БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМ

Драгош Вайда

Ниже резюмирована работа [1]. Первые четыре параграфа из [1] касаются алгебраических частично упорядоченных систем, не упорядоченных структурно. В работе введен и изучен класс частично упорядоченных групп, элементы которых допускают обобщенное жорданово разложение. § 1 занимается общими свойствами этих групп, в § 2 даются примеры, а в § 3 рассматриваются некоторые приложения к банаховым алгебрам, снабженным упорядоченностью. С некоторыми исключениями, результаты из § 1—3 находятся в препринте [2], а сообщение о них в заметках [3], [4]; изложение с доказательствами находится в [5]. В § 4 представлена работа [6] о частично упорядоченных телах. В последнем параграфе (§ 5), посвященном абсолютно изолированным подсистемам в алгебраических структурно упорядоченных системах, изложены результаты из [7] относительно абсолютно изолированных подгрупп некоммутативной структурно упорядоченной группы, и некоторые результаты, до сих пор неопубликованные, об абсолютно изолированных идеалах f-кольца; упомянуты так же некоторые предложения из [8], [9]. В настоящем изложении нумерация частей соответствует нумерации параграфов из [1].

1. В теории частично упорядоченных групп были много изучены структурно упорядоченные группы, т. е. те, для которых множество элементов составляет структуру. Классические результаты можно найти в фундаментальном мемуаре Биркгоффа [10], в его книги [11, XIV] и в более недавних изложениях Бурбаки [12], Жаффара [13], Рибенбойма [14] и Фукса [15, V].

Однако важные приложения заставляют нас рассматривать частично упорядоченные группы, вообще, неупорядоченные структурно. В этих случаях больше не может быть применена теория структурно упорядоченных групп и необходимы исследования в более общих рамках. Поэтому мы вводим и изучаем частично упорядоченные группы, элементы которых допускают обобщенное жорданово разложение. Эти группы позволяют получить некоторые результаты, и, не будучи самыми общими частично упорядоченными группами, все же встречаются в различных приложениях (см. примеры ниже).

В дальнейшем, за исключением случаев, упомянутых особо, G является частично упорядоченной группой. Пусть $P=G+=\{u \in G \mid U\geqq 0\}$.

Определение 1. Пусть $x \in G$. Если

$$(1) \qquad \exists u_x, v_x \in P, \text{ с } x=u_x-v_x \text{ и так, что } 0 \leq w \leq u_x, v_x \text{ влечет за собой } w=0,$$

говорится, что x допускает обобщенное жорданово разложение $x=u_x-v_x$. Если (1) имеет место $\forall x \in G$, тогда группа G будет называться J-упорядоченной (гр. J-o).

Мысль об изучении гр. J-o. была вызвана задачей, поставленной Жаффаром ([13], стр. 227, 268). Частный случай мультиструктурно упорядоченных фильтратных групп (гр. m. f.) был рассмотрен Бенадо [16], [17]. См. тоже [18].

Частично упорядоченное множество $\mathcal{M}$, которое удовлетворяет аксиомам

$$(\mathcal{M}_{nr}1)\ \forall x, y \in \mathcal{M}, \exists M \in \mathcal{M}, \text{ с } x, y \leq M \text{ и так, что } x, y \leq M_1 \leq M \text{ влечет за собой } M_1=M;$$

$$(\mathcal{M}_{nr}2)\ \forall x, y \in \mathcal{M}, \exists m \in \mathcal{M}, \text{ с } m \leq x, y \text{ и так, что } m \leq m_1 \leq x, y \text{ влечет за собой } m=m_1,$$

называется nr-мультиструктурой.

Теорема 1. Группа G является гр. J-o. тогда и только тогда, когда множество G является nr-мультиструктурой.

