БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

ПЕРИОДИЧНИ КОЛЕБАНИЯ НА НЕАВТОНОМНА КВАЗИЛИНЕЙНА СИСТЕМА С n СТЕПЕНИ НА СВОБОДА ПРИ НАЛИЧИЕТО НА РЕЗОНАНСНИ ЧЕСТОТИ

Друми Д. Байнов

Разглеждаме механична система с n степени на свобода, уравненията на движението на която имат вида

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{x}_k+c_{ik}x_k)=\mu F_i(t, x_1,\ldots, x_n, \dot{x}_1,\ldots, \dot{x}_n, \mu)+f_i(t)\quad (i=1, 2,\ldots, n).$$

Правим следните предположения: функциите $f_i(t)$ $(i=1, 2,\ldots, n)$ са непрекъснати периодични функции на времето с период 2π, функциите F_i $(i=1, 2,\ldots, n)$ са аналитични по отношение на всичките си аргументи и непрекъснати периодични функции на времето t със същия период, величината μ е малък параметър, величините $a_{ik}=a_{ki}$ и $c_{ik}=c_{ki}$ $(k, i=1, 2,\ldots, n)$ са реални.

В тази работа са намерени структурата и условията за съществуване на периодичните решения на системата (1) при наличие на $l\leq n$ резонансни честоти. При изграждането на структурата на търсените решения са използвани резултатите, получени в [3], а при построяването им — резултатите, получени в [2].

При $\mu=0$ получаваме пораждащата система на системата (1)

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{x}_k+c_{ik}x_k)=f_i(t)\quad (i=1, 2,\ldots, n).$$

Разглеждаме съответната на (2) хомогенна система

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{x}_k+c_{ik}x_k)=0\quad (i=1, 2,\ldots, n).$$

Тя е линейна консервативна система с постоянни коефициенти, кинетичната и потенциалната енергия на която се изразяват с квадратните форми

$$(4)\qquad T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k,\quad V=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}c_{ik}x_ix_k.$$

Известно е, че квадратната форма, представляваща кинетичната енергия, е положително определена. Следователно

$$(5)\qquad \Delta_0 = |a_{ik}| > 0.$$

Ако търсим частните решения на системата (3) във вида

$$x_{k0}(t) = A_k \cos \omega t + \frac{B_k}{\omega} \sin \omega t \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

за определянето на $A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ се получава система от n линейни хомогенни алгебрични уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} - \omega^2 a_{ik}) A_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Аналогична система се получава и за B_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Условието за съществуване на нетривиално решение на тази системи е

$$(6)\qquad \Delta(\omega^2) = |c_{ik} - \omega^2 a_{ik}| = 0.$$

Това уравнение от n-та степен относно ω^2 има съгласно с теоремата на Силвестър n реални корена. Всички корени са положителни, ако потенциалната енергия е също положително определена квадратна форма. За коефициентите $A_k^{(\nu)}$ и $B_k^{(\nu)}$ $(k, \nu = 1, 2, \ldots, n)$, отнасящи се за колебанието с честота ω_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, получаваме съотношенията

$$(7)\qquad P_k^{(\nu)} = \frac{A_k^{(\nu)}}{A_1^{(\nu)}} = \frac{B_k^{(\nu)}}{B_1^{(\nu)}} = \frac{\Delta_{ik}(\omega_\nu^2)}{\Delta_{i1}(\omega_\nu^2)} \quad (k, i, \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

където $\Delta_{ik}(\omega_\nu^2)$ е адюнгираното количество на елемента $c_{ik} - \omega_\nu^2 a_{ik}$ в детерминантата $\Delta(\omega_\nu^2)$.

Разглеждаме колебанията на системата при наличието на $l \leqq n$ резонансни честоти. Предполагаме, че първите l от числата ω_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ са цели, а останалите — нецели. На функциите $f_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ налагаме условието фуриеровите им развития да не съдържат хармониците от ред ω_r $(r = 1, 2, \ldots, l)$. Въвеждаме означението

$$(8)\qquad x_0^{(k)}(t) = A_{k0} \cos \omega_k t + \frac{B_{k0}}{\omega_k} \sin \omega_k t \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

където сме положили $A_1^{(k)} = A_{k0}$ и $B_1^{(k)} = B_{k0}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогава общият интеграл на пораждащата система (2) може да бъде представен във вида

$$(9)\qquad x_{10}^* = f_1(t) + \sum_{k=1}^{n} x_0^{(k)}(t), \quad x_{\nu 0}^* = f_{\nu 0}(t) + \sum_{k=1}^{n} P_\nu^{(k)} x_0^{(k)}(t) \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n).$$

Функциите $f_{k0}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ представляват частния интеграл на системата (2), отговарящ на функциите $f_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Ще търсим периодично решение с период 2π на системата (1), което се обръща в частно решение на пораждащата система при $\mu = 0$.

