

АЭРОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ

И. П. Недялков

§ 1. Введение

Аэроупругие явления наблюдаются при взаимодействии упругой системы с потоком. Типичные примеры аэроупругих явлений — дивергенция и флаттер. Дивергенция — это потеря статической устойчивости упругой системы под действием аэродинамических сил набегающего потока, а флаттер — потеря динамической устойчивости при аналогичных условиях.

Дивергенция и флаттер — внешние задачи аэроупругости; они характеризуются тем, что течение, с которым взаимодействуют упругие силы данного тела, является внешним течением по отношению к этому телу. Но существуют и внутренние задачи аэроупругости. Это задачи, в которых изучается потеря устойчивости труб с мягкими стенками, в которых течет флюид. Устойчивость теряется, если скорость C_0 жидкости достигнет некоторого критического значения $C_{окр}$. Наблюдаются два типа потери устойчивости системы труба — флюид: а) при $C_0 = C_{окр}$ трубы с сравнительно толстыми стенками сильно раздуваются (рис. 1), система труба — флюид переходит в новое устойчивое состояние, в котором первоначальный радиус трубы может увеличиться несколько раз; б) при критической скорости течения трубы с сравнительно тонкими стенками сплющиваются (рис. 2). Иногда сплющивание происходит так сильно, что поперечное сечение уменьшается почти до нуля.

Математические модели внешних задач аэроупругости довольно сильно отличаются от моделей соответствующих внутренних задач. Поэтому изучение раздувания и сплющивания труб под действием внутреннего течения имеет специфические особенности, которые не встречаются при дивергенции и флаттере. Основная внутренняя задача аэроупругой устойчивости можно схематизировать следующим образом. Найти гармоническую функцию Ψ трех переменных, уравнение некоторой поверхности S и один параметр $C_{окр}$ так, чтобы на S функция Ψ удовлетворяла некоторым граничным условиям. Ψ — это потенциал течения, которое предполагается потенциальным, S — поверхность трубы после потери устойчивости, $C_{окр}$ — критическая скорость. Граничные условия, которым должна удовлетворять Ψ на S — это частные дифференциальные уравнения высокого порядка, описывающие упругие смещения трубы. Иными словами, основная задача состоит в отыскании решения трехмерного уравнения

Лапласа, которые на неизвестной поверхности должны удовлетворять частные дифференциальные уравнения двух переменных.

В § 2 выведена система линеаризованных уравнений основной задачи. Эта система повидимому впервые получена в [4]. Но даже линеаризованная система настолько сложна, что она может иметь практическое значение, если удастся сильно упростить ее.

В § 3 показано, что существует возможность упростить основную задачу до некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В § 4 для одного упрощенного варианта основной задачи выведена система нелинейных уравнений.

Выводы § 2, 3 и 4 относятся к общему случаю — уравнения пригодны для описания и сплющивания, и раздувания. Осесимметричная задача раздувания рассмотрена в § 4. Результаты § 4 получены автором другим способом в [1]. В § 5 исследуется раздувание на очень длинном участке. Для этого случая, кроме критической скорости, возможно найти и диаметр трубы после раздувания. Раздувание на длинном участке изучалось в [1].

§ 2. Вывод линеаризованных дифференциальных уравнений основной задачи

Рассмотрим участок $a_0 b_0 c_0 c'_0 b'_0 a'_0$ цилиндрической круговой трубы с радиусом R и с толщиной стенки δ (рис. 1). В трубе течет флюид со скоростью C_0 и с плотностью ρ . Из наблюдений известно, что когда C_0

