БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

СХОДИМОСТ НА РЕДОВЕ ПО ПОЛИНОМИТЕ НА ЯКОБИ И БЕСЕЛ ВЪРХУ ГРАНИЦИТЕ НА ОБЛАСТИТЕ ИМ НА СХОДИМОСТ

Петър Русев

§ 1. Редове по полиномите на Якоби

1. Нека α и β са произволни комплексни числа такива, че α, β, $\alpha+\beta \neq 0, -1, -2\ldots$ и $\varrho(z)$ е регулярно решение на диференциалното уравнение

$$\frac{\varrho'(z)}{\varrho(z)}=\frac{\alpha}{z-1}+\frac{\beta}{z+1}$$

в областта $C^1-[-\infty;1]$ (C^1 означава комплексната равнина). Полиномите на Якоби се определят чрез равенството

$$P_n(\alpha,\beta;\ z)=(-1)^n\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}\,\frac{1}{\varrho(z)}\,\frac{d^n}{dz^n}\,[\varrho(z)(1-z^2)^n]. \tag{1}$$

За полиномите (1) е в сила рекурентната зависимост

$$P_{n+2}(\alpha,\beta;z)=(z-a_{n+2})\,P_{n+1}(\alpha,\beta;z)-\lambda_{n+1}P_n(\alpha,\beta;z),$$

където a_{n+2} и λ_{n+1} са константи, които зависят от n, α и β.

На всеки полином на Якоби отговаря съответна асоциирана функция $Q_n(\alpha,\beta;z)$, регулярна в областта $C^1-[-\infty;1]$ и такава, че функцията $\varrho(z)Q_n(\alpha,\beta;z)$ е регулярна в областта $C^1-[-1;1]$. Асоциираните функции удовлетворяват същата рекурентна зависимост, както и полиномите на Якоби. В сила е следното равенство, известно като формула на Кристофел—Дарбу:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu(\alpha,\beta;z)\,\frac{\varrho(\zeta)Q_\nu(\alpha,\beta;\zeta)}{I_\nu(\alpha,\beta)\,q(\alpha,\beta;\zeta)}+R_n(\alpha,\beta;\zeta); \tag{2}$$

тук

$$R_n(\alpha,\beta;\zeta,z)=\frac{1}{I_n(\alpha,\beta)q(\alpha,\beta;\zeta)(\zeta-z)}\{P_{n+1}(\alpha,\beta;z)\,Q_n(\alpha,\beta;\zeta)-P_n(\alpha,\beta;z)\,Q_{n+1}(\alpha,\beta;\zeta)\}, \tag{3}$$

$$q(\alpha,\beta;\zeta)=\frac{\varrho(\zeta)}{I_0(\alpha,\beta)}\,\{P_1(\alpha,\beta;\zeta)Q_0(\alpha,\beta;\zeta)-Q_1(\alpha,\beta;\zeta)\}, \tag{4}$$

$$(5)\qquad I_n(\alpha,\beta)=\frac{2^{2n}n!\,\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}=A(\alpha,\beta)(1+O(1)),$$

където $A(\alpha,\beta)$ е константа, зависеща от α и β.

Освен това валидни са следните асимптотични формули за полиномите на Якоби и асоциираните им функции ([1], стр. 82 и 84, [6]):

$$(6)\qquad P_n(\alpha,\beta;z)=2^{-n}t^n\varphi(z)(1+\xi_n(z)),$$

където $z=\frac{1}{2}(t+t^{-1})$, $t>1$, $\varphi(z)$ и $\xi_n(z)$ са регулярни в областта $C^1-[-1;1]$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n(z)=0$ равномерно върху всяко ограничено и затворено множество $F\subset C^1-[-1;1]$. По-нататък

$$(7)\qquad \varrho(z)Q_n(\alpha,\beta;z)=2^{-n}u^n\psi(z)(1+\eta_n(z)),$$

където $z=\frac{1}{2}(u+u^{-1})$, $|u|<1$, $\psi(z)$ и $\eta_n(z)$ са регулярни в областта $C^1-[-1;1]$ и $\lim\eta_n(z)=0$ равномерно върху всяко ограничено и затворено множество $F\subset C^1-[-1;1]$.