В nr-мультиструктуре $\mathcal{M}$ определим мультиобъединение

$$x \vee y = \{M \in \mathcal{M} \mid x, y \leq M \text{ и } x, y \leq M_1 \leq M \text{ влечет за собой } M_1=M\}$$

и, двойственно, мультипересечение $x \wedge y$. С помощью закона композиции $\vee$ можно алгебраически охарактеризовать гр. J-o. в семействе абстрактных групп, обобщив таким образом соответствующий результат из теории структурно упорядоченных групп, которым мы обязаны Стону [11, XIV, § 1, стр. 215] (теорема 2).

Для гр. J-o. имеем правила вычислений, аналогичные тем, которые действительны для структурно упорядоченных групп; например,

$$x+(a \vee b)+y=(x+a+y) \vee (x+b+y), \quad x-(a \vee b)+y=(x-a+y) \wedge (x-b+y$$

и двойственно. Применяя эти соотношения, можно получить характеристику гр. J-o. с помощью полугруппы P положительных элементов (теорема 3).

Структура, присоединенная структурно упорядоченной группе, дистрибутивна; аналогично, nr-мультиструктура, присоединенная к группе J-o., обладает специальными свойствами этого типа. Например, имеем

Предложение 1. Пусть G — гр. J-o. (j). Если $a_1 \vee b$ с $a_2 \vee b$, $(a_1 \wedge b) \frown (a_2 \wedge b) \neq \emptyset$ и если a_1 и a_2 сравнимы, тогда $a_1=a_2$. (jj). Если G является, кроме того, архимедово частично упорядоченной, тогда $a_1 \vee b$ $a_2 \vee b$ и $a_1 \wedge b = a_2 \wedge b$ влечет за собой $a_1=a_2$.

Для результата, аналогичного с (jj), см. [19], стр. 170—171.

Для конструкции абсолютной величины (модуля) в гр. J-o. мы должны ограничиться частным случаем гр. m. f., удовлетворящей условию

(12) если $x \in G$ и $2x \geqq 0$, то $x \geqq 0$.

По Бенадо [17, стр. 310] частично упорядоченное множество $\mathcal{M}$, которое удовлетворяет аксиомам:

$$(\mathcal{M}_1) \forall x, y \in \mathcal{M}, \text{ если } \exists \Omega \in \mathcal{M}, \text{ с } x, y \leqq \Omega, \text{ тогда } \exists M \in \mathcal{M}, \text{ с}$$

$$x, y \leqq M \leqq \Omega \text{ и так, что } x, y \leqq M_1 \leqq M \text{ влечет за собой } M_1 = M;$$

$$(\mathcal{M}_2) \forall x, y \in \mathcal{M}, \text{ если } \exists \omega \in \mathcal{M}, \text{ с } \omega \leqq x, y, \text{ тогда } \exists m \in \mathcal{M}, \text{ с}$$

$$\omega \leqq m \leqq x, y \text{ и так, что } m \leqq m_1 \leqq x, y \text{ влечет за собой } m = m_1,$$

называется мультиструктурой. Согласно тому же автору ([17], стр. 265), частично упорядоченная группа, со свойством, что множество ее элементов образует мультиструктуру, называется мультиструктурно упорядоченной группой.

В гр. J-о. G, мультиобъединение и мультипересечение являются совместимыми с упорядоченностью, в смысле, что одно из эквивалентных условий:

$$a > b \to x \vee a \overrightarrow{\equiv} x \vee b, \quad \forall x \in G;$$

$$a \leqq b \to x \wedge a \overrightarrow{\equiv} x \wedge b, \quad \forall x \in G$$

удовлетворяется, тогда и только тогда, когда G является мультиструктурно упорядоченной.[1]

Определение 2. Функция $\varrho(x, y)$, определенная на $G \times G$, принимающая значения в семействе непустых частей G и так, что

$$\varrho(x, y) \geqq 0, \quad 0 \in \varrho(x, y) \rightleftarrows x = y, \quad \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$$

и

$$\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \overrightarrow{\equiv} \varrho(x, z)$$

называется мультирасстоянием. Если вместо неравенства треугольника имеем

$$\varrho(x, y) + \varrho(y, z) + \varrho(x, y) \overrightarrow{\equiv} \varrho(x, z),$$

$\varrho(x, y)$ называется обобщенным мультирасстоянием.