За пораждащо решение избираме фамилията частни интеграли на системата (2)

$$(10)\quad x_{10}=f_{10}(t)+\sum_{k=1}^{l} x_0^{(k)}(t),\quad x_{\nu 0}=f_{\nu 0}(t)+\sum_{k=1}^{l} P_\nu^{(k)} x_0^{(k)}(t)\quad (\nu=2, 3, \ldots, n).$$

Началните условия на търсеното решение на системата (1) избираме във вида

$$(11)\quad \begin{aligned} & x_r(0)=x_{r0}(0)+\sum_{k=1}^{l} P_r^{(k)}\beta_k,\quad \dot{x}_r(0)=\dot{x}_{r0}(0)+\sum_{k=1}^{l} P_r^{(k)}\gamma_k\quad (r=1, 2, \ldots, l). \\ & x_s(0)=x_{s0}(0)+\sum_{k=1}^{n} P_s^{(k)}\beta_k,\quad \dot{x}_s(0)=\dot{x}_{s0}(0)+\sum_{k=1}^{n} P_s^{(k)}\gamma_k\quad (s=l+1, \ldots, n), \end{aligned}$$

където β_k и γ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ са функции на μ, които се анулират при $\mu=0$. Съгласно с [1] и направения от нас избор на началните условия (11) за функциите $x_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ получаваме представянето

$$(12)\quad \begin{aligned} & x_r(t)=x_{r0}(t)+\sum_{k=1}^{l} P_r^{(k)}\beta_k \cos\omega_k t+\sum_{k=1}^{l} P_r^{(k)}\frac{\gamma_k}{\omega_k}\sin\omega_k t+\mu[\cdots]\quad (r=1, 2, \ldots, l), \\ & x_s(t)=x_{s0}(t)+\sum_{k=1}^{n} P_s^{(k)}\beta_k \cos\omega_k t+\sum_{k=1}^{n}\frac{P_s^{(k)}}{\omega_k}\sin\omega_k t+\mu[\cdots]\quad (s=l+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Ще докажем, че β_s и γ_s $(s=l+1, \ldots, n)$ са аналитични функции на величините β_r, γ_r и μ $(r=1, 2, \ldots, l)$. От условията за периодичност на търсеното решение на системата (1) получаваме

$$(13)\quad [x_s]=x_s(2\pi)-x_s(0)=0,\ [\dot{x}_s]=\dot{x}_s(2\pi)-\dot{x}_s(0)=0 (s=l+1, \ldots, n)$$

или в развит вид

$$(14)\quad \begin{aligned} & \sum_{k=l+1}^{n} P_s^{(k)}\left[\beta_k(\cos 2\pi\omega_k-1)+\frac{\gamma_k}{\omega_k}\sin 2\pi\omega_k\right]+\theta_{s1}=0, \\ & \sum_{k=l+1}^{n} P_s^{(k)}[-\beta_k\omega_k\sin 2\pi\omega_k+\gamma_k(\cos 2\pi\omega_k-1)]+\theta_{s2}=0\quad (s=l+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Функциите θ_{s1} и θ_{s2} са аналитични функции на β_k, γ_k и μ $(k=1, 2, \ldots, n)$, съдържащи тези величини от втора и от по-висока степен.