Ще покажем сега, че за всяко $\zeta\in C^1-[-1;1]$ функцията (4) е отлична от нула. Наистина да допуснем, че $q(\alpha,\beta;\zeta)=0$. Тогава ще имаме $\varrho(\zeta)Q_1(\alpha,\beta;\zeta)=P_1(\alpha,\beta;\zeta)\varrho(\zeta)Q_0(\alpha,\beta;\zeta)$. Като се използва рекурентната зависимост, която удовлетворяват асоциираните функции и полиномите на Якоби, се установява, че
$\varrho(\zeta)Q_n(\alpha,\beta;\zeta)=P_n(\alpha,\beta;\zeta)\varrho(\zeta)Q_0(\alpha,\beta;\zeta)$. Да допуснем, че $\varrho(z)Q_0(\alpha,\beta;\zeta)\neq 0$. Тогава от асимптотичните формули (6) и (7) следва, че последното равенство е невъзможно. Ако $\varrho(\zeta)Q_0(\alpha,\beta;\zeta)=0$, тогава $\varrho(\zeta)Q_n(\alpha,\beta;\zeta)=0$ за всяко $n=1,2,3\ldots$ Това също не е възможно, като се има пред вид, че в (7) $\psi(z)\neq 0$ в областта $C^1-[-1;1]$.

Като се използват асимптотичните формули и формулата на Кристофел — Дарбу, се установява, че всяка аналитична функция $f(z)$, регулярна и еднозначна във вътрешността Δ_E на елипса E с фокуси в точките -1 и $+1$, се развива в Δ_E в ред по полиномите на Якоби

$$(8)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(\alpha,\beta;z),$$

Коефициентите a_n се определят от

$$(9)\qquad a_n=\frac{1}{2\pi i\,I_n(\alpha,\beta)}\int_\gamma\frac{f(\zeta)\varrho(\zeta)Q_n(\alpha,\beta;\zeta)}{q(\alpha,\beta;\zeta)}\,d\zeta,$$

където $\gamma\subset\Delta_E$ е гладка жорданова крива линия такава, че $\operatorname{ind}[-1;1]\gamma=1$.

2. Нашата цел по-нататък ще бъде да изследваме въпроса за сходимостта на реда (8) върху елипсата E.

Теорема 1. Нека $f(z)$ е регулярна в Δ_E и непрекъсната върху $\bar{\Delta}_E$. Ако $f(z)$ е регулярна в някоя точка $z_0\in E$, редът на Якоби (8) е сходящ в тази точка и сумата му е равна на $f(z_0)$.

Доказателство. Нека $C_\delta(z_0)$ е окръжност с център точката z_0 и радиус δ такъв, че $f(z)$ да е регулярна във вътрешността $K_\delta(z_0)$ на $C_\delta(z_0)$ и по самата нея. С $\lambda_\delta(z_0)$ означаваме тази дъга от $C_\delta(z_0)$, която лежи вън от E. Полагаме $E_\delta=(E-E\cap K_\delta(z_0))\cup\lambda_\delta(z_0)$. Тогава от обобщените теорема и формула на Коши ([3], стр. 415) следва, че

$$a_n=\frac{1}{2\pi i\, I_n(\alpha,\beta)}\int\limits_{E_\delta}\frac{f(\zeta)\,\varrho(\zeta)\,Q_n(\alpha,\beta;\zeta)}{q(\alpha,\beta;\zeta)}\,d\zeta$$

и

(10) $$S_n(f;z_0)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu P_\nu(\alpha,\beta;z_0)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{2\pi i I_\nu(\alpha,\beta)}\int\limits_{E_\delta}\frac{f(\zeta)\,\varrho(\zeta)\,Q_\nu(\alpha,\beta;\zeta)}{q(\alpha,\beta;\zeta)}P_\nu(\alpha,\beta;z_0)\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E_\delta}\left\{\frac{1}{\zeta-z_0}-R_n(\alpha,\beta;\zeta,z_0)\right\}f(\zeta)d\zeta$$

$$=f(z_0)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E_\delta}f(\zeta)R_n(\alpha,\beta;\zeta,z_0)\,d\zeta.$$

Като се имат пред вид асимптотичните формули (6), (7) и равенството (5), $R_n(\alpha,\beta;\zeta,z)$ се записва във вида

(11) $$R_n(\alpha,\beta;\zeta,z)=\frac{T_n(\alpha,\beta;\zeta,z)}{\zeta-z},$$

където

(12) $$T_n(\alpha,\beta;\zeta,z)=t^n u^n K(\zeta,z)(1+k_n(\zeta,z)).$$

функциите $K(\zeta,z)$ и $k_n(\zeta,z)$ са регулярни в областта $G=\{C^1-[-1;1]\}\times\{C^1-[-1;1]\}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}k_n(\zeta,z)=0$ равномерно върху всяко ограничено и затворено множество $\Phi\subset G$.

