БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

РЕДОВЕ ПО ОБОБЩЕНИТЕ ПОЛИНОМИ НА БЕСЕЛ

Иван Байчев

Обобщените полиноми на Бесел се дават с равенството

$$P_n^{(m)}(z)=z^{-m}e^{-\frac{1}{z}}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{m+2n}e^{\frac{1}{z}}\right)\quad (n=0,1,2,\ldots),$$

където $m\neq-2,-3,\ldots$ е произволно комплексно число.

В настоящата работа се разглеждат редове от вида

$$(1)\qquad a_0P_0^{(m)}(z)+a_1P_1^{(m)}(z)+\cdots+a_nP_n^{(m)}(z)+\cdots,$$

за които се установява твърдение, аналогично на теоремата на Фату за сходимост на степенните редове по дъга от окръжността на сходимост.

Както е известно [1], редове от вида (1) притежават кръг и радиус на сходимост и в това отношение са подобни на степенните редове. Аналогично на формулата на Коши — Адамар за степенните редове за радиуса на сходимост ϱ на реда (1) имаме

$$\frac{1}{\varrho}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{4n}{e}\right)\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Нека редът (1) има радиус на сходимост $\varrho=1$. Неговата сума $f(z)$ е холоморфна функция в кръга $|z|<1$. Може обаче да се случи $f(z)$ да бъде холоморфна и върху някоя дъга от окръжността $|z|=1$ и въпреки това редът да бъде разходящ за всяка точка от тази дъга.

Например сумата на реда

$$\frac{1}{1-z}=\sum_0^\infty c_nP_n^{(m)}(z),$$

където

$$c_n=\sum_{\nu=0}^\infty\binom{n+\nu}{\nu}\frac{(m+2n+1)\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+2n+\nu+2)}\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

е холоморфна за всяко $z\neq1$, докато редът вдясно е разходящ за всяка точка от единичната окръжност.

Действително, като вземем под внимание асимптотичната формула

(2) $$P_n^{(m)}(z)=\left(\frac{4n}{e}\right)^n z^n 2^m\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2z}}(1+\varepsilon_n),$$

където $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$ равномерно за $|z|>\delta>0$ ([1], стр. 56), получаваме лесно, че при $|z|=1$

$$\lim_{n\to\infty}|c_nP_n^{(m)}(z)|=|e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z}\right)}|\neq 0.$$

За да бъде редът (1) сходящ в някоя точка z от окръжността $|z|=1$, необходимо е да имаме

$$\lim_{n\to\infty}|a_nP_n^{(m)}(z)|=0,$$

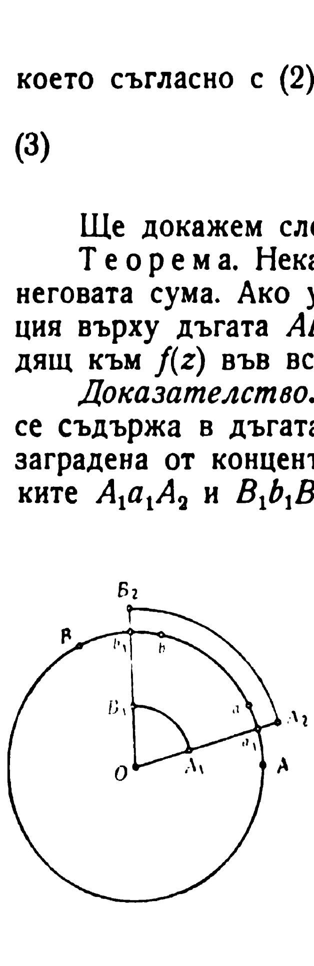
което съгласно с (2) е равносилно на

(3) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{e}\right)^n|a_n|=0.$$

Ще докажем следната

Теорема. Нека $|z|<1$ е кръгът на сходимост на реда (1) и $f(z)$ е неговата сума. Ако условието (3) е изпълнено и $f(z)$ е холоморфна функция върху дъгата AB от окръжността $|z|=1$, редът (1) е равномерно сходящ към $f(z)$ във всички вътрешни точки на дъгата AB.