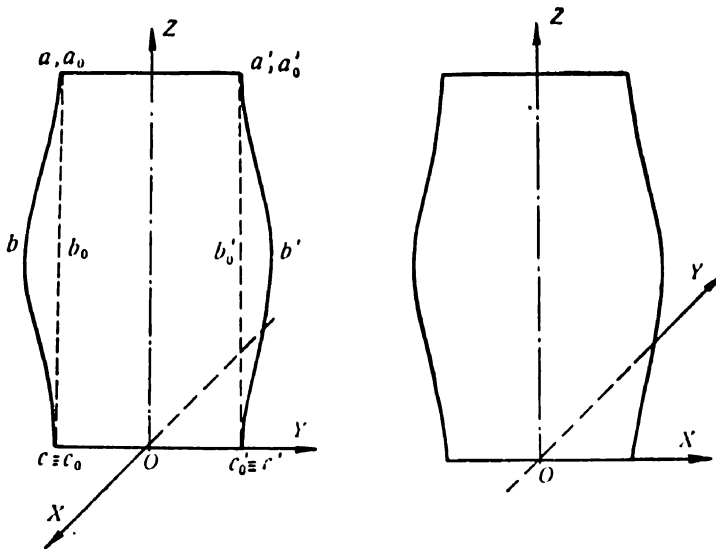


Рис. 1

растет, оставаясь меньше некоторого критического значения $C_{\text{окр}}$, деформации трубы незаметны. Однако, если значение C_0 незначительно превысит $C_{\text{окр}}$, труба теряет устойчивость и, деформируясь сильно, принимает новую форму $abcc'b'a'$. Обозначим поверхность трубы до деформации через S_0 ; это поверхность кругового цилиндра радиуса R и длины L . S_0

является срединной поверхностью оболочки (диаметр S_0 — среднее арифметическое между наружным и внутренним диаметром трубы). Поверхность, в которую переходит S_0 после деформации, обозначим через S . Области, ограниченные S_0 и S плоскостями $z=0$ и $z=L$, обозначим соответственно через G_0 и G .

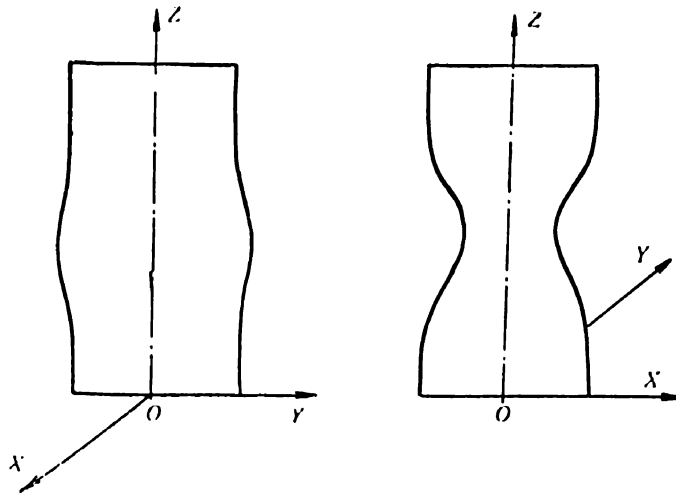


Рис. 2

Мы составим систему дифференциальных уравнений для определения $S_{\text{окр}}$, S и скорости течения в G . При выводе делаются следующие допущения:

а) течение в G можно рассматривать как потенциальное, а вес жидкости в G и ее напряжения сдвига на стенке пренебрежимы;

б) выводы современной теории устойчивости оболочек приложимы для расчета реальных объектов;

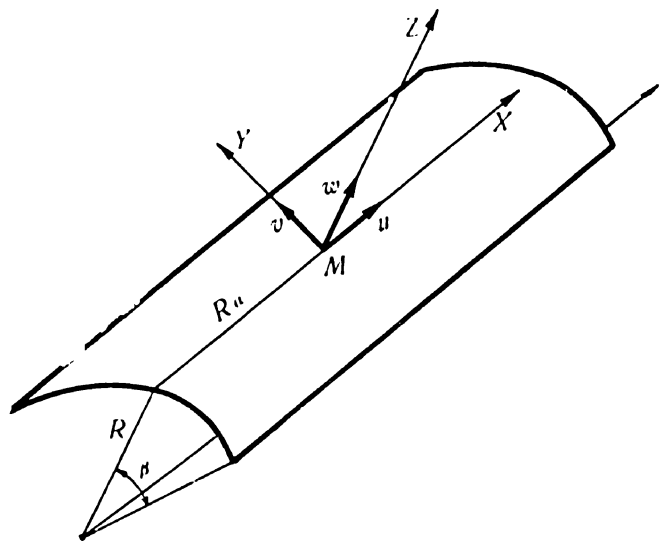
в) действительная граница течения находится на расстоянии $\frac{1}{2}h$ от S .

Пренебрегая h по отношению к R , мы принимаем, что граница течения совпадает с S .

Имеются косвенные соображения, что допущение а) справедливо по меньшей мере при больших числах Рейнольдса. Допущение наверняка будет справедливым, если участок, в котором труба теряет устойчивость, находится непосредственно за конфузуром. За конфузуром начинается формирование нового пограничного слоя и если длина участка не очень велика, течение в нем можно с хорошим приближением рассматривать как потенциальное. Примерно на таком же основании течение в гидравлических машинах рассматривается как потенциальное.