Ще покажем, че

(13) $$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{E_\delta}f(\zeta)R_n(\alpha,\beta;\zeta,z_0)\,d\zeta=0.$$

Преди всичко

$$\int\limits_{E_\delta}f(\zeta)\,R_n(\alpha,\beta;\zeta,z_0)\,d\zeta=\int\limits_{E-E\cap K_\delta(z_0)}f(\zeta)\,\frac{T_n(\alpha,\beta;\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}\,d\zeta$$

$$+\int\limits_{\lambda_\delta(z_0)}f(\zeta)\,\frac{T_n(\alpha,\beta;\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}\,d\zeta.$$

Върху всяка дъга l, която принадлежи на $\lambda_\delta(z_0)$ заедно с краищата си, $|t_0.u|\leq q<1$, където q зависи от l. Освен това $T_n(\alpha,\beta;\zeta,z_0)=O(1)$ равномерно по $\zeta\in\lambda_\delta(z_0)$. Следователно

По-нататък имаме

$$\int\limits_{E-E\cap K_\delta(z_0)} f(\zeta)\frac{T_n(\alpha,\beta;\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}d\zeta=\int\limits_{E-E\cap K_\delta(z_0)}\frac{f(\zeta)K(\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}t_0^n u^n d\zeta$$

$$+\int\limits_{E-E\cap K_\delta(z_0)}\frac{f(\zeta)K(\zeta,z_0)k_n(\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}t_0^n u^n d\zeta.$$

Понеже $t_0 . u=1$ по елипсата E и $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(\zeta,z_0)=0$ равномерно по $\zeta\in E$, последният интеграл клони към нула. По елипсата E обаче $u=re^{i\varphi}\,(0\leq\varphi\leq 2\pi)$, $0<r<1$, $t_0=\frac{1}{r}e^{-i\varphi_0}\,(0\leq\varphi_0\leq 2\pi)$ и нека $u_1=re^{i\varphi_1}$ и $u_2=re^{i\varphi_2}$ $(0<\varphi_1<\varphi_0<\varphi_2<2\pi)$ отговарят на точките, в които окръжността $C_\delta(z_0)$ пресича елипсата E. Тогава ще имаме

$$\int\limits_{E-E\cap K_\delta(z_0)}\frac{f(\zeta)K(\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}t_0^n u^n d\zeta$$

$$=\int\limits_0^{\varphi_1} F(\varphi)e^{in(\varphi-\varphi_0)}d\varphi+\int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} F(\varphi)e^{in(\varphi-\varphi_0)}d\varphi.$$

където $F(\varphi)$ е непрекъсната в интервалите $[0,\varphi_1]$ и $[\varphi_2, 2\pi]$. От една лема на Риман ([7], стр. 519) следва, че последните два интеграла клонят към нула при $n\to+\infty$ и с това равенството (13) е установено. От (10) получаваме тогава, че $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f;z_0)=f(z_0)$.

По същия начин се установява и следната

Теорема 2. Нека $f(z)$ е регулярна в Δ_E и непрекъсната върху $\bar{\Delta}_E$. Ако $f(z)$ е регулярна върху някаква дъга $\sigma\subset E$, редът на Якоби (8) е равномерно сходящ върху σ.

Теорема 3. Нека $f(z)$ е регулярна в Δ_E и непрекъсната върху $\bar{\Delta}_E$. Ако за някоя точка $z_0\in E$ съществува несобственият интеграл

$$\int\limits_E\left|\frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta-z_0}\right|ds,$$

редът (8) е сходящ в тази точка и сумата му е равна на $f(z_0)$. В частност, ако $f(z)$ удовлетворява върху елипсата E условието на Хьолдер в точката $z_0\in E$, т. е. съществуват константи M и $0<\mu\leq 1$ такива, че $|f(z)-f(z_0)|\leq M|z-z_0|^\mu$ за $z\in E$, редът (8) е сходящ в точката z_0 и сумата му е $f(z_0)$.

