БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

ВЪРХУ ИНТЕРПОЛАЦИОННИЯ ПРОЦЕС НА ФЕЙЕР

Благовест Сендов

Нека $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ е n-тият полином на Чебишов и $x_k=x_k^{(n)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ са неговите нули. Да означим

(1) $$\Phi_n(f;x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left[\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right]^2(1-xx_k),$$

където $f(x)$ е функция, дефинирана в интервала $[-1,1]$. Както е известно, $\Phi_n(f;x)$ е интерполационният полином на Ермит — Фейер от $2n-1$-ва. степен за функцията $f(x)$ и

(2) $$\Phi_n(f;x_k)=f(x_k),\ \Phi'_n(f;x_k)=0$$

$$(n=1,2,3,\ldots;\ k=1,2,3,\ldots,n).$$

Фейер доказа следната важна теорема [1] (вж. също [2], стр. 549)

Теорема 1. За всяка непрекъсната функция $f(x)$ равномерно в интервала $[-1,1]$ е в сила

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f;x)=f(x).$$

Целта на настоящата работа е да се изследва сходимостта на интерполационния процес на Фейер за една по-широка класа от функции по отношение на хаусдорфовото разстояние [3], при което се получава и едно обобщение на теорема 1. Тази по-широка класа $M[-1,1]$ се състои от всички функции $f(x)$, дефинирани в интервала $[-1,1]$, които имат лява и дясна граница за всяко $x\in(-1,1)$, непрекъснати са в граничните точки на дефиниционния интервал, т. е.

(3) $$f(-1+0)=f(-1),\ f(1-0)=f(1),$$

и за всяко $x\in(-1,1)$ числото $f(x)$ се намира между $f(x-0)$ и $f(x+0)$.

Съвкупността от функции $M[-1,1]$ ще характеризираме по друг начин, като използваме понятието модул на немонотонност [4].

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в интервала Δ, и нека $x_1\leqq x\leqq x_2$ са три произволни числа от Δ. Модул на немонотонност на функцията $f(x)$ наричаме монотонната функция

$$\mu(\delta)=\sup_{x_1-x_2 \le \delta}\left\{\sup_{x_1 \le x \le x_2}\left[|f(x_1)-f(x)|+|f(x_2)-f(x)|\right]-|f(x_1)-f(x_2)|\right\}.$$

Очевидно модулът на немонотонност на една монотонна функция е тъждествено равен на нула.

Ще казваме, че една функция $f(x)$ е локално монотонна [4], ако за модула ѝ на немонотонност е изпълнено равенството

$$\lim_{\delta\to 0}\mu(\delta)=\mu(0)=0. \tag{4}$$

В [4] е доказана следната

Теорема 2. Необходимото и достатъчно условие функцията $f(x)$, дефинирана в крайния интервал Δ, да бъде локално монотонна е:

1) за всяка вътрешна точка x на Δ да съществуват $f(x-0)$ и $f(x+0)$, а в краищата на $\Delta=[a,b]$ да съществуват съответно $f(a+0)$ и $f(b-0)$;

2) за всяка вътрешна точка x на Δ числото $f(x)$ да се намира между $f(x-0)$ и $f(x+0)$.

От теорема 2 получаваме

Следствие 1. Една функция $f(x)$ принадлежи на $M[-1,1]$ тогава и само тогава, когато тя е локално монотонна и непрекъсната в краищата на интервала $[-1,1]$ (изпълнени са равенствата (3)).

Както в [5] и [6], на всяка функция $f(x)\in M[-1,1]$ ще съпоставим една точкова съвкупност $\bar{f}$ по следния начин. Една точка $X(x,y)$ принадлежи на $\bar{f}$ тогава и само тогава, когато $x\in[-1,1]$ и y се намира между $f(x-0)$ и $f(x+0)$ (за $x=\pm 1$ $y=f(\pm 1)$). Ако $f(x)$ е непрекъсната функция, очевидно $\bar{f}$ е графиката на $f(x)$ в интервала $[-1,1]$.

