34)\qquad L[y,\lambda]=f(x)+\lambda\int_a^b D(x,t)\,f_1[t,y(t)]dt,$$

где $f_1[t_1,y(t)]$, $D(x,t)$ непрерывные по совокупности своих аргументов нелинейные функции.

Введем вспомогательную функцию

$$(1.35)\qquad \varphi_1(x)\equiv\sum_{i=2}^{n}a_i(x)\,y^{(n-i)}(x).$$

Тогда

$$(1.36)\qquad y(x)=\sum_{i=1}^{n}r_i\,y_i(x)+\int_a^b G(x,s)\left[f(s)+\lambda\varphi_1(s)+\lambda\int_a^b D(s,t)f_1[t,y(t)]dt\right]ds,$$

причем для определения постоянных $r_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ имеем систему

$$(1.37)\qquad \sum_{i=1}^{n}r_iT_j[y_i]=-T_j\left\{\int_a^b G(x,s)\left[f(s)+\lambda\varphi_1(s)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda\int_a^b D(s,t)f_1[t,y(t)]dt\right]ds\right\}\quad (j=1,2,\ldots,n).$$

Если $\det|T_j[y_i]|\neq 0$, то из (1.37) находим

$$(1.38)\qquad r_i=\varrho_i+\lambda\int_a^b\gamma_i(s)\left\{\varphi_1(s)+\int_a^b D(s,t)f_1[t,y(t)]dt\right\}ds\quad (i=1,2,\ldots,n),$$

где $\varrho_i$, $\gamma_i(s)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ — известные величины.

Поэтому (1.36), с учетом (1.38), примет вид

$$(1.39)\qquad y(x)=\psi(x)+\lambda\int_a^b\left\{N_1(x,s)\varphi_1(s)+N_2(x,s)f_1[s,y(s)]\right\}ds,$$

где $\psi(x)$, $N_1(x,s)$, $N_2(x,s)$, $x,s\in[a,b]$ — известные функции. Вставляя (1.39) в (1.35), приходим к следующему уравнению:

$$(1.40)\qquad \varphi_1(x)-\lambda\int_a^b N(x,s)\varphi_1(s)ds=\Phi(x)+\lambda\int_a^b N_3(x,t)f_1[t,y(t)]dt,$$

где $N(x,s)$, $N_3(x,t)$, $\Phi(x)$ — известные непрерывные функции для всех $x,s,t\in[a,b]$. Следовательно, если $\lambda$ не является собственным значением ядра $N(x,s)$, то из (1.40) получаем

$$(1.41)\qquad \varphi_1(x)=\Phi(x)+\lambda\int_a^b N_3(x,t)f_1[t,y(t)]dt+\lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)\left\{\Phi(s)\right.$$

$$\left.+\lambda\int_a^b N_3(s,t)f_1[t,y(t)]dt\right\}ds=\Phi_1(x,\lambda)+\lambda\int_a^b N_4(x,t,\lambda)f_1[t,y(t)]dt,$$

где $R(x,s,\lambda)$ — резольвента ядра $N(x,s)$. Благодаря этому, (1.39) примет вид нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна:

$$(1.42)\qquad y(x)=\psi_2(x,\lambda)+\lambda\int_a^b N_5(x,t,\lambda)f_1[t,y(t)]dt.$$

Решение интегрального уравнения (1.42) иногда удается найти [16], если учесть, что некоторые решения функционального уравнения

$$(1.43)\qquad v(x)=\psi_2(x,\lambda)+\lambda f_1[x,\,v(x)]\int_a^b N_5(t,\,x,\,\lambda)dt$$

являются также решениями уравнения (1.42). Тогда функция

$$(1.44)\qquad \psi_2(x,\lambda)+\lambda\int_a^b N_5(x,\,t,\,\lambda)f_1[t,v(t,\lambda)]dt$$

— решение задачи (1.1), (1.34)[1].

Если $v=v(x,\lambda)$ не является решением уравнения (1.42), но функция $f_1[x,u(x)]$ удовлетворяет в области $D$ условию Липшица с коэффициентом $\varrho(x)$

$$(1.45)\qquad |f_1[x,u_2(x)]-f_1[x,u_1(x)]|\leq\varrho(x)\,|u_2(x)-u_1(x)|$$

и в области $g$ выполняется неравенство

$$(1.46)\qquad l_4=1-\max_g\int_a^b|\lambda N_5(x,t,\lambda)|\,\varrho(t)dt>0,$$

то последовательность

$$(1.47)\qquad \{z_k(x)\}_1^\infty\equiv\left\{\psi_2(x,\lambda)+\lambda\int_a^b N_5(x,t,\lambda)f_1[t,z_{k-1}(t)]dt\right\}_1^\infty$$

сходится для всех $x,\lambda\in g$ абсолютно и равномерно к решению задачи (1.1), (1.34).

Теорема 4. Если: 1) $\lambda$ не является собственным значением для $N(x,s)$ и известна резольвента этого ядра; 2) функция $f_1(x,y)$ в области $D$ удовлетворяет условию Липшица (1.45) с коэффициентом $\varrho(x)$; 3) в области $g$ имеет место неравенство (1.46), то задача (1.1), (1.34) имеет единственное $n$ раз непрерывно дифференцируемое решение, которое можно построить методом последовательных приближений Пикара.

Замечание. Если $\lambda$ является собственным значением ранга $r$ ядра $N(x,s)$, то для построения уравнения вида (1.40) можно воспользоваться функцией Грина задачи (1.30) с таким расчетом, чтобы $\lambda$ не являлось собственным значением ядра при функции $\varphi_1(x)$.

Выполнение неравенств (1.45), (1.46) достаточно для устойчивости решения задачи (1.1), (1.34) относительно малых возмущений функций $\psi_2(x,\lambda)$

[1] Если $v=v(x,\lambda)$ обладает на $g$ непрерывными производными по $x$ вплоть до $n$-го порядка, то нет необходимости в построении функции (1.44), т. к. теперь $v=v(x,\lambda)$ — решение задачи (1.1), (1.34).

и $N_5(x,t,\lambda)$. Действительно, с этой целью рассмотрим вместо уравнения (1.42) следующее уравнение:

$$(1.48)\qquad z(x)=\psi_3(x,\lambda)+\lambda\int_a^b N_6(x,t,\lambda)f_1[t,z(t)]dt,$$

где предполагается, что мы можем оценить величину $|f_1[x,z(x)]|$, $x,z\in D$. Тогда

$$|y(x)-z(x)|\leqq|\psi_2(x,\lambda)-\psi_3(x,\lambda)+\lambda\int_a^b[N_5(x,t,\lambda)-N_6(x,t,\lambda)]f_1[t,z(t)]dt|$$

$$+\int_a^b|\lambda N_5(x,t,\lambda)[y(t)-z(t)]|\varrho(t)dt.$$

Из последнего выражения находим

$$\max_{[a,b]}|y(x)-z(x)|\leqq\max_g|\psi_2(x,\lambda)-\psi_3(x,\lambda)$$

$$+\lambda\int_a^b[N_5(x,t,\lambda)-N_6(x,t,\lambda)]f_1[t,z(t)]dt|:l_4.$$

Пусть

$$\max_g|\psi_2(x,\lambda)-\psi_3(x,\lambda)|\leqq\delta_1,\quad \max_D|f_1[x,z(x)]|\leqq\delta_2,$$

$$(1.49)\qquad \max_g\int_a^b|\lambda[N_5(x,t,\lambda)-N_6(x,t,\lambda)]|dt\leqq\delta_3.$$

Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ достаточно указать $\delta_1<\varepsilon l_4:2$, $\delta_3<\varepsilon l_4:(2\delta_2)$, чтобы $|y(x)-z(x)|<\varepsilon$, $x\in[a,b]$.