Определение 3. Пусть G — гр. m. f., удовлетворяющая условию (12). Ряд $\{x_n\}$ m-сходится к x, если существует ряд $\{r_n\} \downarrow 0$, так что $\varrho_n \overrightarrow{\equiv} \varrho(x_n, x)$.

Теорема 4. В группе m. f. G, удовлетворящей условию (12),

$$\varrho(x, y) = (x - y) \vee (y - x)$$

является обобщенным мультирасстоянием. Если, кроме того, G является коммутативной, $\varrho(x, y)$ является мультирасстоянием.

Замечание 1. В группе m. f. G $\varrho'(x, y) = [(x - y) \vee 0] + [(y - x) \vee 0]$ является обобщенным мультирасстоянием. Если кроме того G является коммутативной, $\varrho'(x, y)$ является мультирасстоянием. См. тоже [20].

[1] $A \overrightarrow{\equiv} B \rightleftarrows \forall a \in A, \exists b \in B$, с $a \geqq b$; $A \overrightarrow{\equiv} B$ определяется аналогично.

Пусть z — аддитивная группа целых рациональных чисел, снабженная упорядоченностью. Как приложение общих свойств гр. J-о., отметим теорему 5, которая обобщает классический результат Биркгоффа ([11], XIV, § 13, стр. 235—236).

Теорема 5. Для того, чтобы группа G была изоморфной с прямой суммой групп z, частично упорядоченных обычным соотношением, необходимо и достаточно, чтобы G удовлетворяла следующим условиям: G — фильтрантная группа (гр. f.); любое непустое подмножество P содержит по крайней мере один минимальный элемент (Min); мультиструктура G является дистрибутивной ([17], стр. 338) (D); $2a=0 \rightarrow a=0$(0).

2. Могут быть данны примеры, которые показывают, как располагается класс гр. J-о. по отношению к классу гр. f. и классу гр. m. f. Мы обязаны Якубику [21] вкладом в изучение гр. J-о. и разрешением проблемы соотношения между классом гр. J-о. и классом гр. m. f. В связи с этой проблемой можно дать следующий

Пример. Пусть Q—аддитивная группа рациональных чисел, снабженная упорядоченностью, $A=z\times Q$, частично упорядоченная по компонентам и $G=A\times GF(2)$. Аддитивная группа G с упорядоченностью, вызванной $P=\{u \in G \mid u=(a, b)$, с $a \in A$, $b \in GF(2)$ и так, что $a>0$ или $a=b=0\}$, является гр. J-о., не будучи гр. m. f.

Как примеры гр. J-о. отметим мультипликативную группу поля алгебраических чисел $Q(\theta)$, группу, частично упорядоченную с помощью соотношения делимости, так же как и аддитивную группу эрмитовых операторов, определенных на гильбертовом пространстве, причем упорядоченность дается соотношением $T \geqq 0 \rightleftarrows < T(x), x > \geqq 0$.

Жаффар ([13], стр. 268) поставил проблемы существования гр. J-о. не упорядоченной структурно и существования полуоцененного поля такой группы; из примера относительно $Q(\theta)$ следует, что ответ на эти два вопроса утвердительный.

3. Пусть A — комплексная Банахова *-алгебра с единичным элементом e ([22], стр. 1—2, 178) и пусть P — замыкание множества конечных сумм элементов формы xx^*.

Если инволюция непрерывна в любой *-подалгебре A, максимальной и коммутативной, мы говорим, что инволюция локально непрерывна [22, стр. 180].

Предложение 2. Если инволюция локально непрерывна и если $P\frown(-P)=\{0\}$ (As), тогда A является A^*-алгеброй, в смысле ([22], стр. 181). Наоборот, если A является A^*-алгеброй, тогда инволюция непрерывна и мы имеем (As).