Под хаусдорфово разстояние между две функции $f(x)$ и $g(x)$ от $M[-1,1]$ ще разбираме [3] числото

$$r(f,g)=\max\left[\max_{X\in\bar{f}}\min_{Y\in\bar{g}}\|X-Y\|_0,\ \max_{X\in\bar{g}}\min_{Y\in\bar{f}}\|X-Y\|_0\right],$$

където

$$\|X-Y\|_0=\|X(x_1,y_1)-Y(x_2,y_2)\|_0=\max[|x_1-x_2|,|y_1-y_2|].$$

В [3] е доказана следната

Теорема 3. Ако $f(x)$ е непрекъсната функция и $\{f_n(x)\}$ е редица от непрекъснати функции в интервала Δ, за които

$$\lim_{n\to\infty} r(f_n,f)=0,$$

то равномерно в интервала Δ

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

По-долу ще докажем

Теорема 4. Ако $f(x)\in M[-1,1]$ и $\Phi_n(f;x)$ е интерполационният полином (1), то

$$\lim_{n\to\infty} r(\Phi_n,f)=0,$$

Теорема 4 съгласно с теорема 3 е обобщение на теорема 1, тъй като всяка непрекъсната функция принадлежи на $M[-1,1]$, а съвкупността $M[-1,1]$ съдържа и функции, които не са непрекъснати.

По-нататък ще предполагаме, че ако $\mu(\delta)$ е модулът на немонотонност на $f(x)\in M[-1,1]$, то

$$\sup_{|1+x|\leq\delta}|f(-1)-f(x)|\leq\mu(\delta), \tag{5}$$

$$\sup_{|1-x|\leq\delta}|f(1)-f(x)|\leq\mu(\delta).$$

Съгласно с (3) неравенствата (5) не налагат фактически никакво ограничение на по-нататъшните резултати, тъй като модулът на немонотонност може да се коригира така, че да се удовлетворят неравенствата (5) и равенствата (4).

Преди да пристъпим към доказателството на теорема 4, ще докажем няколко леми.

Лема 1. Съществува абсолютна константа c_1 такава, че за всяко натурално n, $\delta>\frac{\pi^2}{n}$ и $x\in[-1,1]$ е в сила неравенството

$$R_n(\delta,x)=\sum_{k\in J(x)}\left[\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right](1-xx_k)\leq\frac{c_1}{n\delta},$$

където $J(x)$ е съвкупността от тези k от 1 до n, за които

$$|x-x_k|>\delta;\quad x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi. \tag{6}$$

Доказателство. Нека x е фиксирано число в интервала $[-1,1]$. Да означим с s най-голямото цяло положително число, за което $\cos\frac{2s-1}{2n}\pi>x+\delta$, и с p най-малкото цяло положително число, за което $\cos\frac{2p-1}{2n}\pi<x-\delta$ (когато $x+\delta\geq\cos\frac{\pi}{2n}$ или $x-\delta\leq\cos\frac{2n-1}{2n}\pi$, съответно такова s или p не съществува и ще считаме стойността на символа, в който то участвува, равен на нула). При тези означения имаме

$$R_n(\delta,x)=\left(\sum_{k=1}^{s}+\sum_{k=p}^{n}\right)\left[\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right]^2(1-xx_k) \tag{7}$$

$$\leq\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{s}+\sum_{k=p}^{n}\right)\frac{1-xx_k}{(x-x_k)^2}=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{s}+\sum_{k=p}^{n}\right)\frac{1-\cos\theta\cos\theta_k}{(\cos\theta-\cos\theta_k)^2},$$

където $x=\cos\theta, \theta_k=\frac{2k-1}{2n}\pi$. Съгласно с (6) $|\cos\theta-\cos\theta_k|>\delta$, или

$$|\theta-\theta_k|>\frac{\delta}{\pi},\quad |\theta+\theta_k|>\frac{\delta}{\pi} \tag{8}$$

за $1\leq k\leq s$ и $p\leq k\leq n$.