Детерминантата от коефициентите пред неизвестните в системата (14) β_s и γ_s $(s=l+1, \ldots, n)$ може да се представи във вида

$$\Delta_{2(n-l)}=2^{2(n-l)}\prod_{k=l+1}^{n}\sin^2\pi\omega_k D_{n-l}^2,$$

където

$$D_{n-l}=\begin{vmatrix} P_{l+1}^{(l+1)} & P_{l+1}^{(l+2)} & \dots & P_{l+1}^{(n)} \\ P_{l+2}^{(l+1)} & P_{l+2}^{(l+2)} & \dots & P_{l+2}^{(n)} \\ \\ P_{n}^{(l+1)} & P_{n}^{(l+2)} & \dots & P_{n}^{(n)} \end{vmatrix}$$

Лесно се проверява, че $D_{n-l}\neq 0$. Тогава $\Delta_{2(n-l)}\neq 0$ и системата (14) съгласно с [3] определя β_s и γ_s $(s=l+1,\dots,n)$ във функции на β_r, γ_r и μ $(r=1,2,\dots,l)$,

$$(15)\qquad \begin{aligned} \beta_s&=\psi_s(\beta_1,\dots,\beta_l,\ \gamma_1,\dots,\gamma_l,\ \mu) \\ \gamma_s&=\varphi_s(\beta_1,\dots,\beta_l,\ \gamma_1,\dots,\gamma_l,\ \mu)\end{aligned}\qquad (s=l+1,\dots,n),$$

които се анулират при $\mu=0$.

Като вземем пред вид (15) и съгласно с [3] търсените решения на системата (1) могат да се представят във вида

$$(16)\quad x_1(t)=f_{10}(t)+\sum_{k=1}^{n}x^{(k)}(t),\qquad x_\nu(t)=f_{\nu 0}(t)+\sum_{k=1}^{n}P_\nu^{(k)}x^{(k)}(t)\quad (\nu=2,3,\dots,n),$$

където функциите $x^{(k)}(t)$ $(k=1,2,\dots,n)$ се определят по формулите

$$(17)\quad \begin{aligned} x^{(r)}(t)&=(A_{r0}+\beta_r)\cos\omega_r t+\frac{B_{r0}+\gamma_r}{\omega_r}\sin\omega_r t+\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg[C_m^{(r)}(t)+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_m^{(r)}(t)}{\partial A_{k0}}\beta_k \\ &+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_m^{(r)}(t)}{\partial B_{k0}}\gamma_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2 C_m^{(r)}(t)}{\partial A_{k0}^2}\beta_k^2+\cdots\Bigg]\mu^m\quad (r=1,2,\dots,l), \\ x^{(s)}(t)&=\psi_s\cos\omega_s t+\frac{\varphi_s}{\omega_s}\sin\omega_s t+\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg[C_m^{(s)}(t)+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_m^{(s)}(t)}{\partial A_{k0}}\beta_k+ \\ &\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_m^{(s)}(t)}{\partial B_{k0}}\gamma_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2 C_m^{(s)}(t)}{\partial A_{k0}^2}\beta_k^2+\cdots\Bigg]\mu^m\quad (s=l+1,\dots,n)\end{aligned}$$

с тази забележка, че за (16) при $k=1,2,\dots,l$ трябва при заместването на $x^{(s)}(t)$ $(s=l+1,\dots,n)$ с неговото равно от (17) предварително да положим $\psi_s=\varphi_s=0$ $(s=l+1,\dots,n)$.

Тук

$$(18)\quad \begin{aligned} C_m^{(\nu)}(t)&=\Bigg[\Delta_0\omega_\nu\prod_{s\neq\nu}^{n}(\omega_s^2-\omega_\nu^2)\Bigg]^{-1}\int_0^t R_{1m}^{(\nu)}(\tau)\sin\omega_\nu(t-\tau)d\tau, \\ R_{1m}^{(\nu)}(t)&=\sum_{i=1}^{n}\Delta_{i1}(\omega_\nu^2)H_{im}(t)\quad (\nu=1,2,\dots,n),\end{aligned}$$

при което

$$H_{im}(t)=\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}F_i}{d\mu^{m-1}}\right)_{\mu=0},\qquad H_{i1}=F_i(t,x_{10},\dots,x_{n0},\dot{x}_{10},\dots,\dot{x}_{n0},0).$$

Условията за съществуване на периодичните решения на системата (1) са

$$(19)\quad [x^{(r)}]=x^{(r)}(2\pi)-x^{(r)}(0)=0,\quad [\dot{x}^{(r)}]=\dot{x}^{(r)}(2\pi)-\dot{x}^{(r)}(0)=0\quad (r=1,2,\dots,l)$$

и

$$(20)\quad [x^{(s)}]=x^{(s)}(2\pi)-x^{(s)}(0)=0,\quad [\dot{x}^{(s)}]=\dot{x}_s(2\pi)-\dot{x}_s(0)=0\quad (s=l+1,\dots,n).$$

От условията (19) определяме основните амплитуди A_{r0} и B_{r0} $(r=1,2,\dots,l)$ и величините β_r и γ_r $(r=1,2,\dots,l)$.