Доказателство. Нека дъгата a_1b_1 от окръжността $|z|=1$ (фиг. 1) се съдържа в дъгата AB и съдържа дъгата ab. Да означим с G областта, заградена от концентричните на дъгата a_1b_1 дъги A_1B_1 и A_2B_2 и отсечките $A_1a_1A_2$ и $B_1b_1B_2$, като радиусът $r_0>0$ на дъгата A_1B_1 е по-малък от единица, а радиусът $R_0>1$ на дъгата A_2B_2 е така избран, че $f(z)$ е холоморфна в затворения сектор $0A_2B_2$.



Фиг. 1

Да положим

$$S_n(z)=a_0P_0^{(m)}(z)+a_1P_1^{(m)}(z)+\cdots+a_nP_n^{(m)}(z).$$

Функцията

$$\varphi_n(z)=\frac{f(z)-S_n(z)}{z^{n+1}}(z-a_1)(z-b_1)$$

е холоморфна в затворената област $\overline{G}$. Ще покажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова независещо от z число N, че при $n>N$ и $z\in\overline{G}$

$$|\varphi_n(z)|<\varepsilon.$$

Съгласно с принципа за максимума достатъчно е да установим това неравенство само върху контура на G.

Нека n_0 е така избрано, че при $n>n_0$ във формулата (2) да имаме $|\varepsilon_n|<1$. Числото n_0 не зависи от z поради равномерното клонене към нула на ε_n при $n\to\infty$ и $z\in\overline{G}$.

В $\overline{G}$

$$|2^{m+1}\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2z}}|<A_m,$$

където A_m е фиксирано число. Тогава при $n>n_0$ и $z\in\bar{G}$

$$|P_n^{(m)}(z)|<A_m\left(\frac{4n}{e}\right)^n|z|^n.$$

Освен това поради условието (3), ако $\eta>0$ е произволно, при $n>n_1$

$$\left(\frac{4n}{e}\right)^n|a_n|<\eta,$$

като можем да считаме $n_1>n_0$. Следователно при $n>n_1$ и $z\in\bar{G}$ имаме

(4) $$|a_nP_n^{(m)}(z)|<A_m\eta|z|^n.$$

Върху дъгата A_1B_1 $|z|=r_0<1$ и при $n>n_1$ получаваме с помощта на (4)

$$|f(z)-s_n(z)|=|\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n+\nu+1}P_{n+\nu+1}^{(m)}(z)|$$

$$\leq\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n+\nu+1}P_{n+\nu+1}^{(m)}(z)|<A_m\eta r_0^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}r_0^{\nu}=A_m\eta\frac{r_0^{n+1}}{1-r_0}\cdot$$

Понеже $|z-a_1|<2$, $|z-b_1|<2$,

(5) $$|\varphi_n(z)|<A_m\eta\frac{4}{1-r_0}\cdot$$

Тъй като $\varphi_n(a_1)=0$, върху отсечката A_1a_1 можем да считаме $|z|=r<1$. Тогава $|z-a_1|=1-r$, $|z-b_1|<2$ и при $n>n_1$

$$|f(z)-S_n(z)|<A_m\eta\frac{r^{n+1}}{1-r},$$

откъдето

$$|\varphi_n(z)|<2A_m\eta.$$

Върху отсечката a_1A_2 имаме $z=r$, като $1<r<R_0$, $|z-a_1|=r-1$, $|z-b_1|<2R_0$ и при $n>n_1$

$$|f(z)-S_n(z)|<M+|\sum_{\nu=0}^{n_1}a_\nu P_\nu^{(m)}(z)|+|\sum_{\nu=n_1+1}^{n}a_\nu P_\nu^{(m)}(z)|$$

$$<M+|\sum_{\nu=0}^{n_1}a_\nu P_\nu^{(m)}(z)|+A_m\eta\sum_{\nu=n_1+1}^{n}r^\nu<M+|\sum_{\nu=0}^{n_1}a_\nu P_\nu^{(m)}(z)|+A_m\eta\frac{r^{n+1}}{r-1},$$

където M е максимумът на $|f(z)|$ в $\bar{G}$. Но

$$M+|\sum_{\nu=0}^{n_1}a_\nu P_\nu^{(m)}(z)|\leq T_{n_1}(R_0),$$

където $T_{n_1}(R_0)$ е полином на R_0 и зависи само от η.