Лесно се вижда, че функцията

$$\varphi(t)=\frac{1-\cos\theta\cos t}{(\cos\theta-\cos t)^2},\ (0\leqq t\leqq\pi),$$

е монотонно растяща при $\cos t>\cos\theta$ и монотонно намаляваща при $\cos t<\cos\theta$. Следователно при $1\leqq k\leqq s$

$$\frac{1-\cos\theta\cos\theta_k}{(\cos\theta-\cos\theta_k)^2}\leqq\frac{1-\cos\theta\cos t}{(\cos\theta-\cos t)^2}\quad\text{за}\quad\theta_k\leqq t\leqq\theta_{k+1},$$

или

$$\text{(9)}\qquad \frac{1-\cos\theta\cos\theta_k}{(\cos\theta-\cos\theta_k)^2}\leqq\frac{n}{\pi}\int\limits_{\theta_k}^{\theta_{k+1}}\frac{1-\cos\theta\cos t}{(\cos\theta-\cos t)^2}\,dt.$$

Аналогично се проверява, че при $p\leqq k\leqq n$ имаме

$$\text{(10)}\qquad \frac{1-\cos\theta\cos\theta_k}{(\cos\theta-\cos\theta_k)^2}\leqq\frac{n}{\pi}\int\limits_{\theta_{k=1}}^{\theta_k}\frac{1-\cos\theta\cos t}{(\cos\theta-\cos t)^2}\,dt.$$

От (7) съгласно с (9) и (10) получаваме

$$R_n(\delta,x)\leqq\frac{1}{n\pi}\left(\int\limits_{\theta_1}^{\theta_{s+1}}+\int\limits_{\theta_{p-1}}^{\theta_n}\right)\frac{1-\cos\theta\cos t}{(\cos\theta-\cos t)^2}\,dt$$

$$=\frac{\pi^3(1-\cos\theta)}{32\,n\,\theta}\ln\frac{|\theta_1-\theta|\,|\theta_n-\theta|\,|\theta_{s+1}+\theta|\,|\theta_{p-1}-\theta|}{|\theta_1+\theta|\,|\theta_n-\theta|\,|\theta_{s+1}-\theta|\,|\theta_{p-1}+\theta|}$$

$$+\frac{\pi^3(1+\cos\theta)}{32n}\left[\frac{1}{\theta_1-\theta}+\frac{1}{\theta_1+\theta}-\frac{1}{\theta_{s+1}-\theta}-\frac{1}{\theta_{s+1}+\theta}-\frac{1}{\theta_n-\theta}-\frac{1}{\theta_n+\theta}+\frac{1}{\theta_{p-1}-\theta}+\frac{1}{\theta_{p-1}+\theta}\right].$$

От последното съгласно с (8) намираме

$$R_n(\delta,x)\leqq\frac{\pi^3(1-\cos\theta)}{8n\,\theta}\left[\ln\frac{n\pi}{n\delta-\pi^2}+\ln 2\pi\right]$$

$$+\frac{\pi^3(1+\cos\theta)}{16n}\left[\frac{\pi}{\delta}+\frac{n\pi}{n\delta-\pi^2}\right]$$

$$\leqq\frac{\pi^4}{16n}\ln\frac{2n\pi^2}{n\delta-\pi^2}+\frac{\pi^3}{4}\frac{1}{n\delta-\pi^2}.$$

Тъй като $\delta>\frac{\pi^2}{n}$ и $\ln t<t$, от последното получено неравенство следва, че съществува константа c_1, независеща от n δ и x, за която

$$R_n(\delta,x)\leqq\frac{c_1}{n\delta}.$$

С това лемата е доказана.

Ще ни бъде необходима една елементарна лема, която е доказана в [4] и тук ще я приведем без доказателство.

Лема 2. Нека $f(x)$ е локално монотонна функция в интервала Δ с модул на немонотонност $\mu(\delta)$. Нека $x_0 \in \Delta$ и интервалите $\Delta_1=[x_0-\delta, x_0]$, $\Delta_2=[x_0, x_0+\delta]$ се съдържат в Δ. Да означим с y_0 кое да е число между $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$. Тогава неравенството

$$f(x) \geqq y_0 - \frac{1}{2}\mu(2\delta)$$

е изпълнено или за всяко $x \in \Delta_1$, или за всяко $x \in \Delta_2$ и неравенството

$$f(x) \leqq y_0 + \frac{1}{2}\mu(2\delta)$$

е изпълнено или за всяко $x \in \Delta_1$, или за всяко $x \in \Delta_2$.