Условията (20) служат за пресмятане на функциите ψ_s и φ_s $(s=l+1,\dots,n)$.

За построяване на периодичните решения ще използваме резултатите, получени в [2].

От условията (19) след съкращаване на μ получаваме

$$(21)\quad \begin{gathered}\sum_{m=1}^{\infty}\left[C_m^{(r)}+\frac{\partial C_m^{(r)}}{\partial A_{10}}\beta_1+\dots+\frac{\partial C_m^{(r)}}{\partial B_{10}}\gamma_1+\dots\right]\mu^{m-1}=0,\\ \sum_{m=1}^{\infty}\left[\dot{C}_m^{(r)}+\frac{\partial \dot{C}_m^{(r)}}{\partial A_{10}}\beta_1+\dots+\frac{\partial \dot{C}_m^{(r)}}{\partial B_{10}}\gamma_1+\dots\right]\mu^{m-1}=0\quad (r=1,2,\dots,l).\end{gathered}$$

Тук функциите $C_m^{(r)}$, $\dot{C}_m^{(r)}$ и техните производни по A_{r0} и B_{r0} $(r=1,2,\dots,l)$ са взети при $t=2\pi$. Предполагаме, че β_r и γ_r $(r=1,2,\dots,l)$ могат да се разложат в редове по целите степени на μ:

$$(22)\quad \beta_r=\sum_{n=1}^{\infty}A_{rn}\mu^n,\quad \gamma_r=\sum_{n=1}^{\infty}B_{rn}\mu^n,\quad (r=1,2,\dots,l).$$

Заместваме β_r и γ_r $(r=1,2,\dots,l)$, изразени посредством (22), в (21) и приравняваме на нула коефициентите пред степените на μ.

За свободните членове получаваме

$$(23)\quad C_1^{(r)}=0,\quad \dot{C}_1^{(r)}=0\quad (r=1,2,\dots,l).$$

За коефициентите пред μ имаме

$$(24)\quad \begin{gathered}C_2^{(r)}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_1^{(r)}}{\partial A_{k0}}A_{k1}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_1^{(r)}}{\partial B_{k0}}B_{k1}=0\\ \dot{C}_2^{(r)}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial \dot{C}_1^{(r)}}{\partial A_{k0}}A_{k1}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial \dot{C}_1^{(r)}}{\partial B_{k0}}B_{k1}=0\end{gathered}\qquad (r=1,2,\dots,l).$$

За коефициентите пред μ^2 имаме

$$C_3^{(r)}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_2^{(r)}}{\partial A_{k0}}A_{k1}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_2^{(r)}}{\partial B_{k0}}B_{k1}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_1^{(r)}}{\partial A_{k0}}A_{k2}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_1^{(r)}}{\partial B_{k0}}B_{k2}$$

$$
(25)\quad
\begin{gathered}
+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2 C_1^{(r)}}{\partial A_{k0}^2}A_{k1}^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2 C_1^{(r)}}{\partial B_{k0}^2}B_{k1}^2+\sum_{k,\gamma=1}^{l}\frac{\partial^2 C_1^{(r)}}{\partial A_{\gamma 0}\partial B_{k0}}A_{\gamma 1}B_{k1}=0,\\
\dot C_3^{(r)}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial \dot C_2^{(r)}}{\partial A_{k0}}A_{k1}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial \dot C_2^{(r)}}{\partial B_{k0}}B_{k1}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial \dot C_1^{(r)}}{\partial A_{k0}}A_{k2}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial \dot C_1^{(r)}}{\partial B_{k0}}B_{k2}\\
+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2 \dot C_1^{(r)}}{\partial A_{k0}^2}A_{k1}^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2 \dot C_1^{(r)}}{\partial B_{k0}^2}B_{k1}^2+\sum_{k,\gamma=1}^{l}\frac{\partial^2 \dot C_1^{(r)}}{\partial A_{\gamma 0}\partial B_{k0}}A_{\gamma 1}B_{k1}=0\\
(r=1,2,\ldots,l).
\end{gathered}
$$

От системата уравнения (23) определяме основните амплитуди.