Доказателство. От обобщената формула на Коши следва, че ако $z\in\Delta_E$,

(14) $$S_n(f;z)=f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E f(\zeta)\frac{T_n(\alpha,\beta;\zeta,z)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$= f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_E f(\zeta) \frac{T_n(\alpha, \beta ; \zeta, z) - T_n(\alpha, \beta ; z, z)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$- \frac{1}{2\pi i} T_n(\alpha, \beta ; z, z) \int_E \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

От формулата на Кристофел — Дарбу (2), като я умножим с $\zeta - z$ и поставим $\zeta = z$, получаваме

$$\{(\zeta - z) R_n(\alpha, \beta ; \zeta, z)\}_{\zeta = z} = T_n(\alpha, \beta ; z, z) = 1.$$

Тогава от (14) следва, че

$$S_n(f ; z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_E f(\zeta) \frac{T_n(\alpha, \beta ; \zeta, z) - T_n(\alpha, \beta ; z, z)}{\zeta - z} d\zeta,$$

откъдето, като вземем пред вид (12), получаваме

(15) $$S_n(f ; z_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_E f(\zeta) \frac{T_n(\alpha, \beta ; \zeta, z_0) - T_n(\alpha, \beta ; z_0, z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_E f(\zeta) \frac{K(\zeta, z_0) - K(z_0, z_0)}{\zeta - z_0} t_0^n u^n d\zeta$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_E f(\zeta) \frac{K(\zeta, z_0) k_n(\zeta, z_0) - K(z_0, z_0) k_n(z_0, z_0)}{\zeta - z_0} t_0^n u^n d\zeta$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_E f(\zeta) \frac{t_0^n u^n - 1}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Функцията $\frac{K(\zeta, z_0) - K(z_0, z_0)}{\zeta - z_0}$ е непрекъсната върху елипсата E. От лемата на Риман следва, както при доказателството на теорема 1, че

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f(\zeta) \frac{K(\zeta, z_0) - K(z_0, z_0)}{\zeta - z_0} t_0^n u^n d\zeta = 0.$$

Редицата от функции $\{K(\zeta, z_0) k_n(\zeta, z_0)\}_{n=0}^{\infty}$ клони към нула равномерно върху всяко ограничено и затворено множество $F \subset C^1 - [-1 ; 1]$. От лемата на Шварц следва тогава, че и

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{K(\zeta, z_0) k_n(\zeta, z_0) - K(z_0, z_0) k_n(z_0, z_0)}{\zeta - z_0} = 0$$

равномерно по $\zeta \in E$. Следователно

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f(\zeta) \frac{K(\zeta, z_0) k_n(\zeta, z_0) - K(z_0, z_0) k_n(z_0, z_0)}{\zeta - z_0} t_0^n u^n d\zeta = 0,$$

понеже $|t_0 . u| = 1$ по E.

Да разгледаме по-нататък интеграла

$$I_n(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_E f(\zeta)\,\frac{t_0^n u^n-1}{\zeta-z_0}\,d\zeta.$$

От обобщената формула на Коши следва, че

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

за всяко $z\in\Delta_E$ т. е. за всяко $z_0\in E$ съществува границата

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=f(z_0)\quad(z\in\Delta_E).$$

Тогава от една основа лема на Привалов ([5], стр. 190) за интегралите от типа на Коши и от формулите на Сохоцки — Племел следва, че

$$\frac{1}{2\pi i}\,vp\int_E \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=\frac{1}{2}f(z_0)$$

за всяко $z_0\in E$. Но тогава съществува и

$$\frac{1}{2\pi i}\,vp\int_E \frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=0.$$

Следователно

$$I_n(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_E \{f(\zeta)-f(z_0)+f(z_0)\}\,\frac{t_0^n u^n-1}{\zeta-z_0}\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta-z_0}\,t_0^n u^n d\zeta+\frac{1}{2\pi i}f(z_0)\int_E \frac{t_0^n u^n-1}{\zeta-z_0}\,d\zeta,$$

където първият интеграл трябва да се разбира като несобствен и съществуването му следва от условието на теоремата. От лемата на Риман получаваме тогава, че