Ще преминем към доказателството на

Лема 3. Нека $f(x) \in M[-1, 1]$ и има модул на немонотонност $\mu(\delta)$. Ако $X(x', y')$ е произволна точка от $\bar{f}$, то каквото и да е $\delta > \frac{\pi^2}{n}$, може да се намери точка $Y(x'', y'')$ от графиката на полинома $\Phi_n(f; x)$, за която

$$\| X - Y \|_0 \leq \max\left[\delta, 2\mu(4\delta) + \frac{2Bc_1}{n\delta}\right],$$

където c_1 е константата от лема 1, а $B = \sup\limits_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че за всяко число $x' \in [-1, 1]$ може да се намери точка $x'' \in [x'-\delta, x'+\delta] \cap [-1, 1]$ такава, че, каквото и да е числото y' между $f(x'-0)$ и $f(x'+0)$, да бъде удовлетворено неравенството

$$|y' - \Phi_n(f; x'')| \leqq 2\mu(4\delta) + \frac{2Bc_1}{n\delta}. \tag{11}$$

Ако $x' \in [-1, -1+2\delta]$, за точка x'' може да се вземе $x'' = x_n = \cos\frac{2n-1}{2n}\pi$. Действително съгласно с (2) за всяко y' между $f(x'-0)$ и $f(x'+0)$ имаме

$$|y' - \Phi_n(f; x_n)| \leqq |y' - f(-1)| + |f(-1) - f(x_n)|$$
$$+ |f(x_n) - \Phi_n(f; x_n)| \leqq 2\mu(2\delta),$$

следователно в този случай (11) е удовлетворено. По същия начин се разглежда случаят, когато $x \in [1-2\delta, 1]$.

Нека $x' \in [-1+2\delta, 1-2\delta]$; тогава съгласно с лема 2 или за всяко $x \in \Delta_1 = [x'-2\delta, x']$, или за всяко $x \in \Delta_2 = [x', x'+2\delta]$ е изпълнено неравенството

$$f(x) \geqq y' - \frac{1}{2}\mu(4\delta). \tag{12}$$

Нека (12) е удовлетворено в Δ_i и да означим

$$\lambda = \begin{cases} -1, & \text{ако } i=1, \\ 1, & \text{ако } i=2. \end{cases}$$

Като вземем пред вид лема 1 и тъждеството

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{n} \psi_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right](1-xx_k)=1,$$

получаваме последователно

$$\Phi_n(f;x'+\lambda\delta)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\psi_{n,k}(x'+\lambda\delta)$$

$$\geq \sum_{k\in A(x'+\lambda\delta)} \left|y'-\frac{1}{2}\mu(4\delta)\right| \psi_{n,k}(x'+\lambda\delta)-B \sum_{x\in A(x'+\lambda\delta)} \psi_{n,k}(x'+\lambda\delta)$$

$$\geq \left|y'-\frac{1}{2}\mu(4\delta)\right| \sum_{k=1}^{n} \psi_{n,k}(x'+\delta)-2B \sum_{x\in A(x'+\lambda\delta)} \psi_{n,k}(x'+\lambda\delta),$$

или

$$(14) \qquad \Phi_n(f;(x'+\lambda\delta)\geq y'-\frac{1}{2}\mu(4\delta)-\frac{2Bc_1}{n\delta}.$$

Аналогично се доказва, че

$$(15) \qquad \Phi_n(f;x'+\nu\delta)\leq y'+\frac{1}{2}\mu(4\delta)+\frac{2Bc_1}{n\delta},$$

където $\nu=1$ или -1.

Ако $\lambda=\nu$, от (14) и (15) получаваме,

$$y'-\Phi_n(f;x'+\lambda\delta) \leq \frac{1}{2}\mu(4\delta)+\frac{2Bc_1}{n\delta}$$

и следователно (11) е удовлетворено за $x''=x'+\lambda\delta$.

Ако $\lambda=-\nu$, от непрекъснатостта на $\Phi_n(f;x)$ и от (14) и (15) следва, че съществува точка $x''\in[x'-2\delta,x'+2\delta]$, за която

$$y'-\Phi_n(f;x'') \leq \frac{1}{2}\mu(4\delta)+\frac{2Bc_1}{n\delta},$$

откъдето пак следва (11).