См. тоже [23].

В дальнейшем предполагается, что A является с локально непрерывной инволюцией и что удовлетворяется предположение (As); что касается соотношения $\leqq$, то оно будет упорядоченность, определенной, в силу (As), полугруппой P в аддитивной группе H эрмитовых элементов из A. Имея эту упорядоченность, H является векторным пространством над полем R действительных чисел, частично упорядоченным, удовлетворяющим условию архимедовости и типа Крейна.

В таком пространстве X ряд $\{x_n\}$ r-сходится к x, если $\exists u \in X^+$, $\forall \varepsilon \in R^+ \setminus \{0\}$, $\exists n_\varepsilon \in N$, с $-\varepsilon u \leqq x_n - x \leqq \varepsilon u$, для $n \geqq n_\varepsilon$ (N — множество натуральных чисел).

Полезно рассмотреть следующее условие:

(P_m) Пусть $\{h_n\}$ и $\{k_n\}$, с h_n, $k_n \in H$, два монотонных ряда, так что $r\text{-}\lim h_n = h$ и $r\text{-}\lim k_n = k$; если $h_n k_n = k_n h_n$ и если ряд $\{l_n\}$, с $l_n = h_n k_n$ является монотонным, тогда $r\text{-}\lim l_n = hk$.

Пусть $e - \nu h + \nu(\nu-1)/2!\, h^2 + \cdots$ формальный биномиальный ряд, записанный для $h \in H$ и пусть $\{I_n(h)\}$, соответственно $\{S_n(h)\}$, ряд частичных сумм для $\nu = -1$, соответственно для $\nu = 1/2$. Что касается существования обратного элемента и квадратного корня, мы ограничимся условием:

(C_m) Ряд формы $\{I_n(h)\}$ или формы $\{S_n(h)\}$, с $h \in H$, монотонный и r-фундаментальный, r-сходится.

Теорема 6. Если A удовлетворяет предположениям (P_m) и (C_m), тогда H является гр. J-о.

Как приложение доказываются две теоремы представления, в которых утверждается, что некоторые условия относительно упорядоченности, введенной P, являются необходимыми и достаточными для того, чтобы A была взаимно-непрерывно *-изоморфна с C^*-алгеброй (коммутативной) ([22], стр. 181).

Теорема 7 (Чиприан Фойаш). Необходимым и достаточным условием для того, чтобы A была изометрично *-изоморфна с C^*-алгеброй, является тот факт, чтобы H удовлетворяло следующим предположениям:

(U) $\quad h \in H$ и $h, -h \leqq e$ влечет за собой $h^2 \leqq e$;

(RC) $\quad$ любой r-фундаментальный ряд элементов из H r-сходится.

Необходимость условия следует из того факта, что если A изометрично *-изоморфна с C^*-алгеброй, тогда мы имеем, в то же время, o-изоморфизм; следовательно, доказательство необходимости условия сводится к доказательству свойств (U) и (RC) в C^*-алгебре.

Доказательство достаточности длиннее. Показывается, что норма $\|h\|_e = \inf\{a \geqq 0 \mid -ae \leqq h \leqq ae\}$ $(h \in H)$ совпадает с вспомогательной нормой ([22], стр. 181, 226) A^*-алгебры A, $\|x\|_{bcn} = [\sup f(x^*x)]^{1/2}$ $(f \geqq 0,\ f(e) \leqq 1)$. Потом показывается, что алгебра A является полной в соответствии с вспомогательной нормой. Однако в A^*-алгебре две нормы, для которых данная алгебра является банаховой, эквивалентны ([22], стр. 187—188). Следовательно, в нашем случае вспомогательная норма эквивалентна с нормой алгебры A.