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E \frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta-z_0}\,t_0^n u^n d\zeta=0. \tag{16}$$

Ще покажем сега, че за всяко $n=1,2,3,\ldots$ имаме

$$j_n(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{t_0^n u^n-1}{\zeta-z_0}\,d\zeta=-1. \tag{17}$$

Наистина, като използваме означенията от доказателството на теорема 1, ще имаме

$$j_n(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E \frac{t_0^n u^n-1}{\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)-\frac{1}{2}\left(t_0+\frac{1}{t_0}\right)}\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E \frac{2(t_0^n u^n-1)\,t_0 u}{(u-t_0)(t_0 u-1)}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{n-1}\int\limits_E \frac{2t_0^{\nu+1}u^{\nu+1}}{u-t_0}\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{n-1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i(\nu+1)(\varphi-\varphi_0)}}{re^{i\varphi}-\frac{1}{r}e^{-i\varphi_0}}\left(re^{i\varphi}-\frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{n-1}e^{-i(\nu+1)\varphi_0}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\tau^\nu}{r\tau-\frac{1}{r}e^{-i\varphi_0}}\left(r\tau-\frac{1}{r\tau}\right)d\tau$$

$$=\frac{e^{-i\varphi_0}}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{1}{r\tau-\frac{1}{r}e^{-i\varphi_0}}\left(r\tau-\frac{1}{r\tau}\right)d\tau=-1.$$

От (16) и (17) получаваме, че $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(z_0)=-f(z_0)$ и от (15) следва окончателно, че $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n(f;z_0)=f(z_0)$.

§ 2. Редове по полиномите на Бесел

1. Нека m е произволно комплексно число, отлично от $0,-1,-2,\ldots$, и $\varrho_m(z)$ е регулярен клон на функцията z^m в областта $C^1-[-\infty,0]$. Полиномите на Бесел се определят чрез равенството ([5], [6])

$$P_n(m;z)=\frac{1}{\varrho_m(z)}\,e^{-\frac{1}{z}}\frac{d^n}{dz^n}\left\{\varrho_m(z)z^{2n}e^{\frac{1}{z}}\right\}. \tag{18}$$

На всеки полином $P_n(m;z)$ отговаря съответна асоциирана функция $Q_n(m;z)$. Формулата на Кристофел — Дарбу има вида

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu(m;z)\frac{\varrho_m(\zeta)Q_\nu(m;\zeta)}{I_\nu(m)h(\zeta)}+R_n(m;\zeta,z), \tag{19}$$

където

$$R_n(m;\zeta,z)=\frac{k_n(m)\varrho_m(\zeta)}{(\zeta-z)h(\zeta)}\{P_{n+1}(m;z)Q_n(m;\zeta)-P_n(m;z)Q_{n+1}(m;\zeta)\}, \tag{20}$$

$$I_n(m)=\frac{(-1)^n\Gamma(n+1)}{(m+2n+1)\Gamma(m+n+1)},$$

$$k_n(m)=\frac{(-1)^n\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(n+1)(m+2n+2)}=\frac{(-1)^n}{2}e^m n^m(1+O(1)) \tag{21}$$

и

$$h(\zeta)=\frac{\Gamma(m+2)\varrho_m(\zeta)}{m+2}\{Q_0(m;\zeta)P_1(m;\zeta)-Q_1(m;\zeta)\}.$$

За полиномите на Бесел и за асоциираните им функции са в сила следните асимптотични формули ([4], стр. 56 и 61):

(22) $$P_n(m;z)=\left(\frac{4nz}{e}\right)^n 2^{m+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\ }} (1+p_n(z)),$$

(23) $$\varrho_m(z)Q_n(m;z)=(-1)^n\left(\frac{e}{4nz}\right)^n \frac{e^{-\frac{1}{2z}}}{2^{m+\frac{3}{2}}\, zn^{m+1}} (1+q_n(z)),$$

където $p_n(z)$ и $q_n(z)$ са регулярни в областта $C^1-\{0\}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(z)=\lim\limits_{n\to+\infty} q_n(z)=0$ равномерно върху всяко ограничено и затворено множество $F\subset C^1-\{0\}$.