Лема 4. Ако $X(x',y')$ е произволна точка от графиката на $\Phi_n(f;x)$ в интервала $[-1,1]$, за всяко число $\delta>\frac{\pi_2}{n}$ може да се намери точка $Y(x'',y'')$, за която

$$\|X-Y\|_0\leq \max\left[\delta,\frac{2Bc_1}{n\delta}\right],$$

където c_1 е константата от лема 1, а $B=\sup\limits_{-1\leq x\leq 1}|f(x)|$.

Доказателство. Да дефинираме в интервала $[-1,1]$ функцията

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x) & \text{за } x\in[x'-\delta,x'+\delta],\\ f(x') & \text{за } x\in[x'-\delta,x'+\delta].\end{cases}$$

За нея са удовлетворени очевидно следните неравенства за всяко $x \in [-1, 1]$:

(16) $$y_1 = \inf_{-\delta \le t \le \delta} f(x'+t) \le f_1(x) \le \sup_{-\delta \le t \le \delta} f(x'+t) = y_2.$$

Ако означим $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$, то

(17) $$f_2(x) = 0$$

за $y \in [x'-\delta, x'+\delta]$ и

(18) $$\sup_{-1 \le x \le 1} |f_2(x)| \le 2 \sup_{-1 \le x \le 1} |f(x)| = 2B.$$

Тогава

(19) $$\Phi_n(f; x') = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \left[\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right]^2 (1 - xx_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \psi_{n,k}(x') = \sum_{k=1}^{n} f_1(x_k) \psi_{n,k}(x') + \sum_{k=1}^{n} f_2(x_k) \psi_{n,k}(x')$$

и съгласно с (16) и (13) за всяко число $x' \in [-1, 1]$

$$y_1 \le \sum_{k=1}^{n} f_1(x_k)\, \psi_{n,k}(x') \le y_2.$$

Но тъй като $\bar{f}$ е затворена и свързана точкова съвкупност, от последните неравенства и (16) следва съществуването на точка $Y(x'', y'') \in \bar{f}$, за която

(20) $$x'' \in [x'-\delta, x'+\delta] \text{ и } y'' = \sum_{k=1}^{n} f_1(x_k) \psi_{n,k}(x').$$

Като заместим y'' от (20) в (19) и вземем пред вид (17) и (18), получаваме

$$\Phi_n(f; x') - y'' \le \sum_{k \in \Delta(x')} f_2(x_k)\, \psi_{n,k}(x')$$

$$\le 2B \sum_{k \in \Delta(x')} \psi_{n,k}(x').$$

От последното съгласно с лема 1 следва

(21) $$|\Phi_n(f; x') - y''| \le \frac{2Bc_1}{n\delta}.$$

Верността на лемата следва непосредствено от (20) и (21).

От лема 3 и лема 4 получаваме

Теорема 5. Нека $f(x)$ е локално монотонна функция в интервала $[-1, 1]$ с модул на немонотонност $\mu(\delta)$ и нека $\Phi_n(f; x)$ е интерполационният полином на Ермит — Фейер, дефиниран с равенството (1). Тогава за всяко число $\delta > \frac{\pi^2}{n}$ имаме

$$(22) \qquad r(f, \Phi_n) \leq \max\left[\delta, 2\mu(4\delta) + \frac{2Bc_1}{n\delta}\right],$$

където c_1 е константата от лема 1, а $B = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$

Доказателство. Съгласно с лема 3 каквато и да е точката $X \in \bar{f}$ имаме

$$\min_{Y \in \bar{\Phi}_n} \|X - Y\|_0 \leq \max\left[\delta, 2\mu(4\delta) + \frac{2Bc_1}{n\delta}\right];$$

но тогава и

$$(23) \qquad \max_{X \in \bar{f}} \min_{Y \in \bar{\Phi}_n} \|X - Y\|_0 \leq \max\left[\delta, 2\mu(4\delta) + \frac{2Bc_1}{n\delta}\right].$$

Аналогично от лема 4 се получава, че

$$(24) \qquad \max_{X \in \bar{\Phi}_n} \min_{Y \in \bar{f}} \|X - Y\|_0 \leq \max\left[\delta, \frac{2Bc_1}{n\delta}\right].$$

От (23) и (24) следва (22).