Теорема 8. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы A была взаимно-непрерывно *-изоморфной с коммутативной C^*-алгеброй является тот факт, чтобы H имело свойство интерполяции Ф. Рисса: если $a_i \leqq b_j$ $(i, j = 1, 2)$, тогда существует c, так что $a_i \leqq c \leqq b_j$ $(i, j = 1, 2)$ (IP).

В самом деле, взяв $V = H$, следует, что $\widetilde{V}$ является структурно упорядоченной ([24], стр. 13). В этом случае P является нормальным коническим множеством, в смысле Крейна ([25], стр. 393—395). В силу [26], стр. 51—52, [4], стр. 2222, данная алгебра является взаимно-непрерывно *-изоморфной с C^*-алгеброй. Следовательно, C^*-алгебра имеет свойство интерполяции (IP). Из теоремы 6 следует, что мы имеем структуру, значит C^*-алгебра является коммутативной [27].

Теорема 8 обобщает следующие результаты: (A) B^*-алгебра ([22], стр. 181) с единичным элементом и свойством (IP) является коммутативной [28]; (B) Если A таково, что H является структурно упорядоченной, тогда A является коммутативной [29].

4. Частично упорядоченные тела, которые мы рассматриваем, являются обобщением частично упорядоченных полей, изученных Артином и Шрейером, потому что исключаются предположения коммутативности и полной упорядоченности.

Определение 4. Пусть K — абстрактное тело. Если K является частично упорядоченным множеством, так что аддитивная группа G тела K является частично упорядоченной группой и так что $M=\{u \in K \; u>0\}$ является подгруппой мультипликативной группы тела K, тогда K называется частично упорядоченным телом.

В дальнейшем, пусть K — частично упорядоченное тело.

Как следует из теоремы 9, которая дана ниже, тела K, которые не являются полно упорядоченными, являются необходимым образом алгебраическими частично упорядоченными неупорядоченными структурно системами; в изучении таких тел нельзя применить предположение, что множество K образует структуру.

Если группа G является архимедовой, будем говорить, что тело K является архимедовым аддитивным частично упорядоченным. Если группа M архимедова, будем говорить, что тело K является архимедовым мультипликативным частично упорядоченным.

В [30] Дюбуа изучает частично упорядоченные коммутативные тела, используя следующие условия:

K является примитивным,

в смысле, что если K_1 — подтело тела K и $P \subseteq K_1$, тогда $K_1 = K$;

(AC) $\qquad a+1/n \geqq 0, \ \forall n \in N$ влечет $a \geqq 0$.

Ниже мы вернемся к изучению частично упорядоченных тел, с помощью этих условий.

Теорема 9. Если тело K является примитивным и мультиструктурно упорядоченным, тогда K полно упорядоченно и обратно.

Эта теорема обобщает результат из [15], стр. 139. В доказательстве используются следующие свойства: (j) любое тело K удовлетворяет условию (IP); (jj) если тело K является мультиструктурно упорядоченным, тогда любые два элемента, имеющие общую мажоранту, являются сравнимыми, и двойственно.

Теорема 10. Если тело K является архимедово мультипликативно частично упорядоченным, то K является архимедово аддитивно частично упорядоченным. Если тело K имеет свойство (AC), тогда $u^n \leqq v$, для $u, v \in M$ и $\forall n \in N$ влечет за собой $u \leqq 1$; в частности, есло тело K имеет свойство (AC), то K является архимедово мультипликативно частично упорядоченным.

Теорема 11. Если тело K—примитивное и имеет свойство (AC), то K является коммутативным.

Доказательство результата, данного выше, использует теорему 10, теорему выложения Эверетта и Улама [31], так же как и теорему коммутативности Ивасава [32] и Огасавара [33]. Данный выше результат представляет собой обобщение теоремы Гильберта относительно коммутативности архимедово полно упорядоченных тел. Из теоремы 11 следует, что предположение коммутативности в [30] является следствием.