Тогава

$$|f(z)-S_n(z)|<T_{n_1}(R_0)+A_m\eta\frac{r^{n+1}}{r-1}$$

и

$$|\varphi_n(z)|<\left(T_{n_1}(R_0)+A_m\eta\frac{r^{n+1}}{r-1}\right)\frac{2R_0(r-1)}{r^{n+1}}.$$

Понеже $\frac{r-1}{r^{n+1}}<\frac{1}{n}$, получаваме окончателно

(6) $$|\varphi_n(z)|<\frac{2R_0}{n}T_{n_1}(R_0)+2A_{m_1}\eta R_0.$$

Същата оценка е очевидно валидна и за отсечката A_1a_1, а поради симетрията и за отсечката B_1B_2.

Накрая, върху дъгата A_2B_2 $|z|=R_0$, $|z-a_1|<2R_0$, $|z-b_1|<2R_0$ и при $n>n_1$

$$|f(z)-S_n(z)|<T_{n_1}(R_0)+A_m\eta\frac{R_0^{n+1}}{R_0-1},$$

откъдето

(7) $$|\varphi_n(z)|<\frac{4T_{n_1}(R_0)}{R_0^{n-1}}+A_m\eta\frac{4R_0^2}{R_0-1}.$$

Нека $\varepsilon>0$ е произволно. Избираме числото $\eta>0$ така, че да имаме

$$A_m\frac{4\eta}{1-r_0}<\varepsilon,\quad 2A_m\eta R_0<\frac{\varepsilon}{2},\quad A_m\eta\frac{4R_0^2}{R_0-1}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

След като η е избрано, n_1 и $T_{n_1}(R_0)$ са определени. Избираме сега $N>n_1$ така, че да имаме

$$\frac{2R_0}{N}T_{n_1}(R_0)<\frac{\varepsilon}{2},\quad \frac{4T_{n_1}(R_0)}{R_0^{N-1}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогава от (5), (6) и (7) следва, че върху контура на G

$$|\varphi_n(z)|<\varepsilon$$

при $n>N$, при което N не зависи от z. Тази оценка е валидна в частност и върху дъгата ab, която лежи изцяло в G. Но върху тази дъга

$$|f(z)-S_n(z)|<\frac{|\varphi_n(z)|}{d^2}<\frac{\varepsilon}{d^2},$$

където $d=\min(|a_1-a|, |b_1-b|)$, с което теоремата е доказана.

Ако радиусът на сходимост на реда (1) е $\varrho=R$, условието (3) се заменя с условието

$$\lim\left(\frac{4nR}{e}\right)^n|a_n|=0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Обрешков Н., Върху някои ортогонални полиноми в комплексна област, Изв. на Мат. инст. на БАН, т. II, кн. 7, 46—67.
2. Валирон Ж., Аналитические функции, Москва, 1957.

Постъпила на 15. VIII. 1964 г.

РЯДЫ ПО ОБОБЩЕННЫМ ПОЛИНОМАМ БЕССЕЛЯ

Иван Байчев

(Резюме)

Для рядов вида (1) устанавливается утверждение, подобное известной теореме Фату о сходимости степенных рядов на дуге окружности сходимости.

SERIES OF GENERALIZED BESSEL'S POLYNOMIALS

Ivan Bajčev

(Summary)

For the series of the kind (1) a theorem is established which is analogous to the well-known Fatou's theorem about the convergence of a power series on its circumference of convergence.