Пусть малым возмущениям[1] подвергается функция $f[t,y(t)]$ и пусть $z_1(x)$ — решение интегрального уравнения

$$(1.50)\qquad z_1(x)=\psi_2(x,\lambda)+\lambda\int_a^b N_5(x,t,\lambda)f_2[t,z_1(t)]dt.$$

Из (1.42) и (1.50) получаем

$$|y(x)-z_1(x)|\leqq\int_a^b|\lambda N_5(x,t,\lambda)\{f_1[t,y(t)]-f_2[t,z_1(t)]\}|dt$$

$$<\int_a^b\{|\lambda N_5(x,t,\lambda)||y(t)-z_1(t)|\varrho(t)+|\lambda N_5(x,t,\lambda)[f_1[t,z_1(t)]-f_2[t,z_1(t)]]|\}dt;$$

[1] Малым в том смысле, что $|f_1[x,z_1(x)]-f_2[x,z_1(x)]|<\delta$, $x,z_1(x)\in D$.

$$\max_{[a,b]} |y(x)-z_1(x)| \leq \max_{g} \int_a^b |\lambda N_5(x,t,\lambda)\{f_1[t,z_1(t)]-f_2[t,z_1(t)]\}|\,dt : l_4 < r\delta : l_4,$$

где $r=\max_{g}\int_a^b |\lambda N_5(x,t,\lambda)|\,dt$. Таким образом, если $\delta<\varepsilon l_4 : r$, то $|y(x)-z_1(x)|<\varepsilon$, $x\in[a,b]$.

Теорема 5. Если: 1) задача (1.1), (1.34) имеет единственное ограниченное $n$ раз непрерывно дифференцируемое решение для всех $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$, $x\in[a,b]$; 2) функция $f_1[x,y(x)]$ удовлетворяет в области $D$ условию Липшица с коэффициентом $\varrho(x)$ и 3) выполняется неравенство (1.46), то функция $y=y(x)$ устойчива относительно малых возмущений $\psi_2(x,\lambda)$ и $N_5(x,t,\lambda)$.

Теорема 6. Если выполнены условия 1)—3) предыдущей теоремы и в области $D$ имеет место неравенство (1.49), то решение задачи (1.1), (1.34) устойчиво в области $D_1=\{D,\lambda_1\leq\lambda\leq\lambda_2\}$ относительно малых возмущений функции $f_1[x,y(x)]$.

Замечание. Изложенными выше путями можно решать задачу[1]

$$(1.51)\qquad \sum_{i=0}^{n-1}\left[a_{ij}y^{(i)}(a)-\sum_{k=1}^{r}c_{ijk}y^{(i)}(x_k)+b_{ij}y^{(i)}(b)\right]=0\quad (j=1,2,\ldots,n)$$

для и.-д.у. (1.2), (1.34), только теперь функции $M(x,t)$, $K(x,t)$, $N(x,t)$, $N_3(x,t)$ будут иметь разрывы 1-го рода на линии $x=t$.

3. Укажем еще один путь анализа задачи (1.1), (1.2). С этой целью будем искать решение нашей задачи в виде

$$(1.52)\qquad y(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i y_i(x)+\int_a^x H(x,t)h(t)dt,$$

где $c_1,\ldots,c_n$ — пока неизвестные постоянные, $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ — линейно независимая $n$ раз непрерывно дифференцируемая система функций для $x\in[a,b]$; $H(x,t)$ — произвольно заданная $n$ раз непрерывно дифференцируемая (по $x$) функция типа Коши

$$(1.53)\qquad \left.\frac{\partial^i H(x,t)}{\partial x^i}\right|_{t=x}=\begin{cases}0, & i=0,1,\ldots,n-2,\\ a(x)\neq 0, & i=n-1;\ x\in[a,b];\end{cases}$$

$h(x)$ — новая неизвестная функция.

Вставляя (1.52) в (1.2), приходим к следующему интегральному уравнению:

$$(1.54)\qquad h(x)-\lambda\int_a^x P_1(x,t)h(t)dt=f_0(x)+\sum_{1}^{n}c_i f_i(x,\lambda)+\lambda\int_a^b P_2(x,t)h(t)dt,$$

где $P_1(x,t)$, $P_2(x,t)$, $f_i(x,\lambda)$, $f_0(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ — известные функции. Введем объединяющее ядро $P(x,t)$ и перепишем (1.54) в виде

[1] По нашим указаниям некоторые варианты нижеустановленных результатов изложены в одной заметке А. Опря [35].

$$h(x)-\lambda\int_a^b P(x,t)h(t)dt=f_0(x)+\sum_{i=1}^n c_i f_i(x,\lambda). \tag{1.55}$$

Из (1.55) видно, что если $\lambda$ не является собственным значением ядра $P(x,t)$, то

$$h(x)=f_0(x)+\sum_{i=1}^n c_i f_i(x,\lambda)+\lambda\int_a^b R_0(x,t,\lambda)\left[f_0(t)+\sum_{i=1}^n c_i f_i(t,\lambda)\right]dt\equiv\beta_0(x,\lambda)+\sum_{i=1}^n c_i\beta_i(x,\lambda), \tag{1.56}$$

где $R_0(x,t,\lambda)$ — резольвента ядра $P(x,t)$. Заменяя в (1.52) функцию $h(x)$ ее значением согласно (1.56), имеем

$$y(x)=z_0(x,\lambda)+\sum_{i=1}^n c_i z_i(x,\lambda), \tag{1.57}$$

где $z_i(x,\lambda)$ $(i=0,1,\ldots,n)$ — известные $n$ раз непрерывно дифференцируемые функции, $x\in[a,b]$, $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$. Функция (1.57) удовлетворяет (и.-д.у.) (1.2) при произвольных значениях $c_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Учитывая в (1.1) значение $y(x)$ согласно (1.57), приходим к следующей алгебраической системе:

$$\sum_{i=1}^n c_i a_{ij}(\lambda)=\delta_j(\lambda)\quad(j=1,2,\ldots,n), \tag{1.58}$$

где $a_{ij}(\lambda)$, $\delta_j(\lambda)$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$ — известные величины. Если $\det\|a_{ij}(\lambda)\|\neq 0$, то из (1.58) находим $c_i=r_{i0}(\lambda)$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Поэтому

$$y(x)=z_0(x,\lambda)+\sum_{i=1}^n r_{i0}(\lambda)z_i(x,\lambda) \tag{1.59}$$

— решение задачи (1.1), (1.2).

Если $\det\|a_{ij}(\lambda)\|=0$ и

1) $p_1=\operatorname{rang}\|a_{ij}(\lambda)\|\neq\operatorname{rang}\|a_{ij}(\lambda),\ \delta_j(\lambda)\|=p_2$, то решение задачи (1.1), (1.2) невозможно представить в форме (1.52);

2) $p_1=p_2=p$, то решение задачи (1.1), (1.2) можно представить в виде (1.52) но это решение определяется неоднозначно ($\lambda$ является собственным значением нашей задачи). Теперь из (1.58) получаем

$$c_i=\xi_i(\lambda)+\sum_{r=1}^k \xi_{ir}(\lambda)c_{p+r}\quad(k=n-2;\ i=1,2,\ldots,k). \tag{1.60}$$

Учитывая (1.60), из (1.52) имеем

$$y(x)=\sigma_0(x,\lambda)+\sum_{r=1}^k c_{p+r}\sigma_r(x,\lambda), \tag{1.61}$$

где $c_{p+r}$ $(r=1,2,\ldots,k)$ — произвольные постоянные.

Пусть $\lambda$ — собственное значение ранга $s$ ядра $P(x,t)$. Тогда разрешимость уравнения (1.55) будет зависеть от того, выполняются или не выполняются условия ортогональности собственных функций $m_i(x)$ $(i=1,\ldots,s)$ ядра $P(t,x)$ и свободной функции уравнения (1.55):

$$\int_a^b m_i(x)\left[f_0(x)+\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x,\lambda)\right]dx=0 \quad (i=1,2,\ldots,s). \tag{1.62}$$

Предположим, что равенства (1.62) имеют место и $n\geq s$. Из (1.62) находим

$$c_k=d_k(\lambda)+\sum_{i=1}^{n-s} c_{s+i}d_{ki}(\lambda) \quad (k=1,2,\ldots,s). \tag{1.63}$$

Учитывая (1.63), из (1.55) находим

$$h(x)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x,\lambda)+\lambda\int_a^b R_0(x,t,\lambda)\left[f_0(t)+\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t,\lambda)\right]dt \tag{1.64}$$

$$\sum_{i=1}^{s} q_i h_i(x,\lambda) \quad B_0(x,\lambda) \quad \sum_{i=1}^{k} c_{s+i}B_i(x,\lambda)+\sum_{i=1}^{s} q_i h_i(x,\lambda) \quad (k=n-s),$$