Можно так же показать, что предположение примитивности и условие

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n \geqq \quad \geqq 0 \to \exists x \in K, x = \bigwedge_n^{1,\infty} x_n$$

характеризует полно упорядоченное поле R в классе частично упорядоченных тел (теорема 12).

5. Пусть G — структурно упорядоченная некоммутативная группа. Подгруппа H абстрактной группы G, нормальная и со свойством, что $a \in H$, $|x| \leqq |a|$ влечет $x \in H$, называется абсолютно изолированной подгруппой группы G ([34], стр. 57). В изучении абсолютно изолированных подгрупп G используем условие

$$(2) \qquad x \vee (t-x-t) \geqq 0, \quad \forall x, t \in G.$$

В [7], стр. 937, мы доказали, что необходимое и достаточное условие того, чтобы G была разложимой, как структурно упорядоченная группа, в подпрямое произведение полно упорядоченных групп, является то, чтобы G удовлетворяла условию (2); если это условие удовлетворено и если структура абсолютно изолированных подгрупп группы G удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепочек, тогда представление G как подпрямого произведения неразложимых множителей является единственным (теорема 13).

В силу [34], стр. 64 условие регулярности Лоренцена [35] равносильно (2), значит, доказательство из [7], стр. 936—937, первого из предыдущих утверждений становится доказательством классической теоремы выложения Лоренцена [35]. Подобным же образом замечаем, что предположение $a \wedge b = 0 \to a \wedge |c+b-c| = 0$, использованное Обером ([36], стр. 327), влечет за собой регулярность и взаимно, в силу [34], стр. 63.

Предложение 3. Если G имеет свойство (2), если структура абсолютно изолированных подгрупп группы G удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепочек и если в этой структуре существует только один собственно максимальный элемент H, тогда любой элемент $x \in G \frown GH$ является сравнимым с 0.

Предложение 4. Следующие утверждения равносильны:

(j) G — полно упорядоченная группа;

(jj) G имеет свойство (2) и структура абсолютно изолированных подгрупп группы G составляет полно упорядоченное множество;

(jjj) G имеет свойство (2) и подгруппа 0 является $\frown$-несократимой.

Пусть A — структурно упорядоченное кольцо, т. е. частично упорядоченное кольцо, для которого множество элементов составляет структуру. Левый идеал (правый, двухсторонний) I абстрактного кольца A, со свойством, что $a \in I$, $|x| \leqq a$ влечет $x \in I$, называется абсолютно изолированным левым идеалом (правым, двухсторонним) кольца A ([37], стр. 44). По Биркгоффу и Пьерсу ([37], стр. 55) структурно упорядоченное кольцо, которое удовлетворяет условию

$$a \wedge b = 0 \to ca \wedge b = ac \wedge b = 0, \quad \forall c \in P,$$

называется f-кольцом.

В случае f-колец можно дать аналог теоремы Брауэра о структуре левых нильпотентных идеалов ([38], стр. 759). В частном случае f-колец с единичным элементом этот аналог выглядит так:

Предложение 5. Пусть A — f-кольцо с единичным элементом и I — абсолютно изолированный левый идеал кольца A со свойством, что интервал $0 (I$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепочек для абсолютно изолированных левых идеалов. В этих предположениях I является нильпотентным тогда и только тогда, когда I не содержит ни одного идемпотентного элемента.

В структурно упорядоченном кольце вводится абсолютно изолированный радикал

$$W=\{a \in A \ \exists n_a \in N, \ \forall x_1, x_2, \ldots, x_{n_a} \in A, \ \ x_1 \ a \ x_2 | a | \ldots x_{n_a} | a = 0\}$$