Функцията $h(\zeta)\neq 0$ в областта $C^1-\{0\}$. Това се установява по начин, аналогичен на този, който използвахме при доказателството, че функцията (4) е отлична от нула в областта $C^1-[-1;1]$.

От формулата на Кристофел — Дарбу (19) и от асимптотичните формули (22) и (23) следва, че всяка функция, регулярна в кръга $D:|z|<R$, се развива в ред по полиномите на Бесел

(24) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(m;z),$$

където

(25) $$a_n=\frac{1}{2\pi i I_n(m)}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\varrho_m(\zeta)Q_n(m;\zeta)}{h(\zeta)}\,d\zeta$$

и $\gamma\subset D$ е произволна гладка жорданова крива линия такава, че $\operatorname{ind}_{z=0}\gamma=+1$.

2. Ще разгледаме сега накратко и въпроса за сходимостта на ред (24) върху окръжността $C:|z|=R$.

Т е о р е м а 4. Нека $f(z)$ е регулярна в D и непрекъсната върху $\overline{D}$. Ако $f(z)$ е регулярна в някоя точка $z_0\in C$, редът на Бесел (24) е сходящ в тази точка и сумата му е равна на $f(z_0)$.

Доказателство. С означенията, които използвахме при доказателството на теорема 1, да положим $C_\delta=(C-C\cap K_\delta(z_0))\cup\lambda_\delta(z_0)$. Тогава

(26) $$\sigma_n(f;z_0)-\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu(m;z_0)=f(z_0)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta} f(\zeta)\frac{U_n(m;\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta} f(\zeta)\frac{V_n(m;\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}\,d\zeta,$$

където

(27) $$U_n(m;\zeta,z)=\frac{k_n(m)\varrho_m(\zeta)}{h(\zeta)}P_{n+1}(m;z)Q_n(m;\zeta),$$

(28) $$V_n(m;\zeta,z)=\frac{k_n(m)\varrho_m(\zeta)}{h(\zeta)}P_n(m;z)Q_{n+1}(m;\zeta).$$

От асимптотичните формули (22), (23) и равенството (21) следва, че

(29) $$U_n(m;\zeta,z_0)=\left(\frac{z_0}{\zeta}\right)^{n+1}A(\zeta,z_0)(1+a_n(\zeta,z_0))$$

и

(30) $$V_n(m;\zeta,z_0)=\frac{1}{n^2}\left(\frac{z_0}{\zeta}\right)^{n+1}B(\zeta,z_0)(1+\beta_n(\zeta,z_0)),$$

където функциите $A(\zeta,z_0)$, $B(\zeta,z_0)$, $a_n(\zeta,z_0)$ и $\beta_n(\zeta,z_0)$ са регулярни в областта $C^1-\{0\}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n(\zeta,z_0)=\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n(\zeta,z_0)=0$ равномерно върху всяко ограничено и затворено множество $F\subset C^1-\{0\}$. Следователно преди всичко

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{C_\delta} f(\zeta)\frac{V_n(m;\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}d\zeta=0.$$

Като се използва лемата на Риман, се установява, че

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{C-C\cap K_\delta(z_0)} f(\zeta)\frac{U_n(m;\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}d\zeta=0.$$

Остава да покажем, че

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{\lambda_\delta(z_0)} f(\zeta)\frac{U_n(m;\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}d\zeta=0.$$

Това следва от факта, че $U_n(m;\zeta,z_0)=O(1)$ равномерно върху $\lambda_\delta(z_0)$ и освен това за всяка дъга l, която принадлежи на $\lambda_\delta(z_0)$ заедно с краищата си, $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n(m;\zeta,z_0)=0$ равномерно върху l.

Теорема 5. Нека $f(z)$ е регулярна в кръга D и непрекъсната върху $\bar{D}$. Ако за някоя точка $z_0\in C$ съществува несобственият интеграл

$$\int\limits_C\left|\frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta-z_0}\right|ds,$$

редът (24) е сходящ в тази точка и сумата му е равна на $f(z_0)$. В частност, ако $f(z)$ удовлетворява върху окръжността C условието на Хьолдер в точката $z_0\in C$, т. е. съществуват константи M и $0<\mu\leq 1$ такива, че $|f(z)-f(z_0)|\leq M|z-z_0|^\mu$ за $z\in C$, редът (24) е сходящ в точката z_0 и сумата му е равна на $f(z_0)$.