где $R_0(x,t,\lambda)$, $h_i(x,\lambda)$ $(i=1,2,\ldots,s)$ — соответственно обобщенная резольвента и собственные функции ядра $P(x,t)$, отвечающие собственному значению $\lambda$. Вставляя (1.64) в (1.52), получаем

$$y(x)=A_0(x,\lambda)+\sum_{i=1}^{k} c_{s+i}A_{s+i}(x,\lambda)+\sum_{i=1}^{s} q_i H_i(x,\lambda) \tag{1.65}$$

$$A_0(x,\lambda)+\sum_{i=1}^{n} E_i(x,\lambda)\,d_i,$$

где

$$d_i=\begin{cases} q_i & (i=1,2,\ldots,s),\\ c_{s+i} & (i=1,2,\ldots,k);\end{cases} \qquad E_i(x,\lambda)\equiv\begin{cases} H_i(x,\lambda) & (i=1,2,\ldots,s),\\ A_{s+i}(x,\lambda) & (i=1,2,\ldots,k).\end{cases}$$

Система уравнений (1.1), с учетом (1.65), примет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_{ij}(\lambda)d_i=\varepsilon_j(\lambda) \quad (j=1,2,\ldots,n), \tag{1.66}$$

где $\delta_{ij}(\lambda)$, $\varepsilon_j(\lambda)$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$, — известные величины. Поэтому, если $\det|\delta_{ij}(\lambda)|\neq 0$, то постоянные $d_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ однозначно определяются из системы (1.66). Пусть $d_i=\theta_i(\lambda)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ — решение этой системы. Тогда

$$y(x)=A_0(x,\lambda)+\sum_{i=1}^{n}\theta_i(\lambda)\varepsilon_i(x,\lambda) \tag{1.67}$$

— решение задачи (1.1), (1.2).

Если $\det \| \delta_{ij}(\lambda) \| = 0$ и $r_1 = \operatorname{rang} \| \delta_{ij}(\lambda) \| \neq \operatorname{rang} \| \delta_{ij}(\lambda), \varepsilon_j(\lambda) \| = r_2$, то решение задачи (1.1), (1.2) невозможно представить в виде (1.52). Если же $r_1 = r_2 = r$, то из (1.66) имеем

$$d_i = \omega_i(\lambda) + \sum_{p=1}^{k} \omega_{ip}(\lambda) d_{r+p} \quad (k = n - r,\ i = 1, 2, \ldots, r). \tag{1.68}$$

Следовательно,

$$y(x) = A_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{r} \left[ \omega_i(\lambda) + \sum_{p=1}^{k} \omega_{ip}(\lambda) d_{r+p} \right] E_i(x, \lambda) + \sum_{i=r+1}^{n} d_i E_i(x, \lambda) = A(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{k} d_{r+i} \sigma_i(x, \lambda), \tag{1.69}$$

где $d_{r+i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — произвольные постоянные.

Если функции $K_i(x, t)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ обладают свойством (1.13), то теперь подстановка (1.52) в (1.2) приводит к интегральному уравнению типа Вольтерра

$$h(x) - \lambda \int_a^x T(x, t)\, h(t)\, dt = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x, \lambda), \tag{1.70}$$

где $T(x, t)$, $f_0(x)$, $f_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — известные непрерывные функции в области $g$. Так как уравнение (1.70) при любом конечном $\lambda$ имеет непрерывное решение, которое мы запишем в виде

$$h(x) = s_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i s_i(x, \lambda), \tag{1.71}$$

то, заменяя в (1.52) функцию $h(x)$ ее значением согласно (1.71), получим

$$y(x) = \pi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i \pi_i(x, \lambda), \tag{1.72}$$

где $\pi_i(x, \lambda)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — известные $n$ раз непрерывно дифференцируемые функции по $x \in [a, b]$. Таким образом, если $\det \| T_j[\pi_i(x, \lambda)] \| \neq 0$, то $\lambda$ не является собственным значением нашей задачи и постоянные $c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ однозначно определяются в силу краевых условий $c_i = c_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и

$$y(x) = \pi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda) \pi_i(x, \lambda).$$

Если $r = \det \| T_j[\pi_i(x, \lambda)] \| \neq \det \| T_j[\pi_i(x, \lambda)];\ T_j[\pi_0(x, \lambda)] \| = r_2$, то решение рассматриваемой задачи нельзя представить в виде (1.52).

Если $r_1 = r_2 = p$, то решение нашей задачи можно представить в виде (1.52), но теперь оно определяется неоднозначно, так как будет содержать $n - p$ произвольных постоянных.

## § 2. Приближенное решение краевых задач

Пусть задача (1.1), (1.2) сведена к системе интегральных уравнений (1.8), (1.9). Следовательно, если $\bar{\varphi}(x,\lambda)$ — приближенное решение уравнения (1.9), то

$$(2.1)\qquad \bar{y}(x)=\psi(x)+\lambda\int_a^b M(x,s)\bar{\varphi}(s,\lambda)ds$$

— приближенное решение исходной задачи (1.1), (1.2). Функцию $\bar{\varphi}(x,\lambda)$ можно строить различными путями. Укажем несколько таких путей.

1. Представим интегральную часть в (1.9) в форме

$$(2.2)\qquad \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=\sum_{i=1}^{k}\varphi(\tau_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,s)ds+\varrho(x);\quad \tau_i\in[x_{i-1},x_i].$$

Тогда

$$(2.3)\qquad \varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{k}\varphi(\tau_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,s)ds=F(x)+\lambda\varrho(x).$$

Введем обозначения

$$(2.4)\qquad \varphi_i=\varphi(\tau_i),\quad K_{ij}=\int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x_j,s)ds;\quad \varrho_i=\varrho(x_i).$$

С учетом (2.4) получаем следующую систему алгебраических уравнений

$$(2.5)\qquad \varphi_j-\lambda\sum_{i=1}^{k}K_{ij}\varphi_i=f_j+\lambda\varrho_j\quad (j=1,2,\dots,k).$$

Поэтому, если

$$(2.6)\qquad \Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11} & -\lambda K_{21} & & -\lambda K_{k1}\\ -\lambda K_{12} & 1-\lambda K_{22} & & -\lambda K_{k2}\\ & & & \\ -\lambda K_{1k} & -\lambda K_{2k} & & 1-\lambda K_{kk}\end{vmatrix}\neq 0,$$

то из (2.5) находим

$$(2.7)\qquad \varphi_i=\sum_{j=1}^{k}(F_j+\lambda\varrho_j)\Delta_{ij}(\lambda):\Delta(\lambda),$$

где $\Delta_{ij}(\lambda)$ — известные числа. В качестве приближенного решения задачи (1.1), (1.2) возьмем функцию

$$(2.8)\qquad y_k(x)=\psi(x)+\lambda\int_a^b M(x,s)\bar{\varphi}_k(s)ds,$$

где

$$(2.9)\qquad \varphi_k(x)=F(x)+\lambda\sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i}K(x,s)ds\sum_{j=1}^{k}\Delta_{ij}(\lambda)F_j:\Delta(\lambda).$$

Предполагая выполненным неравенство (1.14), имеем

$$(2.10)\qquad |y(x)-\bar{y}_k(x)|\leq\sigma\int_a^b|\lambda M(x,s)|\,ds,\quad x,\lambda\in g,$$

где $\sigma=\max_g|a_k(x,\lambda)|:(1-\delta)$; $\delta=\max_g\int_a^b|\lambda K(x,s)|\,ds$;

$a_k(x,\lambda)$ — невязка, образованная в результате подстановки (2.9) в (1.9).