([37]), стр. 45). Как приложение предыдущего предложения в теореме 14 ([1] § 5) дается необходимое и достаточное условие того, чтобы абсолютно изолированный радикал был равен пересечению абсолютно изолированных максимальных левых идеалов ([39] стр. 69, [40], стр. 191).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайда Д., Некоторые результаты относительно алгебраических частично упорядоченных систем, Москва, МГУ, 1964.
2. Vaida D., Groupes ordonnés dont les éléments admettent une décomposition jordanienne généralisée (Preprint EC—2), Bucarest, Inst. de Phys. Atom., août 1963.
3. Vaida D., Groupes ordonnés dont les éléments admettent une décomposition jordanienne généralisée, C. R. Acad. Sci., Paris, **257**, p. 2053—2055 (7 octobre 1963).
4. Vaida D., Groupes ordonnés dont les éléments admettent une décomposition jordanienne généralisée, C. R. Acad. Sci., Paris, **257**, p. 2222—2223 (14 octobre 1963).
5. Vaida D., Groupes ordonnés dont les éléments admettent une décomposition jordanienne généralisée, Rev. Roum. Math. pures appl., **10**, 1964 (à paraître).
6. Vaida D., Asupra corpurilor partial ordonate, Com. Acad. RPR, IX, **12**, 1959, 1243—1248.
7. Vaida D., Asupra subgrupurilor izolate ale unui grup reticulat necomutativ, Com., Acad. RPR, X, **11**, 1960, 935—939.
8. Vaida D., Caracterizări ale laticelor distributive, Com. Acad. RPR, XI, **7**, 1961, 797—800.
9. Vaida D., Un problème de G. Birkhoff, C. R. Acad. bulg. Sci. **15**, № 8, 1962, 801—803.
10. Birkhoff G., Lattice-ordered groups, Annals Math., **43**, 1942, 298—331.
11. Birkhoff G., Lattice theory, 2nd ed., New York, 1948.
12. Bourbaki N., Algèbre, Chap. VI (Groupes et corps ordonnés), Paris, 1952.
13. Jaffard P., Contribution à l'étude des groupes ordonnés, Jour. Math., Pures Appl., **32**, 1953, 203—280.
14. Ribenboim P., Théorie des groupes ordonnés, Argentina, Bahía Blanca, Universidad Nacional del Sur, 1963.
15. Fuch L., Partially ordered algebraic systems, New York, 1963.
16. Benado M., Asupra teoriei divizibilităţii, Bul. St. Mat. Fiz., VI, 2, 1954, 263—270.
17. Benado M., Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier. II (Théorie des multistructures), Czechoslovak Math. Jour., **5** (80), 3, 1955, 308—344.
18. Teh H. H., A note on l-groups, Proc. Ed. Math. Soc., **13** (Series II), Part 1, June 1962, 123—124.
19. Burgess D. C. J., Generalized intervals in partially ordered groups, Proc. Camb. Phil. Soc., **55**, 1959, 165—171.
20. Fuchs L., Absolutes in partially ordered groups, Indag. Math., **11**, 2, 1940, 60—70.
21. Jakubík J., Über halbgeordnete Gruppen mit verallgemeinerten Jordanscher Zerlegung, Rev. Roum. Math, pures appl., IX, 2, 1964, 187—190.