Нека корените на системата (23) са прости, т. е. якобианът

$$
(26)\qquad \Delta=\frac{D\left(C_1^{(1)},C_1^{(2)},\ldots,C_1^{(l)},\dot C_1^{(1)},\dot C_1^{(2)},\ldots,\dot C_1^{(l)}\right)}{D(A_{10},A_{20},\ldots,A_{l0},B_{10},B_{20},\ldots,B_{l0})}\neq 0.
$$

Тогава от системата (24) определяме константите A_{r1} и B_{r1} $(r=1,2,\ldots,l)$, от системата (25) — константите A_{r2} и B_{r2} $(r=1,2,\ldots,l)$ и т. н. Всички останали алгебрични системи уравнения, от които се определят $A_{r\nu}$ и $B_{r\nu}$ $(r=1,2,\ldots,l;\ \nu=3,4,\ldots)$, са линейни по отношение на съответните константи $A_{r\nu}$ и $B_{r\nu}$ $(r=1,2,\ldots,l;\ \nu=3,4,\ldots)$ с детерминанта от коефициентите пред неизвестните $\Delta\neq 0$. По този начин за величините β_r и γ_r $(r=1,2,\ldots,l)$ получаваме единствени разложения от вида (22).

За пресмятането на функциите ψ_s и φ_s $(s=l+1,\ldots,n)$ използваме условията (20), които в развита форма имат вида

$$
(27)\quad
\begin{gathered}
\psi_s(\cos 2\pi\omega_s-1)+\frac{\varphi_s}{\omega_s}\sin 2\pi\omega_s\\
+\sum_{m=1}^{\infty}\left[C_m^{(s)}+\frac{\partial C_m^{(s)}}{\partial A_{10}}\beta_1+\cdots+\frac{\partial C_m^{(s)}}{\partial B_{10}}\gamma_1+\cdots\right]\mu^m=0,\\
-\psi_s\omega_s\sin 2\pi\omega_s+\varphi_s(\cos 2\pi\omega_s-1)\\
\sum_{m=1}^{\infty}\left[\dot C_m^{(s)}+\frac{\partial \dot C_m^{(s)}}{\partial A_{10}}\beta_1\quad\cdots+\frac{\partial \dot C_m^{(s)}}{\partial B_{10}}\gamma_1+\cdots\right]\mu^m=0\\
(s\quad l\quad 1,\ldots,n).
\end{gathered}
$$

Тук всички величини $C_m^{(s)}$, $\dot C_m^{(s)}$ $(s=l+1,\ldots,n)$ и техните производни по A_{r0} и B_{r0} $(r=1,2,\ldots,l)$ са взети при $t=2\pi$.

Разлагаме функциите ψ_s и φ_s $(s=l+1,\ldots,n)$ в степенни редове по μ, β_r и γ_r $(r=1,2,\ldots,l)$:

$$
(28)\quad
\begin{gathered}
\psi_s\quad\sum_{m=1}^{\infty}\left|\psi_{sm}+\frac{\partial\psi_{sm}}{\partial A_{10}}\beta_1+\cdots+\frac{\partial\psi_{sm}}{\partial B_{10}}\gamma_1+\cdots\right|\mu^m,\\
\varphi_s=\sum_{m=1}^{\infty}\left|\varphi_{sm}+\frac{\partial\varphi_{sm}}{\partial A_{10}}\beta_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_{sm}}{\partial B_{10}}\gamma_1+\cdots\right|\mu^m\\
(s=l+1,\ldots,n).
\end{gathered}
$$

Заместваме (28) в (27) и сравняваме коефициентите пред еднаквите степени на μ. Получаваме редицата от системи

$$\tag{29} \begin{gathered} \psi_{sm}(\cos 2\pi\omega_s-1)+\frac{\varphi_{sm}}{\omega_s}\sin 2\pi\omega_s+C_m^{(s)}=0, \\ -\psi_{sm}\omega_s\sin 2\pi\omega_s+\varphi_{sm}(\cos 2\pi\omega_s-1)+\dot{C}_m^{(s)}=0 \\ (s=l+1,\ldots,n;\quad m=1,2,\ldots), \end{gathered}$$

от които можем да определим φ_{sm} и ψ_{sm}. Чрез заместване на (22) в (28) получаваме следните развития на функциите φ_s и ψ_s $(s=l+1,\ldots,n)$ в редове по степените на μ:

$$\tag{30} \psi_s=\sum_{i=1}^{\infty}\psi_s^{(i)}\mu^i,\quad \varphi_s=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_s^{(i)}\mu^i\quad (s=l+1,\ldots,n).$$