Несколько иной путь оценки погрешности можно указать, если воспользоваться идеей работы [7]. С этой целью из (2.2) имеем

$$(2.11)\qquad |\varrho(x)|=\left|\sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i}K(x,s)\,[\varphi(s)-\varphi(\tau_i)]ds\right.$$

$$=\left.\int_a^b\varphi(t)dt\sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i}K(x,s)\,[K(s,t)-K(\tau_i,t)]\,ds\right|=\left|\int_a^b T(x,t)\,\varphi(t)\,dt\right|$$

Пусть $H_1=\max_{[a,b]}|\varphi(x)|$ $H_2=\max_{[a,b]}|\varrho(x)|$;

$$H_1\leq\max_{[a,b]}|\bar{\varphi}_k(x)|+H_2|\lambda|\left[1+\sum_{i=1}^{k}\max_{[a,b]}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|K(x,s)|\,ds\sum_{j=1}^{k}|\Delta_{ij}(\lambda):\Delta(\lambda)|\right]$$

$$=H_3+|\lambda|H_2d(\lambda).$$

Тогда из (2.11) имеем

$$H_2\leq[H_3+|\lambda|H_2d(\lambda)]\max_{[a,b]}\int_a^b|T(x,t)|\,dt=[H_3+|\lambda|H_2d(\lambda)]\,c.$$

Следовательно, если

$$(2.12)\qquad l_5=1-|\lambda|\,d(\lambda)\,c>0,\quad \lambda\in[\lambda_1,\lambda_2],$$

то

$$(2.13)\qquad H_2\leq cH_3:l_5.$$

Таким образом

$$|\varphi(x)-\bar{\varphi}_k(x)|\leq|\lambda|H_3\left[1+\sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|K(x,s)|\,ds\sum_{j=1}^{k}|\Delta_{ij}(\lambda):\Delta(\lambda)|\right]c:l_5$$

$$\equiv|\lambda|\,\sigma(x,\lambda),$$

$$(2.14)\qquad |y(x)-\bar{y}_k(x)|\leq |\lambda|^2 \int_a^b |M(x,s)|\,\sigma(s,\lambda)\,ds,\quad x,\lambda\in g.$$

Замечание. Вместо формулы (2.2) можно было воспользоваться следующими представлениями:

$$(2.15)\qquad \text{a)}\ \int_a^b K(x,s)\,\varphi(s)ds=\sum_{i=1}^{k} K(x,\tau_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi(s)\,ds+\varrho(x);$$

$$(2.16)\qquad \text{b)}\ \int_a^b K(x,s)\,\varphi(s)\,ds=\sum_{i=1}^{k}\left[\varphi(\tau_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}K_a(x,s)ds\right.$$

$$\left.+K_b(x,\tau_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi(s)\,ds\right]+\varrho(x),$$

где $K(x,t)\equiv K_a(x,t)+K_b(x,t),\quad x,t\in[a,b].$

**2.** В этом пункте мы построим приближенные решения рассмотренных задач полиномиальными методами.

а) Воспользуемся тем фактом, что если функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна или кусочно непрерывна на сегменте $[0,1]$, то имеет место равенство

$$(2.17)\qquad \lim_{r\to\infty} K_r(x)=\varphi(x),$$

где

$$(2.18)\qquad K_r(x)\equiv(r+1)\sum_{i=0}^{r} T_{ri}(x)\,\varphi(i,r)$$

— полином Л. В. Канторовича [8]; $T_{ri}(x)\equiv C_r^i\,x^i(1-x)^{r-i}$;

$$(2.19)\qquad \varphi(i,r)=\int_{i:(r+1)}^{(i+1):(r+1)}\varphi(s)ds.$$

Таким образом $K_r(x)\approx\varphi(x)$ $x\in[0,1]$. Положим в задаче (1.1), (1.2) $a=0$, $b=1$. Тогда подстановка (2.18) в (1.9) приводит к некоторой невязке

$$(r+1)\sum_{i=0}^{r}\varphi(i,r)C_r^i\left[x^i(1-x)^{r-i}-\lambda\int_0^1 K(x,s)\,s^i(1-s)^{r-i}ds\right]-F(x)$$

$$\equiv\xi_r[x,\lambda,\varphi(0,r),\ldots,\varphi(r,r)],$$

или более компактно

$$(2.20)\qquad \sum_{i=0}^{r} h_i(x,\lambda,r)\,\varphi(i,r)-F(x)\equiv\xi_r[x,\lambda,\varphi(0,r),\ldots,\varphi(r,r)].$$

Неизвестные коэффициенты $\varphi(i, r)$ определим из условия осцилляции невязки $\xi_r[x, \lambda, \varphi(0, r), \ldots, \varphi(r, r)]$ на подсегментах $[s:(r+1), (s+1):(r+1)]$:

$$\int\limits_{(r+1)}^{(s+1)\ (r+1)} \xi_r[x, \lambda, \varphi(0, r), \ldots, \varphi(r, r)]\, dx = 0 \quad (s=0, 1, \ldots, r). \tag{2.21}$$

Заменяя в (2.21) функцию $\xi_r[x, \lambda, \varphi(0, r), \ldots, \varphi(r, r)]$ левой частью выражения (2.20), приходим к системе алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^{r} d_{is}(\lambda)\, \varphi(i, r) = l_s \quad (s=0, 1, \ldots, r). \tag{2.22}$$

Следовательно, если $\det \|d_{is}(\lambda)\| \neq 0$, то из (2.22) находим

$$\varphi(i, r) = \delta_{ir}(\lambda) \quad (i=0, 1, \ldots, r). \tag{2.23}$$

Поэтому в качестве приближенного решения задачи (1.1), (1,2) можно взять функцию

$$y_r(x, \lambda) = \psi(x) + \lambda \int\limits_0^1 M(x, s) \sum_{i=0}^{r} T_{ri}(s)\, \delta_{ir}(\lambda)\, ds \ (r+1). \tag{2.24}$$

Если в области $g$ имеет место неравенство (1.14)

$$l = 1 - \max_g \int\limits_0^1 |\lambda K(x, s)|\, ds > 0, \tag{2.25}$$

то

$$|y_r(x, \lambda) - y(x)| \leq P_r \int\limits_0^1 |\lambda M(x, s)|\, ds, \quad x, \lambda \in g, \tag{2.26}$$

где $p_r = \max\limits_g |\xi_r[x, \lambda, \varphi(0, r), \ldots, \varphi(r, r)]| : l$.

Замечание. Постоянные $\varphi(i, r)$ можно было определять и следующим путем. Из (1.9) имеем

$$\int\limits_{s:(r+1)}^{(s+1):(r+1)} \varphi(x)\, dx - \lambda \int\limits_0^1 \varphi(t)\, dt \int\limits_{s:(r+1)}^{(s+1):(r+1)} K(x, t)\, dt = \int\limits_{s:(r+1)}^{(s+1)\ (r+1)} F(x)\, dx \quad (s=0, 1, \ldots, r),$$

или

$$\varphi(s, r) - \lambda \int\limits_0^1 a_s(t)\, \varphi(t)\, dt = F_s \quad (s=0, 1, \ldots, r). \tag{2.27}$$

Заменим в (2.27) функцию $\varphi(t)$ ее приближенным значением согласно (2.18). Тогда получим[1]

$$\varphi(s, r) - \lambda \sum_{i=0}^{r} \mu_i(s, \lambda)\, \varphi(i, r) \approx F_s \quad (s=0, 1, \ldots, r) \tag{2.28}$$

[1] Как и выше обозначения сохраняем прежние.

и если определитель этой системы отличен от нуля, то отсюда находим

$$\varphi(i, r) = q_{ir}(\lambda) \quad (i=0, 1, \ldots, r). \tag{2.29}$$

Поэтому приближенное решение задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$y_r(x, \lambda) = \psi(x) + \lambda(r+1) \int_0^1 M(x, t) \sum_{i=0}^{r} T_{ri}(t)\, q_{ir}(\lambda)\, dt. \tag{2.30}$$

Теперь решим задачу (1.1), (1.2) с помощью полиномов Л. В. Канторовича, не пользуясь системой интегральных уравнений (1.8), (1.9). С этой целью учтем следующие приближенные равенства:

$$K_{n+p}^{(i)}(x) \approx y^{(i)}(x) \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Предполагая формы $\sum_{i=0}^{n-1} T_j [x^i(1-x)^{n+p-i}]$ линейно независимыми, выразим $y(n, r), \ldots, y(n+p, r)$ в силу краевых условий (1.1). Пусть найдено

$$y(i, n+p) = \sum_{j=0}^{n+p} \delta_{jir}(x)\, y(n+j, n+p) \quad (i=0, 1, \ldots, n-1), \tag{2.31}$$

где

$$y(i, n+p) = \int_{i:(n+p)}^{(i+1):(n+p)} y(x)\, dx.$$

Тогда, вставляя (2.31) в

$$K_{n+p}(x) = \sum_{i=n}^{n+p} T_{n+pi}(x)\, y(i, n+p), \tag{2.32}$$

получим

$$K_{n+p}(x) = \sum_{i=n}^{n+p} \omega_{in+p}(x)\, y(i, n+p), \tag{2.33}$$

где $\omega_{in+p}(x)$ $(i=n, n+1, \ldots, n+p)$ — известные полиномы. Таким образом полином (2.33) удовлетворяет краевым условиям (1.1). Подстановка (2.33) в (1.2) приводит к невязке

$$\sum_{i=n}^{n+p} \Omega_{in+p}(x, \lambda)\, y(i, n+p) \quad f(x) = r_{n+p}[x, \lambda, y(n, n+p), \ldots, y(n+p, n+p)]. \tag{2.34}$$