22. R i c k a r t C. E., General theory of Banach algebras, New York, 1960.
23. Y o o d B., Faithful *-representations of normed algebras, Pacific Jour. Math., **10**, 1, 1960, 345—363.
24. K a d i s o n R. V., A representation theory for commutative topological algebra, Mem. Amer. Math. Soc., **7**, 1951.
25. В у л и х Б. З. и др., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Москва, 1962.
26. K e l l e y J. L., R. L. V a u g h t, The positive cone in Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **74**, 1953, 44—55.
27. S h e r m a n S., Order in operator algebras, Amer. Jour. Math., LXXIII, 1, 1951, 227—232.
28. F u k a m i y a M., Y. M i s o n o u, Z. T a k e d a, On order and commutativity of B^*-algebras, Tôh. Math. Jour., **6**, 1, 1954, 89—93.
29. C u r t i s s P h. C., Order and commutativity in Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc., **9**, 1958, 643—646.
30. D u b o i s D. W., On partly ordered fields, Proc. Amer. Math. Soc., **7**, 1956, 918—930.
31. E v e r e t t C. J., S. U l a m, On ordered groups, Trans. Amer. Math. Soc., **57**, 1945, 208—216.
32. I w a s a w a K., On the structure of conditionally complete lattice-groups, Japan. Jour. Math., **18**, 1943, 777-789.
33. O g a s a w a r a T., Commutativity of Archimedean semiordered groups, Jour. Sci. Hiroshima Univ., A., **12**, 1948, 249—254 (Japanese).
34. L o r e n z K., Über Strukturverbände von Verbandsgruppen, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **13**, 1962, 55—67.
35. L o r e n z e n P., Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie, Math. Z., **45**, 1939, 533—553.
86. A u b e r t K. E., Un théorème d'immersion pour une classe étendue de structures algébriques réticulées, An. Acad. Brasil. Ci., **31**, 3, 1959, 321—329.
37. B i r k h o f f G., S. R. P i e r c e, Lattice-ordered rings, An. Acad. Brasil. Ci., **28**, 1956, 41—69.
38. B r a u e r R., On the nilpotency of the radical of a ring. Bull. Amer. Math. Soc., **48**, 10, 1942, 752—758.
39. B o u r b a k i N., Algèbre, Chap. VIII (Modules et anneaux semi-simples), Paris, 1958.
40. J o h n s o n D. G., A structure theory for a class of lattice-ordered rings, Acta Math., **104**, 3—4, 1960, 163—215.

Постъпила на 26. X. 1964 г.

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES SYSTÈMES ALGÉBRIQUES PARTIELLEMENT ORDONNÉS

D r a g o c h e V a j d a

(Résumé)

Soit G un groupe ordonné, $P=G^+=\{u\in G \mid u\geqq 0\}$ et $x\in G$. Si $\exists\, u_x, v_x \in P$, avec $x=u_x-v_x$ et tels que $0\leqq w\leqq u_x, v_x$ impliquent $w=0$ (*), on dit que x admet la décomposition jordanienne généralisée $x=u_x-v_x$. Si (*) a lieu, $\forall x\in G$, on dit que G est un groupe J-ordonné (gr. J-o.). On étudie les propriétés des gr. J-o., en généralisant le traitement classique, connu pour les groupes réticulés. Soit A une *-algèbre complexe de Banach à élément unité et à involution localement continue. Soit P la fermeture de l'ensemble des sommes finies des éléments de la forme xx^*. Afin de pouvoir définir dans A une relation d'ordre induite par P, on suppose que $P\frown(-P)=\{0\}$ (As). On démontre, à l'aide des conditions supplémentaires, que le groupe additif H des éléments hermitiens de A est, par rapport à cette relation d'ordre, un gr. J-o. Comme

application, on donne deux théorèmes de représentation, affirmant que certaines conditions concernant le relation d'ordre sont nécessaires et suffisantes afin que A soit bi-continuellement $*$-isomorphe à une C^*-algèbre (commutative). Par exemple, on démontre que la condition nécessaire et suffisante afin que A soit bi-continuellement $*$-isomorphe à une C^*-algèbre commutative est que H possède la propriété d'interpolation de F. Riesz: si $a_i \leq b_j (i, j = 1, 2)$, alors il existe c, tel que $a_i \leq c \leq b_j (i, j = 1, 2)$ (IP). En continuant, on considère les corps ordonnés K, non nécessairement commutatifs ni nécessairement totalement ordonnés. Si K jouit de la propriété que $K^+ \subset K_1 \subseteq K$ impliquent $K_1 = K$, pour tout sous-corps K_1, on dit que le corps K est primitif. Si K est primitif et tel que $a + 1/n \geq 0$, $\forall n \in N$, impliquent $a \geq 0$, alors K est commutatif. Dans la dernière partie du travail, on étudie les sous-systèmes absolument isolés, dans les groupes réticulés non commutatifs et dans les f-anneaux.