Что касается допущения б), оно должно быть рассмотрено с особой осторожностью, так как оно справедливо лишь в очень грубом приближении. Но этот порок присущ всем разделам нынешней теории устойчивости упругих систем. Экспериментов для изучения аэроупругой устойчивости цилиндрических труб не имеются, но зато сделано многочисленных экспериментов для исследования потери упругой устойчивости цилиндри

ческих труб. Результаты этих экспериментов показывают, хотя и не совсем уверенно, что нелинейные и линеаризованные теории устойчивости цилиндрических оболочек в основном правильно отражают особенности явления [3]. Из этих экспериментов можно заключить, что расчетные формулы



Фиг. 3

теории устойчивости оболочек можно использовать, если исправить их с необходимыми эмпирическими коэффициентами. Это утверждение доказано при упругих задачах. Нет оснований, однако, думать, что оно не будет верно и для внутренних задач аэроупругой устойчивости.

Допущение в) справедливо, если $h/R \ll 1$.

В дальнейшем мы воспользуемся уравнениями теории оболочек из [2]. Обозначения тоже заимствуем из [2]: так, w — радиальное перемещение срединной по-

верхности в точке M , u и v — перемещения по образующей и по касательной в той же точке, а Z , X и Y — соответствующие составляющие интенсивности внешней нагрузки (рис. 3); положение точки M_0 поверхности S_0 определяем при помощи угла β и безразмерного параметра $\alpha = -z/R$ (рис. 3). Потенциал течения в G обозначим через Ψ .

В согласии с нашими допущениями $X=Y=0$, а $Z \neq 0$. Z определяется динамическим давлением флюида. Строгие линеаризованные дифференциальные уравнения для цилиндрической оболочки в случае $X=Y=0$ и $Z \neq 0$ можно свести к одному уравнению [2]

$$(1) \quad c^2(\Delta\Delta + 2\Delta + 1)\Delta\Phi - 2c^2(1-\nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \right) \Delta\Phi + (1-\nu^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} - \frac{1-\nu^2}{12Ec^2} bZ = 0,$$

где $\Phi(\alpha, \beta)$ — разрешающая функция;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$ — оператор Лапласа;

E — модуль упругости;

ν — число Пуассона;

$$c^2 = \frac{h^2}{12R^2}.$$

Уравнением (1) можно описать деформацию оболочки под действием внешней нагрузки Z . Так точка M_0 , которая перед деформацией имела

цилиндрические координаты $r_0 = \beta$, $r_0 = R$ и $z_0 = -aR$ (рис. 3) после деформации переходит в точку M с координатами

$$(2) \quad \varphi = \beta + \frac{\nu}{R}, \quad r = R + w, \quad z = -aR - u,$$

причем u , v и w получаются из следующих формул:

$$(3) \quad u = c^2 \left(\frac{\partial^5 \Phi}{\partial \alpha^5} - \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^4} \right) + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^2} - \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3},$$

$$v = 2c^2 \left(\frac{\partial^5 \Phi}{\partial \alpha^4 \partial \beta} + \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^3} \right) - (2 + \nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3},$$

$$w = \frac{\partial^1 \Phi}{\partial \alpha^1} + 2 \frac{\partial^1 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^1 \Phi}{\partial \beta^1}.$$

Теперь можно перейти к выводу основных линейных уравнений аэроупругой устойчивости цилиндрических труб.

Пусть \vec{n} внешняя нормаль к S . Тогда внутреннюю задачу о потере аэроупругой устойчивости цилиндрической трубы можно сформулировать следующим образом:

Определить функцию $\Psi = \Psi(r, \varphi, z)$, поверхность S , заданная при помощи параметрических уравнений (2), и вспомогательные функции $\Phi(\alpha, \beta)$, $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ и $w(\alpha, \beta)$ так, чтобы:

$$(4) \quad \tilde{\Delta} \Psi = 0 \quad \text{в } G,$$

где $\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — трехмерный оператор Лапласа,

$$(5) \quad \vec{n} \cdot \text{grad } \Psi = 0,$$

$$(6) \quad c^2 (\Delta + 1)^2 \Delta^2 \Phi - 2c^2 (1 - \nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \right) \Delta \Phi + (1 - \nu^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{1 - \nu^2}{12 E c^2} h \frac{\rho}{2} [(\text{grad } \Psi)^2 - C_0^2] = 0.$$

Функции u , v , w и Ψ удовлетворяют некоторым граничным условиям на концах участка aa' и cc' .