Постоянные $y(i, n+p)$ $(i=n, n+1, \ldots, n+p)$ найдем из условия

$$\sum_{i=n}^{n+p} y(i, n+p) \int_{s:(n+p)}^{(s+1):(n+p)} \Omega_{in+p}(x, \lambda)\, dx = \int_{:(n+p)}^{(s+1):(n+p)} f(x)\, dx \quad (s=n, n+1, \ldots, n+p) \tag{2.35}$$

или каким-либо другим путем. Пусть

$$y(i, n+p)=\zeta_i(\lambda) \quad (i=n, n+1, \ldots, n+p) \tag{2.36}$$

— решение системы (2.35). Тогда функцию

$$K_{n+p}(x)=\sum_{i=n}^{n+p} \zeta_i(\lambda)\, \omega_{in+p}(x) \tag{2.37}$$

примем за приближенное решение нашей задачи и если имеет место неравенство (2.25), то оценку величины $|K_{n+p}(x)-y(x)|$ проводим так же как и (2.26).

b) Полиномами Л. В. Канторовича удобно пользоваться, если для аппроксимации решения уравнения (1.9) применить формулу (2.15). В этом случае имеем

$$\varphi(x)-\lambda \sum_{i=1}^{r} K(x, \tau_i)\, \overline{\varphi}(i, r)=F(x) \quad (a=0,\ b=1), \tag{2.38}$$

где

$$\overline{\varphi}(i, r)=\int_{i:(r+1)}^{(i+1):(r+1)} \overline{\varphi}(x)\, dx.$$

Проинтегрируем (2.38) в пределах от $\alpha=s:(r+1)$ до $\beta=(s+1):(r+1)$ и положим

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(x, \tau_i)\, dx=K_{si}, \qquad \int_{\alpha}^{\beta} F(x)\, dx=F_s.$$

Тогда

$$\overline{\varphi}(s, r)-\lambda \sum_{i=1}^{r} K_{si}\, \overline{\varphi}(i, r)=F_s \quad (s=1, 2, \ldots, r). \tag{2.39}$$

Поэтому, если определитель $\Delta(\lambda)$ системы (2.39) отличен от нуля, то из (2.39) получаем

$$\overline{\varphi}(i, r)=q_i(\lambda) \quad (i=1, 2, \ldots, r). \tag{2.40}$$

Теперь значениями (2.40) можно воспользоваться для построения функций $\varphi(x)$, $K_r(x)$:

$$\varphi(x)=F(x)+\lambda \sum_{i=0}^{r} K(x, \tau_i)\, q_i(\lambda), \tag{2.41}$$

$$K_r(x)=(r+1) \sum_{i=0}^{r} T_{ri}(x)\, q_i(\lambda). \tag{2.42}$$

Следовательно,

$$y_1(x, \lambda)=\psi(x)+\lambda \int_0^1 M(x, t) \left[F(t)+\lambda \sum_{i=1}^{r} K(t, \tau_i)\, q_i(\lambda)\right] dt \tag{2.43}$$

или

$$(2.44)\qquad y_2(x, \lambda)=\psi(x)+\lambda(r+1)\int_0^1 M(x, t)\sum_{i=0}^{r} T_{ri}(t)\, q_i(\lambda)\, dt$$

— приближенные решения исходной задачи (1.1), (1.2).

В заключение этого пункта построим полиномиальные аппроксимации задачи (1), (2), исходя из формулы

$$(2.45)\quad y(x)=\psi(x)+\lambda\int_0^1 M(x, s)\left[\sum_{i=2}^{n} a_i(s)\, y^{(n-i)}(s)\cdot\int_0^1\sum_{0}^{m} K_i(s, t)\, y^{(i)}(t)\, dt\right] ds.$$

С этой целью проинтегрируем (2.45) в пределах от $j:(r+1)$ до $(j+1):(r+1)$ и в правой части этой формулы заменим $y^{(n-i)}(s)$ и $y^{(i)}(t)$ соответствующими производными от полинома Л. В. Канторовича

$$(2.46)\qquad K_r(x)=(r+1)\sum_{i=0}^{r} T_{ri}(x)\, y(i, r),$$

где

$$y(i, r)=\int_{:(r+1)}^{(i+1):(r+1)} y(x)\, dx.$$

Тогда получим

$$(2.47)\qquad y(j, r)-\lambda\sum_{i=0}^{r}\pi_{ij}\, y(i, r)=v_j\quad (j=0, 1, \ldots, r).$$

Предполагая, что определитель системы (2.47) отличен от нуля, по формулам Крамера находим $y(i, r)=g_{ir}(\lambda)$ $(i=0, 1, \ldots, r)$, где $g_{ir}(\lambda)$ — известные величины. В качестве приближенного решения нашей задачи принимаем функцию

$$y_r(x, \lambda)=\psi(x)\quad \lambda(r\quad 1)\sum_{\nu=0}^{r} g_{\nu r}(\lambda)\int_0^1 M(x, s)\left[\sum_{i=2}^{n} a_i(s)\, T_{r\nu}^{(n-i)}(s)\right.$$

$$\left.+\int_0^1\sum_{i=0}^{m} K_i(s, t)\, T_{r\nu}^{(i)}(t)\, dt\right] ds.$$

Если выполняется неравенство (2.25), то уклонение функции $\bar{y}_r(x, \lambda)$ от $y(x)$, $x, \lambda\in g$, оцениваем тем же путем, как и (2.26).

с) Если известно, что задача (1.1), (1.34) имеет единственное решение, то пользуясь полиномами С. Н. Бернштейна [9] можно строить аппроксимации $y(x)$, следуя Ш. Е. Микеладзе [10]. С этой целью воспользуемся уравнением (1.39) $(a=0, b=1)$

$$(2.48)\quad y(x)=\psi(x)\quad \lambda\int_0^1\left\{N_1(x, t)\sum_{i=2}^{n'} a_i(t)\, y^{(n-i)}(t)+N_2(x, t)\, f_1[t, y(t)]\right\} dt$$

и формулами

$$(2.49)\qquad B_r(x)=\sum_{i=0}^{r}{}' T_{ri}(x)y(i:r)\approx y(x),$$

$$(2.50)\qquad \sum_{i=0}^{r}{}' T_{ri}(x)f_1[i:r, y(i:r)]\approx f_1[x, y(x)].$$

Положим в (2.48) $x=j:r$ и применим формулы (2.39), (2.50). Тогда имеем

$$(2.51)\qquad y_j-\lambda\sum_{i=0}^{r}{}'[\alpha_{ij}y_i+\beta_{ij}f_1(i:r, y_i)]=f_j\quad (j=0, 1, \ldots, r),$$

где $y_s=y(s:r)$, $f_j=f(j:r)$; $\alpha_{ij}$ и $\beta_{ij}$ — известные коэффициенты. Если

$$(2.52)\qquad y_i=\Delta_i(r, \lambda)\quad (i=0, 1, \ldots, r)$$

— решение (точное или приближенное) системы (2.51), то в качестве приближенного решения нашей задачи принимаем функцию

$$(2.53)\qquad \bar{y}(x)=\varphi(x)+\lambda\int_0^1\Big\{N_1(x, t)\sum_{i=2}^{n}{}' a_i(t)\sum_{j=0}^{r}{}' T_{rj}^{(n-i)}(t)\,\Delta_j(r, \lambda)$$
$$+N_2(x, t)f_1\Big[t, \sum_{i=0}^{r}{}' T_{ri}(t)\,\Delta_i(r, \lambda)\Big]\Big\}dt.$$

Несколько иной вариант решения уравнения (2.48) полиномиальным методом состоит в следующем. Пусть задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение и $0\leq x, y\leq 1$. Тогда функцию $f_1[x, y(x)]$ аппроксимируем с помощью полиномов типа С. Н. Бернштейна[1]

$$(2.54)\qquad \sum_{i=0}^{r}{}'\sum_{j=0}^{p}{}' T_{ri}(x)\,T_{pj}(y)\,f_1\Big(\frac{i}{r}, \frac{j}{p}\Big)\approx f_1[x, y(x)].$$

Тогда вместо уравнения (2.48) получим

$$(2.55)\qquad z(x)=\varphi(x)+\lambda\int_0^1\Big\{N_1(x, t)\sum_{i=2}^{n}{}' a_i(t)\,z^{(n-i)}(t)$$
$$+N_2(x, t)\sum_{i=0}^{r}{}'\sum_{j=0}^{p}{}' T_{ri}(t)\,T_{pj}\,[z(t)]f_{1ij}\Big\}dt,$$

где $f_{1ij}=f_1(i:r, j:p)$. В дальнейшем решение уравнения (2.55) можно строить, используя методы статьи [33]. С этой целью из уравнения (2.55) получаем

$$(2.56)\qquad \varphi_1(x)=P[\varphi(x)]+\lambda\int_0^1\{P_x[N_1(x, t)]\varphi_1(t)+P_x[N_2(x, t)]A(t, z)\}\,dt,$$

[1] Применение этих полиномов к решению н.-д.у. см., например, в [11], [15].