Ако в (22) поставим $\delta = \frac{1}{4\sqrt{n}}$, получаваме без труд следната

Теорема 6. Ако $f(x) \in M[-1, 1]$ с модул на немонотонност $\mu(\delta)$ и $\Phi_n(f; x)$ е интерполационният полином на Ермит — Фейер, то съществува константа c_2, независеща от n и такава, че

$$r(f, \Phi_n) \leq c_2 \mu\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

ако $\mu(\delta) \geqq \delta$, и

$$r(f, \Phi_n) \leq c_2 \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ако $\mu(\delta) \leqq \delta$.

От доказаната теорема 6 следва верността на теорема 4, тъй като за функциите от $M[-1, 1]$ е в сила (4).

Ще формулираме още едно следствие от теорема 5.

Теорема 7. Нека $f(x) \in M[-1, 1]$ и $\Phi_n(f; x)$ е интерполационният полином (1). Ако модулът на немонотонност $\mu(\delta)$ на $f(x)$ удовлетворява неравенството $\mu(\delta) \leq k\delta^a$, където $k > 0$, $0 < a \leqq 1$, съществува константа c_3, независеща от n и такава, че

$$r(f, \Phi_n) \leq c_3 \, n^{-\frac{a}{1+a}}$$

Доказателство. Достатъчно е да се постави в (22) $\delta = n^{-\frac{1}{1+a}}$ и да се използва, че $\mu(\delta) \leq k\delta^a$.

От теорема 6 получаваме непосредствено

Следствие 2. Ако $f(x)$ е монотонна функция в интервала $[-1, 1]$, за която $f(-1+0) = f(-1)$, $f(1-0) = f(1)$, и $\Phi_n(f; x)$ е интерполационният полином (1), може да се намери константа c_4, независеща от n, за която

$$r(f, \Phi_n) \leq c_4 \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ще докажем, че оценката в следствие 2 не може да се подобри по отношение на порядъка. Действително да разгледаме функцията

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ за } -1\leqq x<0,\\ 0 \text{ за } 0\leqq x\leqq 1.\end{cases}$$

За полинома $\Phi_n(f;x)$ на Ермит — Фейер за тази функция имаме

$$\Phi_n(f;x)=\sum_{k=s+1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right|^2(1-xx_k), \tag{25}$$

където $s=\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Ще докажем, че съществува константа c_5, независеща от n, за която

$$r(f,\Phi_n)\geqq c_5\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{26}$$

За това е достатъчно да покажем, че има точка $X(x',y')$ от графиката на $\Phi_n(f;x)$, за която

$$x'\geqq\frac{c_5}{\sqrt{n}};\ y'=\Phi(f,x')\geqq\frac{c_5}{\sqrt{n}}. \tag{27}$$

Действително, ако неравенствата (27) са изпълнени, тогава за всяка точка $Y(x'',y'')$ от $\bar{f}$ ще имаме

$$\|X-Y\|_0=\max[|x'-x''|,|y'-y''|]\geqq\frac{c_5}{\sqrt{n}}$$

и следователно (26) ще бъде удовлетворено.

Нека p е цяло положително число и $p\leqq s=\left[\frac{n+1}{2}\right]$; тогава за $x=x'_p=\cos\frac{p}{n}\pi$ от (25) получаваме

$$\Phi_n(f;x)=\sum_{k=s+1}^{n}\frac{1-x'_px_k}{n^2(x'_p-x_k)^2}\geqq\frac{1}{n^2}\sum_{k=s+1}^{n}\left(\cos\frac{p}{n}\pi-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)^{-2}$$

$$\geqq\frac{1}{4\pi^4n^2}\sum_{k=s+1}^{n}\left(\frac{2k+2p-1}{4n}\right)^{-2}\left(\frac{2k-2p-1}{4n}\right)^{-2}$$

$$\geqq\frac{4}{\pi^4}\sum_{k=s+1}^{n}\frac{1}{(2k-2p+1)^2}\geqq\frac{4}{\pi^4}\sum_{k=s+1}^{n}\frac{1}{(2k-2p+1)(2k-2p+3)}$$

$$=\frac{2}{\pi^4}\left(\frac{1}{2s-2p+3}-\frac{1}{2n-2p+3}\right),$$

или

$$\Phi_n(f;x'_p)\geqq\frac{2}{\pi^4}\left(\frac{1}{n-2p+4}-\frac{1}{2n-2p+3}\right).$$