При помощи (4) выражается тот факт, что течение в G допустимо рассматривать как потенциальное; (5) выражает параллельность скорости $\text{grad } \Psi$ к стенке S ; (6) получается, если в (1) выразим Z при помощи уравнения Бернуллы

$$Z = p_0 - p_e + \frac{\rho C_0^2}{2} - \frac{\rho}{2} (\text{grad } \Psi)^2,$$

где p_0 — статическое давление флюида в недеформированной части трубы, p_e — наружное давление. После подстановки этого выражения в (1) получаем

$$c^2 (\Delta + 1)^2 \Delta^2 \Phi - 2c^2 (1 - \nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \right) \Delta \Phi + (1 - \nu^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{1 - \nu^2}{12 E c^2} h \frac{\rho}{2} [(\text{grad } \Psi)^2 - C_0^2] = \frac{1 - \nu^2}{12 E c^2} h (p_0 - p_e).$$

Если положим

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \frac{\alpha^4}{4!} \frac{h}{12 Ec^2} (p_0 - p_e),$$

то обнаружим, что Φ удовлетворяет (6). Как видно из (3) и (7), замена Φ на $\tilde{\Phi} + \frac{\alpha^4}{4!} \frac{h}{12 Ec^2} (p_0 - p_e)$ только изменяет граничные условия. Поэтому мы будем употреблять в дальнейшем однородное уравнение (6), помня, что там должно было быть $\tilde{\Phi}$, которое из-за удобства снова обозначено через Φ . Что касается влияния p_0 и p_e , они учтены при помощи некоторого видоизменения граничных условий (7).

Система (4), (5), (6) и (7) линейная по отношению к упругим величинам и нелинейная по отношению к гидродинамическим. Для составления полностью линеаризованной системы представим Ψ в виде

$$(8) \quad \Psi = C_0 z \chi(r, \varphi, z),$$

причем $C_0 z$ — потенциал транспортного течения в недеформированной трубе, а $\chi(r, \varphi, z)$ — малая поправка, вызванная деформацией трубы.

Подставим (8) в (4), (5) и (6). Отбросив нелинейные члены, получаем

$$(9) \quad \Delta \chi = 0 \text{ в } G_0;$$

$$(10) \quad -\frac{C_0}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta \Phi = \frac{\partial \chi}{\partial r} \text{ на } S_0;$$

$$(11) \quad c^2(\Delta + 1)^2 \Delta^2 \Phi - 2c^2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \right) \Delta \Phi + (1 - \nu^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{1 - \nu^2}{12 Ec^2} C_0 h_0 \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \text{ на } S_0;$$

(12) u, v, w и Ψ удовлетворяют некоторым граничным условиям на концах участка aa' и ee' .

В (12) u, v и w выражаются через Φ посредством (3). Знак „—“ в (10) обусловлен тем, что согласно рис. 3 $z = -\alpha R$.

(9), (10), (11) искомая система линеаризованных дифференциальных уравнений. Ненулевые решения (9), (10), (11), удовлетворяющие граничным условиям (12), описывают состояние идеализированной системы труба — флюид после потери устойчивости.

В качестве иллюстрации решим следующую задачу:

Задача. Найти решение Φ и χ системы (9), (10), (11), которые являются периодическими функциями z с периодом L , если (12) имеет вид

$$(13) \quad u = w = 0 \text{ для } z = 0 \text{ и } z = L.$$

Легко найти строгое решение этой задачи. Решение дается функциями

$$(14) \quad \chi = \chi_0 \sin m\varphi \cos \pi n \frac{z}{L} J_m \left(i \frac{\pi nr}{L} \right),$$

$$(15) \quad \Phi = \Phi_0 \sin \left(\frac{\pi n R}{L} \alpha \right) \sin m\beta,$$

где J_m функция Бесселя порядка m ,

Функции (14) и (15) удовлетворяют (9), (10) и (11). При подстановке надо иметь в виду, что согласно рис. 3 $z = -aR$ и $\varphi = \beta$. Чтобы удовлетворить (13), необходимо положить $C_0 = C_{\text{окр}}$, причем $C_{\text{окр}}$ определяется формулой

$$(16) \frac{eC_{\text{окр}}^2}{2} = \frac{6Ec^2 R}{1-\nu^2} \frac{J'_m(i\gamma n)}{h J_m(i\gamma n)} \frac{c^2(\gamma^2 n^2 + m^2 - 1)^2(\gamma^2 n^2 + m^2)^2 + 2c^2(1-\nu)\gamma^2 n^2(\gamma^4 n^4 - m^4) + (1-\gamma^2)\gamma^4 n^4}{\gamma n(\gamma^2 n^2 + m^2)^2},$$

где $\gamma = \frac{\pi R}{L}$.