където

$$\tag{31} \begin{aligned} \varphi_s^{(1)}&=\varphi_{s1}, \\ \varphi_s^{(2)}&=\varphi_{s2}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\varphi_{s1}}{\partial A_{k0}}A_{k1}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\varphi_{s1}}{\partial B_{k0}}B_{k1}, \\ \varphi_s^{(3)}&=\varphi_{s3}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\varphi_{s2}}{\partial A_{k0}}A_{k1}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\varphi_{s2}}{\partial B_{k0}}B_{k1}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\varphi_{s1}}{\partial A_{k0}}A_{k2}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\varphi_{s1}}{\partial B_{k0}}B_{k2} \\ &+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2\varphi_{s1}}{\partial A_{k0}^2}A_{k1}^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2\varphi_{s1}}{\partial B_{k0}^2}B_{k1}^2+\sum_{k,\gamma=1}^{l}\frac{\partial^2\varphi_{s1}}{\partial A_{k0}\partial B_{\gamma0}}A_{k1}B_{\gamma1}, \\ \psi_s^{(1)}&=\psi_{s1}, \\ \psi_s^{(2)}&=\varphi_{s2}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\psi_{s1}}{\partial A_{k0}}A_{k1}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\psi_{s1}}{\partial B_{k0}}B_{k1}, \\ \psi_s^{(3)}&=\psi_{s3}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\psi_{s2}}{\partial A_{k0}}A_{k1}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\psi_{s2}}{\partial B_{k0}}B_{k1}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\psi_{s1}}{\partial A_{k0}}A_{k2}+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial\psi_{s1}}{\partial B_{k0}}B_{k2} \\ &+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2\psi_{s1}}{\partial A_{k0}^2}A_{k1}^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2\psi_{s1}}{\partial B_{k0}^2}B_{k1}^2+\sum_{k,\gamma=1}^{l}\frac{\partial^2\psi_{s1}}{\partial A_{k0}\partial B_{\gamma0}}A_{k1}B_{\gamma1} \\ &(s=l+1,\ldots,n). \end{aligned}$$

За търсеното решение на системата (1) получаваме представянето

$$\tag{32} x_k(t)=x_{k0}(t)+\mu\,x_{k1}(t)+\mu^2x_{k2}(t)+\cdots\quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Функциите $x_{ki}(t)$ $(k=1,2,\ldots,n;\ i=1,2,\ldots)$ се определят от

$$\tag{33} x_{1i}(t)=\sum_{k=1}^{n}x_i^{(k)}(t),\quad x_{\nu i}(t)=\sum_{k=1}^{n}P_\nu^{(k)}x_i^{(k)}(t)\quad (\nu=2,3,\ldots,n),$$

а функциите $x_i^{(k)}(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ се пресмятат с помощта на (17) и (22).

Ние ще дадем формули за пресмятане на функциите $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$ и $x_3^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$:

$$x_1^{(r)} = A_{r1}\cos\omega_r t + \frac{B_{r1}}{\omega_r}\sin\omega_r t + C_1^{(r)}(t),$$

$$x_2^{(r)} = A_{r2}\cos\omega_r t + \frac{B_{r2}}{\omega_r}\sin\omega_r t + C_2^{(r)}(t) + \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_1^{(r)}(t)}{\partial A_{k0}}A_{k1} + \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_1^{(r)}(t)}{\partial B_{k0}}B_{k1},$$

$$\begin{aligned}(34)\quad x_3^{(r)} &= A_{r3}\cos\omega_r t + \frac{B_{r3}}{\omega_r}\sin\omega_r t + C_3^{(r)}(t) + \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_1^{(r)}(t)}{\partial A_{k0}}A_{k2} + \sum_{k+1}^{l}\frac{\partial C_1^{(r)}(t)}{\partial B_{k0}}B_{k2}\\ &+ \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_2^{(r)}(t)}{\partial A_{k0}}A_{k1} + \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_2^{(r)}(t)}{\partial B_{k0}}B_{k1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2 C_1^{(r)}(t)}{\partial A_{k0}^2}A_{k1}^2\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2 C_1^{(r)}(t)}{\partial B_{k0}^2}B_{k1}^2 + \sum_{k,\gamma=1}^{l}\frac{\partial^2 C_1^{(r)}(t)}{\partial A_{k0}\partial B_{\gamma 0}}A_{k1}B_{\gamma 1}\qquad (r=1, 2, \ldots, l);\end{aligned}$$