Доказателството на теорема 5 е напълно аналогично на това на теорема 3. За целта се използва равенството

$$\sigma_n(f;z_0)=f(z_0)-f(z_0)A(z_0,z_0)(1+a_n(z_0,z_0))$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\zeta)\left(\frac{z_0}{\zeta}\right)^{n+1}\frac{A(\zeta,z_0)-A(z_0,z_0)}{\zeta-z_0}d\zeta$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\left(\frac{z_0}{\zeta}\right)^{n+1}\frac{A(\zeta,z_0)a_n(\zeta,z_0)-A(z_0,z_0)\alpha_n(z_0,z_0)}{\zeta-z_0}d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i} A(z_0, z_0)(1+\alpha_n(z_0, z_0)) \int\limits_C f(\zeta) \frac{1-\left(\frac{z_0}{\zeta}\right)^{n+1}}{\zeta - z_0} d\zeta$$

$$+f(z_0) V_n(m; z_0, z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(\zeta) \frac{V_n(m; \zeta, z_0) - V_n(m; z_0, z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

и равенството

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(\zeta) \frac{1-\left(\frac{z_0}{\zeta}\right)^{n+1}}{\zeta - z_0} d\zeta = f(z_0).$$

Последното равенство е следствие от условието на теоремата и от равенството

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{1-\left(\frac{z_0}{\zeta}\right)^{n+1}}{\zeta - z_0} d\zeta = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Байчев Ив., Върху полиномите на Якоби, Изв. на Мат. инст., т. VII, 1963, 75—88.
2. Krall H. L. and O. Frink, A new class of orthogonal polypomials: the Bessel polynomials, Trans. of the Amer. Math. Soc. 65, 1949, 100—115.
3. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Москва, 1950.
4. Обрешков Н., Върху някои ортогонални полиноми в комплексна област, Изв. на Мат. инст., т. II, кн. 1, 1956.
5. Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 1950.
6. Русев П., Развитие на аналитични функции по полиномите на Якоби, Изв. на Мат. инст., т. VII, 1963, 61—73.
7. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, Москва, 1949.

Постъпила на 16. V. 1964 г.

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЯКОБИ И БЕССЕЛЯ НА ГРАНИЦАХ ОБЛАСТЕЙ СХОДИМОСТИ

Петр Русев

(Резюме)

В работе даны достаточные условия для сходимости рядов по многочленам Якоби (8) и Бесселя (24) в точках границ областей сходимости.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ регулярна во внутренности A_E эллипса E с фокусами -1 и 1 и непрерывна на $\bar{A}_E$. Если $f(z)$ регулярна в точке $z_0 \in E$, ряд Якоби (8) сходится в этой точке и его сумма равна $f(z_0)$.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ регулярна во внутренности Δ_E эллипса E с фокусами 1 и 1 и непрерывна на $\bar{\Delta}_E$. Если существует несобственный интеграл

$$\int\limits_E \left| \frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta - z_0} \right| ds, \quad z_0 \in E,$$

то ряд (8) сходится в точке z_0 и его сумма равна $f(z_0)$.

Аналогичные результаты установлены и для рядов по многочленам Бесселя.

CONVERGENCE OF SERIES OF JACOBI AND BESSEL POLYNOMIALS ON THE BOUNDARIES OF THEIR REGIONS OF CONVERGENCE

Peter Russev

(*Summary*)

In the paper are given sufficient conditions for convergence of Jacobi (8) and Bessel (24) series on the boundaries of their regions of convergence.

Theorem 1. Let $f(z)$ be regular and single-valued in the interior Δ_E of an ellipse E with focuses at -1 and $+1$ and continuous on $\bar{\Delta}_E$. If $f(z)$ is regular at a point $z_0 \in E$, the series (8) is convergent at z_0 and $f(z_0)$ is its sum.

Theorem 3. Let $f(z)$ be regular and single-valued in the interior Δ_E of an ellipse E with focuses at -1 and $+1$ and continuous on $\bar{\Delta}_E$. If

$$\int\limits_E \left| \frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta - z_0} \right| ds, \quad z_0 \in E,$$

exists, the series (8) is convergent at z_0 and $f(z_0)$ is its sum.

Analogous results are established for series of Bessel polynomials.