Из (16) видно, что существует бесчисленное множество дискретных критических значений скорости. В экспериментах наблюдаются потери устойчивости в двух случаях:

а) при раздувании, при котором новое равновесное состояние осесимметрическое, т. е. $n = 1$, $m = 0$;

б) при сплющивании (рис. 2), где можно приближенно положить $n = 1$, $m = 2$. Для этих случаев имеем соответственно: сплющивание $n = 1$, $m = 2$,

$$\frac{eC_{\text{окр}}^2}{2} = \frac{6Ec^2 R}{1-\nu^2} \frac{J'_2(i\gamma)}{h J_2(i\gamma)} \frac{c^2(\gamma^2 + 3)^2(\gamma^2 + 4)^2 + 2c^2(1-\nu)\gamma^2(\gamma^4 - 16) + (1-\nu^2)\gamma^4}{\gamma(\gamma^2 + 4)^2},$$

раздувание $n = 1$, $m = 0$,

$$\frac{eC_{\text{окр}}^2}{2} = \frac{6Ec^2 R}{1-\nu^2} \frac{J'_0(i\gamma)}{h J_0(i\gamma)} \frac{c^2(\gamma^2 - 1)^2 + 2c^2(1-\nu)\gamma + (1-\nu^2)}{\gamma}.$$

При $L \gg R$, т. е. если $\gamma \rightarrow 0$, а $n = 1$ и $m = 0$, получаем

$$(17) \quad \frac{eC_{\text{окр}}^2}{2} = \frac{h}{4R} E \left(1 + \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)} \right).$$

Задача (9), (10), (11), (12) сложна. В следующих двух параграфах даются упрощенные варианты этой задачи.

§ 3. Упрощенные линейные уравнения

В дальнейшем будем пользоваться технической теорией цилиндрических оболочек [2, 3]. В этой теории уравнения (1) и (3) заменяются соответственно уравнениями

$$(18) \quad c^2 \Delta^4 \Phi + (1-\nu^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} - \frac{1-\nu^2}{12Ec^2} h Z = 0;$$

$$u = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^2} - \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3},$$

$$(19) \quad v = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} - (2+\nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta},$$

$$w = \Delta^2 \Phi,$$

причем, как и в предыдущем параграфе, $X = Y = 0$, $Z \neq 0$.

Если принять во внимание (18), то в системе (9), (10), (11) изменяется только последнее уравнение. Вместо (11) имеем

$$(20) \quad c^2 \Delta^4 \Phi + (1-\nu^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{1-\nu^2}{12Ec^2} h C_0 \rho \frac{\partial \chi}{\partial \rho} = 0.$$

Надо иметь еще в виду, что в граничном условии (12) u, v, w определяются не как в § 1 из (3), а из (19).

Новая задача (9), (10), (20), (12) получена из первоначальной (9), (10), (11), (12) упрощением уравнений теории упругости. Дальнейшим упрощением будут подвергнуты гидродинамические члены уравнений.

Из рис. 1 и 2 видно, что целесообразно представить w в виде

$$w(a, \beta) = w^*(a) \cos m\beta,$$

где $w^*(a)$ — функция только a , а m равняется 2 (рис. 2) или 0 (рис. 1).

Обобщая этот способ факторизации, можно написать

$$(21) \quad \Phi(a, \beta) = \Phi^*(a) \cos m\beta,$$

$$(22) \quad \chi(r, \varphi, z) = \left(\chi^*(z) - \frac{r^2}{4m+4} \frac{d^2 \chi^*(z)}{dz^2} \right) r^m \cos m\varphi,$$

где $m=0$ или 2.

Такое представление является частным случаем более общего разложения. Общее разложение дадим в конце параграфа. Оно получается непосредственно из (21) и (22).

В теории оболочек показывается, что при L больше R формулу (21) можно применить для технической теории оболочек тем лучше, чем больше m ([3], стр. 467).