$$x_1^{(s)} = \psi_s^{(1)}\cos\omega_s t + \frac{\varphi_s^{(1)}}{\omega_s}\sin\omega_s t + C_1^{(s)}(t),$$

$$x_2^{(s)} = \psi_s^{(2)}\cos\omega_s t + \frac{\varphi_s^{(2)}}{\omega_s}\sin\omega_s t + C_2^{(s)}(t) + \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_1^{(s)}(t)}{\partial A_{k0}}A_{k1} + \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_1^{(s)}(t)}{\partial B_{k0}}B_{k1},$$

$$\begin{aligned}(35)\quad x_3^{(s)} &= \psi_s^{(3)}\cos\omega_s t + \frac{\varphi_s^{(3)}}{\omega_s}\sin\omega_s t + C_3^{(s)}(t) + \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_1^{(s)}(t)}{\partial A_{k0}}A_{k2} + \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_1^{(s)}(t)}{\partial B_{k0}}B_{k2}\\ &+ \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_2^{(s)}(t)}{\partial A_{k0}}A_{k1} + \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial C_2^{(s)}(t)}{\partial B_{k0}}B_{k1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2 C_1^{(s)}(t)}{\partial A_{k0}^2}A_{k1}^2\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^2 C_1^{(s)}(t)}{\partial B_{k0}^2}B_{k1}^2 + \sum_{k,\gamma=1}^{l}\frac{\partial^2 C_1^{(s)}(t)}{\partial A_{k0}\partial B_{\gamma 0}}A_{k1}B_{\gamma 1}\qquad (s=l+1, \ldots, n).\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурса Э., Курс математического анализа, Москва, 1936.
2. Плотникова Г. В., Д. Д. Байнов, Периодические колебания механической системы с n степенами свободы при наличии резонансных частот, Revue Roumaine des Sci. Techn. — Mécanique appliquée, № 2, 1965.
3. Проскуряков А. П., Об одном свойстве периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы, ПММ, т. XXIV, 4, 1960.

Постъпила на 20. IX. 1964 г.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ НЕАВТОНОМНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ

Друми Байнов

(Резюме)

В этой работе рассматривается механическая система с n степенями свободы, уравнения движения которой имеют вид

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{x}_k+c_{ik}x_k)=\mu F_i(t, x_1,\dots x_n, \dot{x}_1,\dots \dot{x}_n, \mu)+f_i(t)\ (i=1,2,\dots,n)$$

Делаются следующие предположения:

Функции $f_i(t)$ $(i=1, 2,\dots, n)$ являются непрерывными периодическими функциями с периодом 2π, функции F_i $(i=1, 2,\dots, n)$ являются аналитическими относительно переменных x_k, $\dot{x}_k$ и μ $(k=1, 2,\dots, n)$ и непрерывными периодическими функциями t с тем же периодом, величина μ малый параметр. Величины $a_{ik}=a_{ki}$ и $c_{ik}=c_{ki}$ являются действительными числами.

Найдены структура и условия существования периодических решений системы (1) при наличии l резонансных частот ($l\leqq n$).

PERIODIC OSCILLATIONS OF A NON-AUTONOMOUS QUASILINEAR SYSTEM WITH n DEGREES OF FREEDOM IN THE PRESENCE OF RESONANCE FREQUENCIES

Droumi D. Bainov

(Summary)

The paper treats a mechanical system with n degrees of freedom, whose equations of movement are of the type

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}x_k+c_{ik}x_k)=\mu F_i(t, x_1,\dots, x_n, \dot{x}_1,\dots, \dot{x}_n, \mu)+f(t)\quad (i=1,2,\dots,n)$$

The following assumptions are made:

The functions $f_i(t)$ $(i=1, 2,\dots, n)$ are continuous periodic functions with period 2π, the functions F_i $(i=1, 2,\dots, n)$ are analytical with respect to all their arguments and periodic functions of t with the same period, and the quantity μ is a small parameter. The quantities $a_{ik}=a_{ki}$ and $c_{ik}=c_{ki}$ are real.

The structure has been found and the conditions of existence of periodic solutions of the system (1) in the presence of l resonance frequencies ($l\leqq n$).