Ако $p>2$, от последното получаваме

(28) $$\Phi_n(f;x'_p) > \frac{1}{\pi^4}\cdot\frac{1}{n-2p+4}$$

Ако поставим $p=\left[\frac{n-\sqrt{n}}{2}\right]$, то

$$x'=x'_p=\cos\frac{p}{n}\pi > \cos\frac{n-\sqrt{n}}{2n}\pi=\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}} \quad \frac{2}{\sqrt{n}}$$

От друга страна, съгласно с (28) имаме

$$\Phi_n(f;x')\geqq\frac{1}{\pi^4}\cdot\frac{1}{n-2\left[\frac{n-\sqrt{n}}{2}\right]+4} > \frac{1}{\pi^4(\sqrt{n}+5)}$$

и следователно съществува константа $c_5>0$ такава, че за всяко натурално n

$$\Phi_n(f;x') > \frac{c_5}{\sqrt{n}}\,.$$

С това неравенствата (27) са доказани.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fejér L., Über Interpolation, Gött. Nachr., 1916, 66—91.
2. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Москва, 1949.
3. Сендов Бл. и Б. Пенков, ε-ентропия и ε-капацитет на пространството от непрекъснатите функции, Изв. на Мат. инст. при БАН, т. VI, 1962, 27—50.
4. Сендов Бл., Върху някои линейни методи за апроксимиране на периодични функции относно хаусдорфово разстояние (под печат).
5. Сендов Бл., Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип, Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., 55, 1960/61, кн. 1, 1—39.
6. Сендов Бл., Об одной оценке приближения функций многочленами С. Н. Бернштейна (под печат).

Постъпила на 20. VII. 1964 г.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ ФЕЙЕРА

Благовест Сендов

(Резюме)

Пусть $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ многочлен Чебышева. Обозначим через

(1) $$\Phi_n(f;x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left[\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right]^2(1-xx_k)$$

интерполяционный многочлен Эрмита Фейера для функции $f(x)$, где $x_k=x_k^{(n)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\ (k=1,2,3,\ldots,n)$ узлы Чебышева.

Хорошо известна теорема Фейера [1]: если $f(x)$ непрерывная функция, заданная на $[-1,1]$, то равномерно на $[-1,1]$ имеет место

(2) $$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(f; x)=f(x).$$

Автор обобщает этот результат Фейера, рассматривая более широкий класс функций чем непрерывные функции и вводя сходимость относительно хаусдорфовского расстояния. Используется тот факт, что сходимость непрерывных функций относительно хаусдорфовского расстояния влечет за собой равномерную сходимость, если известно, что предел этой последовательности является непрерывной функцией [3].

Вводится понятие модуль немонотонности $\mu(\delta)=\mu(f;\delta)$ функции $f(x)$ на отрезке Δ следующим образом:

$$\mu(\delta)=\sup_{|x_1-x_2|\le\delta}\{\sup_{x_1\le x\le x_2}[\,|f(x_1)-f(x)|+|f(x_2)-f(x)|\,]-|f(x_1)-f(x_2)|\},$$

где $x_1, x, x_2 \in \Delta$ и $x_1\le x_2$.

Обозначим через $M[-1,1]$ класс функций $f(x)$, заданных на отрезке $[-1,1]$, для которых

(3) $$\lim_{\delta\to 0}\mu(f;\delta)=0$$

и

$$|f(-1)-f(x)|\le\mu(|-1-x|),\quad |f(1)-f(x)|\le\mu(|1-x|).$$

В класс $M[-1,1]$ входят кроме все непрерывные функции еще и разрывные функции, например все монотонные функции, для которых только $f(-1+0)=f(-1)$ и $f(1-0)=f(1)$.

В работе доказана

Т е о р е м а. Если $f(x)\in M[-1,1]$ с модулем немонотонности $\mu(\delta)$ и $\Phi_n(f;x)$ интерполяционный многочлен (1), то существует константа $c>0$, независящая от n, такая, что для хаусдорфовского расстояния $r(f,\Phi_n)$ между $f(x)$ и $\Phi_n(f,x)$ имеют место следующие неравенства:

$$r(f,\Phi_n)\le c\mu\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

если $\mu(\delta)\ge\delta$.

$$r(f,\Phi_n)\le\frac{c}{\sqrt{n}},$$

если $\mu(\delta)\le\delta$ и

$$r(f,\Phi_n)\le cn^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

если $\mu(\delta)\le k\delta^\alpha$, где $k>0$ и $0<\alpha\le 1$.