Рассмотрим законность приближенного представления потенциала течения при помощи формулы (22). Поставляя (22) в (9), получаем

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{4m+4} r^{m+2} \frac{d^4 \chi}{dz^4} \cos m\varphi.$$

Если бы χ было гармонической функцией, правая часть последнего равенства равнялась бы нулю. Наличие правой части показывает, что неточность эквивалентна источникам с плотностью

$$-\frac{r^{m+2}}{4\pi(4m+4)} \frac{d^4 \chi^4}{dz^4} \cos m\varphi.$$

Поправка к потенциалу χ , вызванная этими источниками, равняется

$$\chi(r_0, \varphi_0, z_0) = - \int \int \int_{(G_0)} \frac{r^{m+3} \cos m\varphi}{\sqrt{(z-z_0)^2 + r^2 + r_0^2} \cdot 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} \frac{d^4 \chi^*(z)}{dz^4} r dr d\varphi dz.$$

Грубая оценка последнего интеграла показывает, что

$$\frac{\tilde{\chi}}{\chi} \approx \frac{1}{8(m+1)} \left(\frac{R}{L} \right)^3 \left[\frac{R}{L} + \frac{1}{m+4} \right];$$

отсюда получаем, что

$$\frac{\tilde{\chi}}{\chi} \approx 0,01,$$

если $m=2$, а длина участка L соизмерима с диаметром $2R$ трубы.

Из этой оценки следует, что приближенное выражение (22) пригодно и для описания сплющиваний, происходящих в областях, соизмеримых с диаметром трубы. Вообще при сплющиваниях, которые наблюдаются, L

не бывает короче. Отсюда можно заключить, что гидродинамическая часть задачи очень проста — ее можно описать при помощи выражений (22), т. е. при помощи обычных производных.

Подставим (21) и (22) в (8) и (9). После замены переменной z с переменной $-aR$ находим

$$(23) \quad -\frac{C_0}{R^m} \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{\Delta}^2 \Phi^* = m \chi^* - \frac{m+2}{4(m+1)} \frac{d^2 \chi^*}{dz^2},$$

$$(24) \quad \left[c^2 \bar{\Delta}^2 + (1-\nu^2) \frac{\partial^1}{\partial \alpha^1} \right] \Phi^* = \frac{1-\nu^2}{12 E c^2} h C_0 \varrho R^{m-1} \left[\frac{d \chi^*}{da} - \frac{1}{4m+4} \frac{d^3 \chi^*}{da^3} \right],$$

где $\bar{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - m^2$.

Элиминируя χ^* , получаем

$$(25) \quad \left\{ \left(m - \frac{m+2}{4m+4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \left[c^2 \bar{\Delta}^4 + (1-\nu^2) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} \right] + \frac{1-\nu^2}{6 E c^2} \frac{h \varrho C_0^2}{R} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{4m+4} \frac{\partial^1}{\partial \alpha^1} \right] \bar{\Delta}^2 \right\} \Phi^*(\alpha) = 0.$$

Уравнение (23) есть искоемое упрощенное линейное уравнение. При помощи этого уравнения можно рассматривать аэроупругую устойчивость цилиндрических труб. С точки зрения гидродинамической (23) является хорошим приближением, если величина

$$\frac{1}{8(m+1)} \left(\frac{R}{L} \right)^3 \left[\frac{R}{L} + \frac{1}{m+4} \right]$$

пренебрежима. Что касается теории упругости, законность уравнения определяется областью применимости технической теории оболочек. Сравнение (23) с (18) показывает, что из этой теории заимствован упрощенный оператор $c^2 \bar{\Delta}^4 + (1-\nu^2) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4}$. Упрощенный оператор применим при $m \geq 4$ ([3], стр. 467). Если $m=2$, тогда лучше в (23) заменить упрощенный оператор соответствующим оператором из (1). После замены (23) принимает вид

$$\left\{ \left(m - \frac{m+2}{4m+4} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \left[c^2 (\bar{\Delta} + 1)^2 \bar{\Delta}^2 - 2c^2 (1-\nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - m^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \bar{\Delta} + (1-\nu^2) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} \right] + \frac{1-\nu^2}{6 E c^2} \frac{h \varrho C_0^2}{R} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{4m+4} \frac{\partial^1}{\partial \alpha^1} \right) \bar{\Delta}^2 \right\} \Phi^*(\alpha) = 0.$$

Уравнение (25) применимо при специальных граничных условиях. Это связано с недостаточной общностью выражений (21) и (22). Чтобы иметь возможность учесть большое разнообразие граничных условий, заменим (21) и (22) на более общие выражения

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} (\Phi_m^*(\alpha) \cos m\beta + \Phi_m^{**}(\alpha) \sin m\beta)$$

и

$$\chi(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\chi_m^*(z) - \frac{r^2}{4m+4} \frac{d^2 \chi_m^*(z)}{dz^2} \right) r^m \cos m\varphi$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\chi_m^{**}(z) - \frac{r^2}{4m+4} \frac{d^2 \chi_m^{**}(z)}{dz^2} \right) r^m \sin m\varphi.$$

Функции Φ_m^* , Φ_m^{**} , χ_m^* и χ_m^{**} находятся как решения систем типа (23) и (24).