где

$$\varphi_1(x)=P[z(x)]\equiv\sum_{i=2}^{n}a_i(x)\,z^{(n-i)}(x); \quad A(t,z)\equiv\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{p}T_{ri}(t)\,T_{pj}[z(t)]f_{1ij}.$$

Функцию $\varphi_1(x)$ найдем приближенно методом механических квадратур

$$\varphi_1(x)\approx\eta(x,\lambda)+\lambda\int_0^1 D_1(x,t,\lambda)\,A(t,\bar{z})\,dt. \tag{2.57}$$

Вставляя вместо $\varphi_1(x)$ ее значение (2.57) в (2.55), получим

$$z_1(x)=\psi_3(x,\lambda)+\lambda\int_0^1 D_2(x,t,\lambda)\,A(t,z_1)\,dt. \tag{2.58}$$

Если для нелинейного интегрального уравнения (2.58) выполняется принцип сжатых отображений, то функцию $z_1(x)$ можно построить методом последовательных приближений Пикара. Укажем еще один путь аппроксимации функции $z_1(x)$. С этой целью воспользуемся методом дифференцирования по параметру в той форме, как это указано в [12]. Из уравнения (2.58) получаем

$$z_2(x)=\psi_3(x,\lambda)+\lambda\sum_{i=1}^{k}C_iD(x,x_i,\lambda)\,A[x_i,z_{2i}], \tag{2.59}$$

где $C_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$ — коэффициенты квадратурной формулы; $z_{2i}=z_2(x_i)$. Введем в уравнение (2.59) параметр $a$ следующим образом:

$$z_2(x,a)=\psi_3(x,\lambda)+[(d-a)\,\lambda:a]\sum_{i=1}^{k}C_iD(x,x_i,\lambda)\,A[x_i,z_{2i}(a)], \tag{2.60}$$

где $0<d$ — некоторое число. При $a=d$ имеем

$$z_{20}(x,d)=\psi_3(x,\lambda).$$

Положим в (2.60) $x=x_j$ и продифференцируем полученную систему по $a$:

$$\frac{dz_{2j}(a)}{da}=\lambda\sum_{i=1}^{k}C_iD(x_j,x_i,\lambda)\left\{\frac{\partial A[x_i,z_{2i}(a)]}{\partial a}\,\frac{dz_{2i}(a)}{da}\,\frac{d-a}{d}\right. \tag{2.61}$$

$$\left.-\frac{1}{d}A[x_i,z_{2i}(a)]\right\}\quad(j=1,2,\ldots,k).$$

Пусть из (2.61) найдено

$$\frac{dz_{2j}(a)}{da}=S_j[\lambda,a,z_{2i},\ldots,z_{2k}]\quad(j=1,2,\ldots,k) \tag{2.62}$$

и подчиним решение этой системы условиям

$$z_{2j}(d)=\psi_3(x_j,\lambda)\quad(j=1,2,\ldots,k). \tag{2.63}$$

Тогда, если $z_{2j}(a)=\theta_j(a, \lambda)$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ — решение (точное или приближенное) задачи (2.62), (2.63) (речь идет об аналитическом решении), то в качестве приближенного решения нашей задачи берем функцию

$$(2.64)\qquad z_3(x, \lambda)=\psi_3(x, \lambda)+\lambda\sum_{i=1}^{k} C_i D(x, x_i, \lambda)\, A[x_i, \theta_i(0, \lambda)].$$

Предполагая выполненными условия:

1) функция $f_1[t, y(t)]$ в $D$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $\gamma(t)$; имеют место неравенства

$$2)\ l_3=1-\max_g\int_0^1 \lambda P_x[N_1(x, t)]\,|\,dt>0,$$

$$3)\ l_4=1-\max_g|\lambda|\int_0^1\left\{|N_1(x, t)|\max_g\int_0^1|\lambda P_l[N_2(t, \tau)]\ \gamma(\tau)\,d\tau\right.$$

$$\left.+\ N_2(x, t)|\,\gamma(t)\right\}dt>0,$$

находим оценку погрешности

$$(2.65)\qquad \max_g\ y(x)-z_3(x, \lambda)\ \leq\left\{\max_g|\,a(x, \lambda)\right.$$

$$\left.+\max_g\left[|P[a(x, \lambda)]'\int_0^1|\lambda N_1(x, t)|\,dt\right]:l_3\right\}:l_4.$$

Замечания. 1. Функцию $\varphi_1(x)$ в (2.56) легко было аппроксимировать с помощью полиномов С. Н. Бернштейна, следуя [1, 4]. 2. Если не вводить функцию $\varphi_1(x)$, то в (2.55) полагаем $x=j:p$, а вместо $z^{(n-l)}(t)$ берем её приближенное значение

$$\sum_{r=0}^{p} T_{pr}^{(n-i)}(t)z(r:p).$$

Тогда для $z(r:p)$ имеем некоторую систему алгебраических уравнений, которую можно решить методом дифференцирования по параметру. 3. Если воспользоваться полиномами Л. В. Канторовича, то вместо уравнения (2.55) будем иметь

$$(2.66)\qquad \bar z(x)=\psi(x)+\lambda\int_0^1\left\{N_1(x, t)\sum_{i=2}^{n} a_i(t)(r+1)\sum_{k=0}^{r} T_{rk}^{(n-i)}(t)\,\bar z(r, k)\right.$$

$$\left.N_2(x, t)(r+1)(1+p)\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=0}^{r} T_{pl}(t)\ T_{rk}[z(t)]\int_{l:(p+1)}^{(l+1):(p+1)} d\tau\int_{k:(r+1)}^{(k+1):(r+1)} f_1(\tau, z)\,d\bar z\right\}dt.$$

Проинтегрируем (2.66) в пределах от $l:(r+1)$ до $(l+1):(r+1)$ и заменим в $T_{rk}[\bar{z}(t)]$ функцию $\bar{z}(t)$ согласно (2.18). В результате этого придем к системе, которую запишем в виде

$$Z(r, l)-\lambda V_l[Z(r, k)]=g_l \quad (l=0, 1, \ldots, r). \tag{2.67}$$

Последнюю систему тоже можно решать методом дифференцирования по параметру так же, как это мы делали для системы (2.59).