В силу (3) для всех $f(x)\in M[-1,1]$ имеет место

(4) $$\lim_{n\to\infty} r(f,\Phi_n)=0.$$

А если $f(x)$ непрерывная функция, то из (4) следует результат Фейера (2).

ÜBER DEM FÉJERSCHEM INTERPOLATIONSPROZESS

Blagowest Sendov

(Zusammenfassung)

Es sei $T_n(x)=\cos(n \arccos x)$ ein Tschebyscheffsches Polynom. Wir bezeichnen mit

(1) $$\Phi_n(f;x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left|\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right|^2(1-xx_k)$$

das Interpolationspolynom von Hermite-Fejér der Funktion $f(x)$, wobei x_k $x_k^{(n)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\ (k=1,2,3,\ldots,n)$ die Tschebyscheffschen Interpolationsknoten sind.

Gut bekannt ist der folgende Satz von Fejér [1]: ist $f(x)$ eine im Intervall $[-1,1]$ definierte und stetige Funktion, dann gilt in $[-1,1]$ gleichmäßig

(2) $$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f;x)=f(x).$$

Der Verfasser verallgemeinert dieses Resultat auf eine Funktionenklasse, die breiter als diejenige der stetigen Funktionen ist, indem er den Konvergenzbegriff bezüglich des Hausdorffschen Abstandes einführt. Man benutzt dabei die Tatsache, daß aus der Konvergenz der stetigen Funktionen bezüglich des Hausdorffschen Abstandes die gleichmäßige Konvergenz dieser Funktionen folgt, falls bekannt ist, daß der Grenzwert dieser Folge eine stetige Funktion ist [3].

Man führt den Begriff des Moduls der Nichtmonotonie $\mu(\delta)=\mu(f;\delta)$ der Funktion $f(x)$ im Intervalle Δ auf folgende Weise ein:

$$\mu(\delta)=\sup_{|x_1-x_2|\leq\delta}\left\{\sup_{x_1\leq x\leq x_2}\left[\,|f(x_1)-f(x)|+|f(x_2)-f(x)|\,\right]-|f(x_1)-f(x_2)|\right\},$$

worin x_1, x, x_2 und $x_1 \leq x_2$ sind.

Man bezeichnet mit $M[-1,1]$ die Klasse der im Intervalle $[-1,1]$ definierten Funktionen $f(x)$, für welche

$$\lim_{\delta\to 0}\mu(f;\delta)=0$$

und

$$|f(-1)-f(x)|\leq\mu(|-1-x|),\quad |f(1)-f(x)|\leq\mu(|1-x|)$$

gilt.

In der Klasse $M[-1,1]$ sind alle stetigen, aber auch gewisse nichtstetige Funktionen, z. B. alle monotone Funktionen, für die nur $f(-1)=f(-1+0)$ und $f(1)=f(1-0)$ gilt, enthalten.

In der Arbeit wird bewiesen:

Satz: Es sei $f(x)\in M[-1,1]$, $\mu(\delta)$ ihr Modul der Nichtmonotonie und (1) $\Phi_n(f;k)$ das entsprechende Interpolationspolynom. Dann existiert eine von

n unabhängige Konstante $c>0$, so daß für den Hausdorffschen Abstand $r(f, \Phi_n)$ zwischen $f(x)$ und $\Phi_n(f; x)$ folgende Ungleichungen gelten:

$$r(f, \Phi_n) \leq c\mu\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

falls $\mu(\delta) \geq \delta$;

$$r(f, \Phi_n) \leq \frac{c}{\sqrt{n}},$$

falls $\mu(\delta) \leq \delta$ und

$$r(f, \Phi_n) \leq cn^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

falls $\mu(\delta) \leq k\delta^{\alpha}$, wobei $k>0$ und $0<\alpha\leq 1$.

Aus (3) folgt für alle $f(x) \in M[-1, 1]$, daß

$$\lim_{n\to\infty} r(f, \Phi_n) = 0 \tag{4}$$

gilt.

Wenn $f(x)$ eine stetige Funktion ist, dann folgt aus (4) der Satz von Fejér (2).