§ 4. Нелинейные уравнения

Имеются основания предполагать, что линеаризованные уравнения не будут пригодны для решения всех задач аэроупругой устойчивости цилиндрических труб. Поэтому целесообразно к линейным уравнениям предыдущего параграфа добавить и систему нелинейных. Эта система упрощенная. Система составлена на основе предположения Кармана о существенности квадратных членов прогиба. В уравнениях сохранены и нелинейные члены гидродинамической природы, именно те, которые соизмеримы с квадратными членами прогиба.

Нелинейные уравнения, описывающие деформации цилиндрических оболочек, заимствуем из [3], стр. 470. В принятых нами обозначениях они записываются так:

$$(26) \quad c^2 \Delta^2 w - \frac{1-\mu^2}{ER^2} L(w, \Theta) + \frac{1-\mu^2}{ER} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha^2} - \frac{1-\mu^2}{Ec^2} \frac{R^2}{h} Z = 0,$$

$$(27) \quad \frac{1}{E} \Delta^2 \Theta + \frac{1}{2} L(w, w) - R \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Здесь новые обозначения имеют следующий смысл:

Θ — функция напряжений, связанная с нормальными напряжениями σ_α и σ_β и касательным напряжением τ при помощи соотношений

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2}, \quad \sigma_\beta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha^2}, \quad \tau = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha \partial \beta};$$

$L(w, \Theta)$ и $L(w, w)$ — выражения, которые определяются по формулам

$$L(w, \Theta) = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha \partial \beta},$$

$$L(w, w) = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2$$

Чтобы перейти к интересующей нас системе, необходимо выразить Z через скорость течения и выразить, что скорость течения в соседстве с стенкой параллельна ей.

Для определения Z воспользуемся уравнением Бернуллы

$$p_0 + \frac{\rho C_0^2}{2} = p + \frac{\rho}{2} (\text{grad } \Psi)^2,$$

где p_0 и C_0 соответственно давление и скорость в недеформированном участке, а p и $\text{grad } \Psi$ — в деформированном. Так как $Z = p - p_e$, где p_e наружное давление, имеем

$$Z = p_0 - p_e + \frac{\rho C_0^2}{2} - \frac{\rho}{2} (\text{grad } \Psi)^2.$$

Пусть M_0 и M положение данной точки срединной поверхности трубы до и после деформации. Мы будем пользоваться локальной координатной системой рис. 3, при чем $\xi = \alpha R$ будет абсциссой, $\eta = \beta R$ — ординатой и ζ — аппликатой. Обозначим соответствующие единичные векторы через \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Имеем

$$\text{grad } \Psi(M_0) = \frac{\partial \Psi(M_0)}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial \Psi(M_0)}{\partial \eta} \vec{j} + \frac{\partial \Psi(M_0)}{\partial \zeta} \vec{k}.$$

Но

$$\Psi = C_0 \xi + \chi(\xi, \eta, \zeta),$$

где $C_0 \xi$ потенциал течения до деформации. Поэтому

$$\text{grad } \Psi(M_0) = \left(C_0 + \frac{\partial \chi(M_0)}{\partial \xi} \right) \vec{i} + \frac{\partial \chi(M_0)}{\partial \eta} \vec{j} + \frac{\partial \chi(M_0)}{\partial \zeta} \vec{k}.$$

Чтобы вычислить $\text{grad } \Psi(M)$, заметим, что согласно (2) в локальной системе координат M будет иметь координаты u, v, w . Но тогда

$$\chi(M) = \chi(M_0) + \frac{\partial \chi(M_0)}{\partial \xi} u + \frac{\partial \chi(M_0)}{\partial \eta} v + \frac{\partial \chi(M_0)}{\partial \zeta} w,$$

$$\begin{aligned} \text{grad } \Psi(M) = & \left[C_0 + \frac{\partial \chi(M_0)}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(u \frac{\partial \chi(M_0)}{\partial \xi} \right) \right] \vec{i} \\ & + \left[\frac{\partial \chi(M_0)}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v \frac{\partial \chi(M_0)}{\partial \eta} \right) \right] \vec{j} + \left[\frac{\partial \chi(M_0)}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(w \frac{\partial \chi(M_0)}{\partial \zeta} \right) \right] \vec{k}. \end{aligned}$$