Пусть функция $D(x, t)$ обладает свойством (1.13) и требуется решить уравнение (1.34) с дополнительными условиями

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_{ij} y^{(i)}(a)=b_j \quad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{2.68}$$

Для решения этой задачи воспользуемся методом линеаризации, т. е. представим функцию $f_1[x, y(x)]$ в виде

$$f_1[x, y(x)]=f_1(x, y_0)+\frac{\partial f_1(x, y_0)}{\partial y_0}[y(x)-y_0]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1(x, \bar{y})}{\partial \bar{y}^2}[y(x)-y_0]^2, \tag{2.69}$$

где $y_0=y(a)$. Пользуясь преобразованием (1.52), определим постоянные $C_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ в силу условий (2.68), а в разложении (2.69) остановимся на втором члене. Тогда подстановка (1.52) в уравнение

$$L[z, \lambda]=f(x)+\lambda \int_a^x D_0(x, t)\frac{\partial f_1(t, y_0)}{\partial y_0}[z(t)-y_0]\,dt \tag{2.70}$$

приводит к интегральному уравнению

$$h(x)-\lambda \int_a^x S(x, t)\,h(t)\,dt=f(x, \lambda), \tag{2.71}$$

где $S(x, t)$, $f(x, \lambda)$ — известные непрерывные функции в области $x, t, \lambda \in g$. Из (2.71) находим $h(x)=\sigma(x, \lambda)$. Поэтому приближенное решение нашей задачи будет

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i \dot{y}_i(x) \quad \int_a^x H(x, t)\,\sigma(t, \lambda)\,dt. \tag{2.72}$$

Оценим разность $y(x)-z(x)$. Пусть

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)+\int_a^x H(x, t)\,\Phi(t)dt \tag{2.73}$$

—точное решение задачи (2.68), (1.34). Тогда подстановка (2.73) в (1.34), с учетом разложения (2.69), приводит к уравнению

$$\Phi(x)-\lambda \int_a^x S(x, t)\,\Phi(t)\,dt=f(x, \lambda)+\lambda \int_a^x H_1(x, t)\,\frac{\partial^2 f_1(t, \bar{y})}{\partial \bar{y}^2}\,[y(t)-y_0]^2\,dt. \tag{2.74}$$

Из (2.74) и (2.71) получаем

$$(2.75)\qquad \Phi(x)-h(x)=\lambda\int_a^x H_1(x,t)\,\frac{\partial^2 f_1(t,\bar y)}{\partial \bar y^2}\,[y(t)-y_0]^2\,dt$$

$$+\lambda\int_a^x R(x,\tau,\lambda)\,d\tau\int_a^\tau H_1(\tau,t)\,[y(t)-y_0]^2\,\frac{\partial^2 f_1(t,\bar y_0)}{\partial \bar y^2}\,dt$$

$$\lambda\int_a^x H_2(x,t,\lambda)\,\frac{\partial^2 f_1(t,y)}{\partial \bar y^2}\,[y(t)-y_0]^2\,dt,$$

где $R(x,\tau,\lambda)$ — резольвента ядра $S(x,\tau)$. Поэтому

$$(2.76)\qquad y(x)-z(x)=\lambda\int_a^x H(x,\tau)\,d\tau\int_a^\tau H_2(\tau,t,\lambda)\,\frac{\partial^2 f_1(t,\bar y)}{\partial \bar y^2}\,[y(t)-y_0]^2\,dt$$

$$=\lambda\int_a^x H_3(x,t,\lambda)\,\frac{\partial^2 f_1(t,\bar y)}{\partial \bar y^2}\,[y(t)-y_0]^2\,dt.$$

Пусть $\max\limits_D\left|\frac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial y^2}\right|\le L_2$, где $L_2$ известная постоянная. Тогда из (2.76) найдем $\max\limits_{[a,b]}|y(x)-z(x)|<L_3$, где $L_3$ — заданная постоянная. Таким образом

$$(2.77)\qquad |y(x)-z(x)|\le L_2\int_a^x |\lambda H_3(x,t,\lambda)|\,[L_3^2+2L_3\,|z(t)-y_0|$$

$$+|z(t)-y_0|^2]\,dt,\qquad x,\lambda\in g.$$

Сходным образом можно решать и краевую задачу (1.1) для и.-д. у. (1.34), если $y(c)=y_0$ — известное число, $c\in[a,b]$. В противном случае число $y_0$ необходимо определить приближенно.

d) В этом пункте мы укажем полиномиальные аппроксимации задачи (1.1), (1.2) несколько иного вида, чем полиномы Л. В. Канторовича и С. Н. Бернштейна.

1) Воспользуемся методом П. Л. Чебышева в той форме, как это указано в [13], [14]. Пусть

$$(2.78)\qquad \varphi_k(x)=\sum_{i=1}^k p_i h_i(x,\lambda)$$

— приближенное решение уравнения (1.9), где $h_i(x,\lambda)$ $(i=1,2,\ldots,k)$ — заданная линейно независимая система функций для всех $x\in[a,b]$, $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$; $p_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$ — пока неизвестные коэффициенты. Тогда

$$(2.79)\qquad \varphi_k(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_k(s)\,ds-F(x)=\sum_{i=1}^k p_i\theta_i(x,\lambda)-F(x)=r(x,\lambda,p_i).$$

Предполагая, что функция $\sum_{i=1}^{k} p_i\theta_i(x, \lambda)$ имеет на $(a, b)$ не более $k$ корней, определим коэффициенты $p_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ так, чтобы функция $r(x, \lambda, p_i)$ наименее уклонялась от нуля. С этой целью потребуем, чтобы имел место так называемый чебышевский альтернанс. Тогда

$$(2.80)\qquad r(x_j, \lambda, p_i)=(-1)^j E \quad (j=1, 2, \ldots, k+1); \quad \frac{\partial r(x_j, \lambda, p_i)}{\partial x_j}=0$$

$$(j=2, 3, \ldots, k); \quad x_1=a, \quad x_{k+1}=b,$$

где $E$ — погрешность наилучшего приближения. Система (2.80) содержит $2(n+1)$ уравнений с таким же числом неизвестных. Если определитель этой системы отличен от нуля, то, определяя отсюда все неизвестные, имеем

a)

$$(2.81)\qquad y_k(x, \lambda)=\psi(x)+\lambda\int_a^b M(x, t)\sum_{i=1}^{k} p_i(\lambda)\, h_i(t, \lambda)\, dt$$

— приближенное решение исходной задачи;

b)

$$(2.82)\qquad |y(x)-y_k(y, \lambda)|\leq E\int_a^b |\lambda M(x, t)|\, dt, \quad x, \lambda\in g,$$

оценка погрешности.

В заключение воспользуемся методом минимальной интегральной невязки. Коэффициенты $p_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ в этом случае определяются из условия минимума квадратичного функционала

$$(2.83)\qquad y=\int_a^b r^2(x, \lambda, p_i)\, dx.$$

Пусть $p_i=p_i(\lambda)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ реализует минимум функционала (2.83). Тогда

$$(2.84)\qquad y_k(x, \lambda)=\psi(x)+\lambda\int_a^b M(x, t)\sum_{i=1}^{k} p_i(\lambda)\, h_i(t, \lambda)\, dt$$

— приближенное решение задачи (1.1), (1.2). Если выполнено неравенство (1.14), то

$$|y(x)-y_k(x, \lambda)|\leq(1-\delta)\int_a^b \lambda M(x, s)\, ds, \quad x, \lambda\in g$$

(см. (2.10)).

## § 3. Некоторые замечания о последующем ряде работ авторов

За последние 20—25 лет дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом нашли многочисленные приложения во многих разделах механики и физики и прежде всего в теории регулирования. Наибольшее развитие получили: теория линейных уравнений с запаздывающим аргументом; теория устойчивости; исследования периодических и почти периодических решений линейных и квазилинейных уравнений. В последнее время приобретают прикладное значение вариационные задачи с отклоняющимся аргументом и связанные с ними краевые задачи.

В одной из последующих статей авторы, принимая во внимание достижения в этой области, принадлежащие в особенности школе Л. Э. Эльсгольца, руководящего соответствующим семинаром в Университете Дружбы Народов имени Патриса Лумумбы [17], [18], работам Л. Е. Кривошеина в рамках обширной школы по интегро-дифференциальным уравнениям Киргизии [19], работам А. Халаная, проводимых в РНР [20], а так же и ряду работ Д. Манжерона [21] в связи с вариационными задачами, обогатившими совершенно недавно глубокими работами М. Пиконе [22], [23], Р. Беллмана [24] и др., излагают ряд задач по обыкновенным интегро-дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом [25].

Расширяющийся диапазон применений интегро-дифференциальных уравнений в физике и технике, частично указанный в некоторых из предыдущих статей авторов [26], привел к рассмотрению, изложенному в одной из последующих работ, параллельно с углублением краевых задач, относящихся к поливолновым интегро-дифференциальным операторам [27], так же и краевых задач, касающихся полигармонических интегро-дифференциальных операторов или же поликалорических интегро-дифференциальных операторов, имеющих в своей основе нижеследующие операторы, рассмотренные на IV Конгрессе Румынских Математиков, в рамках начал унитарной теории линейных дифференциальных операторов в частных производных, предложенной Д. Манжероном [28]:

$$\left(\frac{\partial^{nm}}{\partial x_1^n\,\partial x_2^n\ldots\partial x_m^n}+(-1)^{nm}\frac{\partial^{nm}}{\partial y_1^n\,\partial y_2^n\ldots\partial y_m^n}\right)^{(k)}, \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{\partial^{nm}}{\partial x_1^n\,\partial x_2^n\ldots\partial x_m^n}-(-1)^{nm}\frac{\partial^{nm}}{\partial y_1^n\,\partial y_2^n\ldots\partial y_m^n}\right)^{(k)}, \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{\partial^{nm}}{\partial x_1^n\,\partial x_2^n\ldots\partial x_m^n}+(-1)^{(n-1)m}\frac{\partial^{(n-1)m}}{\partial y_1^{n-1}\partial y_2^{n-1}\ldots\partial y_m^{n-1}}\right)^{(k)} \tag{3.3}$$

Сюда относится, например, следукщая

Теорема 7. Из двух решений одного из нижеследующих уравнений в частных производных или же из решений двух из рассмотренных ниже уравнений

$$\frac{\partial^{nm}u(x_1,x_2,\ldots,x_m;y_1,y_2,\ldots,y_m)}{\partial x_1^n\,\partial x_2^n\ldots\partial x_m^n}+(-1)^{nm}\frac{\partial^{nm}u(x_1,x_2,\ldots,x_m;y_1,y_2,\ldots,y_m)}{\partial y_1^n\,\partial y_2^n\ldots\partial y_m^n}=0, \tag{3.4}$$

$$(3.5)\qquad \frac{\partial^{nm} u(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial x_1^n \partial x_2^n \ldots \partial x_m^n} - (-1)^{nm} \frac{\partial^{nm} u(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial y_1^n \partial y_2^n \ldots \partial y_m^n} = 0,$$

$$(3.6)\qquad \frac{\partial^{nm} u(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial x_1^n \partial x_2^n \ldots \partial x_m^n} + (-1)^{(n-1)m} \frac{\partial^{(n-1)m} u(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial y_1^{n-1} \partial y_2^{n-1} \ldots \partial y_m^{n-1}} = 0$$

получается, используя конволюции второго рода типа Вольтерра, новое решение одного из рассмотренных уравнений.

Так, например, для $m$ нечетного и $n$ четного, из двух решений уравнения вида (3.4)

$$u_e(x_1, x_2, \ldots, x_m; s_1, s_2, \ldots, s_m), \quad v_e(y_1, y_2, \ldots, y_m; s_1, s_2, \ldots, s_m),$$

определенных для

$$x_i^* < x_i < x_i^{**}, \quad s_i^* < s_i < s_i^{**}, \quad y_i^* < y_i < y_i^{**} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

правая конволюция

$$(3.7)\qquad u_{ee}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m) = \int \cdots \int u_e(x_1, x_2, \ldots, x_m; s_1, s_2, \ldots, s_m) v_e(y_1, y_2, \ldots, y_m; s_1, s_2, \ldots, s_m)\, ds_1 ds_2 \ldots ds_m$$

приводит к решению уравнения (3.5), в предположении, что некоторые граничные условия удовлетворены.

Внимание, оказанное на недавно проведенных международных конгрессах или же всесоюзных съездах по математике и механике задачам, в рамки которых входят исследования авторов и, с другой стороны, внимание, оказанное другими исследователями поставленным там или же решеным задачам [29]—[34], дает повод к дальнейшему многогранному углублению классов задач, относящихся к интегро-дифференциальным уравнениям.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Манжерон Д., Л. Е. Кривошеин, Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., 1) V(IX), *1—2*, 1959, 101—110; 2) VI(X), *1—2*, 1960, 17—28; 3) VI(X), *3—4*, 1960, 21—30; 4) VII(XI), *3—4*, 1961, 27—42.
2. Манжерон Д., Л. Е. Кривошеин, Analele ştiinţ. Univ. Iaşi, Secţ. I (Mat., fiz., chimie), VI, *3*, Supl., 1960, 605—616.
3. Mangeron D., L. E. Krivošein, Acta math. sinica, 12, *2*, 1962, 175—178; 2) Acta math. sinica, 13, *1*, 1963, 63—67; 3) Bull. Acad. R. Sci. de Belgique, s. 5, 48, *9*, 1962, 870—874; 4) C. R. Acad. Bulg. Sci., 15, 1962, 345—348.
4. Аржаных И. С., Л. Е. Кривошеин, Изв. высш. учебн. завед., матем., № 2, 1962, 3—12.

5. Кривошеин Л. Е. 1) Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., V(IX), *3—4*, 39—50; 2) Изв. высш. учебн. завед., матем., № 3, 1960, 168—172; 3) Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений, АН Кирг. ССР, Фрунзе, 1962, 1—184; 4) К решению одного класса интегро-дифференциальных уравнений. В сб. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, **11**, АН Кирг. ССР, 1962, 211—219.
6. Hammerstein A., Acta math., **54**, 1930, 117—176.
7. Мысовских И. П., Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех., астр., № 19, в. 4, 1956, 66—72.
8. Канторович Л. В., ДАН СССР, А, 1930, 563—566; 595—600.
9. Бернштейн С. Н., Соч., т. 1, Изд. АН СССР, Москва, 1952, 105—106.
10. Микеладзе Ш. Е., Тр. Тбилисск. матем. ин-та им. Размадзе, **26**, 1959, 264—279.
11. Mangeron D., L. E. Krivošein, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXXIII**, 1963, 226—266.
12. Лященко Н. Я., Доп. АН УРСР, № 9, 1963, 1139—1144.
13. Гребенюк Д. Г., Тр. ин-та матем. и мех. АН Узб. ССР, в. 15, 1955, 107—110.
14. Кривошеин Л. Е., Уч. зап. Физ.-матем. ф-та Кирг. ГУ, 1957, в. 4, ч. 2, 39—68.
15. Mangeron D., L. E. Krivošein, Rev. math. pures et appl., R. P. R., **VII**, *4*, 1962, 603—615.
16. Хаджимуллаев Ф. С., Научн. тр. Ташкентского ун-та, в. 208, 1962, 170—178.
17. *** Второй Всесоюзный Съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов, АН СССР, 1964, 237.
18. Труды сем. по теории дифф. уравн. с отклоняющимся аргументом. II, Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 3—49.
19. Кривошеин Л. Е., Д. Манжерон, Revue Roumaine de Math. (в печати).
20. Halanay A., Comunic. Acad. R. P. R., **X**, *8*, 1960, 635—642.
21. Mangeron D., Bull. Inst. polytechn. Jassy, **3**, *1*, 1948, 153—155.
22. Picone M., Atti Accad. Naz. dei Lincei, Memorie, **CCCLX**, 1963, Cl. sci. fis., mat. e nat., s. VIII, **VII**, sez. I, *3*, 33—57.
23. Picone M., G. Fichera, Atti Accad. Naz. dei Lincei, **CCCLIX**, 1962, Memorie, Cl. sci. fis., mat. e nat., s. VIII, **VI**, sez. I, *12*, 341—379.
24. Bellman R., a. o., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **50**, 1963, 222—226.
25. Mangeron D., L. E. Krivošein, Revue Roum. Sci. Techn., Mécanique (в печати).
26. Mangeron D., L. E. Krivošein, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXXIV**, 1964.
27. Mangeron D., L. E. Krivošein, Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., s. 8, **XXXV**, *2*, 1963, 123—129.
28. Mangeron D., Sur les relations entre les solutions de certains problèmes à la frontière polydimensionnels d'ordre supérieur, Travaux du IV-e Congrès Math. Roumains, Bucarest, 1960, Acad. R. P. R.
29. Henrici P., Problems of stability and error propagation in the numerical integration of ordinary diff. equations, Proc. Intern. Congress of Math., Stockholm. 1962, Inst. Mittag-Leffler, 102—113.
30. Шерман Д. И., Метод интегральных уравнений в задачах теории упругости, Труды Всесоюзного Съезда по теор. и прикл. мех. АН СССР, 1962, 405—467.
31. Березанский Ю. М., ДАН СССР, **122**, № **6**, 1958, 959—962.
32. Карпиловская Э. Б., ДАН СССР, **151**, № **1**, 1963, 66—70.
33. Rusclor Stefania, Rend. Accad Naz. dei Lincei, Cl. sci fis., mat. e nat., s. 8, **XXXV**, **6**, 1963.
34. Rossi F. S., Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., **IX(XIII)**, **3—4**, 1963.
35. Oprea A., Bull. Acad. Belgique Sci. (в печати).

*Поступила на 1. IV. 1964 г.*