Необходимо еще определить порядок малости отдельных величин. В согласии с принципами, по которым выведены уравнения (26), (27) [3], w — величина первого порядка малости, а u и v — пренебрежимы. Далее, из (10) следует, что χ — тоже величина первого порядка малости. При составлении дифференциальных уравнений сохраним члены только первого и второго порядка малости. Членами порядком 3 и выше будем пренебрегать. По этому предписанию находим

$$(28) \quad \text{grad } \Psi(M) = \left[C_0 + \frac{\partial \chi(M_0)}{R \partial \alpha} \right] \vec{i} + \frac{\partial \chi(M_0)}{R \partial \beta} \vec{j} + \frac{\partial \chi(M_0)}{\partial r} \vec{k}$$

и

$$Z = (p - p_e) - \rho C_0 \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \right)^2 \right].$$

Подставляя Z в (26), после перехода к переменным α и β получим

$$(29) \quad \left\{ c^2 A^2 w - \frac{1 - \mu^2}{ER^2} L(w, \theta) + \frac{1 - \mu^2}{ER} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + \frac{1 - \mu^2}{E c^2} \frac{R}{h} \rho C_0 \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \right. \\ \left. - \frac{1}{E c^2} \frac{\rho}{2h} \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \beta} \right)^2 + R^2 \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} \right)^2 \right] \right\}_{r=R} = \frac{1 - \mu^2}{E c^2} \frac{R^2}{h} (p_0 - p_e).$$

Одно из уравнений нашей нелинейной системы составлено. Перейдем ко второму. Необходимо выразить, что вектор $\text{grad } \Psi$ лежит в касательной плоскости T . Последняя касается серединной поверхности деформированной оболочки в точке M . Выберем векторы

$$\vec{A}_1 = \vec{i} + \frac{\partial w(M_0)}{\partial \alpha} \vec{k},$$

$$\vec{A}_2 = \left(1 + \frac{v}{R}\right) \vec{j} + \left[\frac{\partial w(M_0)}{\partial \beta} \quad \frac{v}{R} \right] \vec{k};$$

с точностью до членов второго порядка малости эти векторы можно рассматривать как векторы, лежащие в T . Тогда условие, что $\text{grad } \Psi$ лежит в T , эквивалентно условию компланарности векторов \vec{A}_1 , \vec{A}_2 и $\text{grad } \Psi$. Из этого условия находим

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial w}{\partial \alpha} \\ 0 & 1 & \frac{\partial w}{\partial \beta} \\ C_0 + \frac{\partial \chi}{R \partial \alpha} & \frac{\partial \chi}{R \partial \beta} & \frac{\partial \chi}{\partial r} \end{vmatrix} = 0$$

или в нашем приближении

$$(30) \quad RC_0 \frac{\partial w}{\partial \alpha} = R \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \beta} \frac{\partial \chi}{\partial \beta}.$$

Получено и второе нелинейное уравнение. Если к нему добавим и уравнение (27), получим искомую систему трех уравнений: (27), (29), (30) для трех известных функций w , χ и Θ . Полезно w , χ и Θ представить так же как и соответствующие величины в конце § 3 и потом внести в систему (27), (29) и (30). Этим система будет подготовлена к применению вариационных методов.

По-видимому нелинейная система пригодна для описания локального сплющивания в неукрепленном участке трубы. Тогда на большом расстоянии от места сплющивания w будет ноль. Равны нулю будут и напряжения σ_α , σ_β и τ , а вместе с тем и Θ . Кроме того, в участках, удаленных от места сплющиваний, течение будет иметь нормальную скорость C_0 ; поэтому добавочный потенциал χ будет константой, а $\partial \chi / \partial \alpha = 0$. При помощи этих данных можно сформулировать следующую задачу

Задача. Найти функции w , χ и Θ , удовлетворяющие систему (27), (29) и (30) такие, что

$$(31) \quad \lim w(\alpha) = \lim \frac{\partial \chi(\alpha)}{\partial \alpha} = \lim \Theta(\alpha) = 0 \quad \text{для } \alpha \rightarrow \pm \infty.$$

§ 5. Осесимметрическая задача

Эта задача относится к раздуванию. Раздувание — возможная форма потери устойчивости системы труба—флюид. Оно приводит к несколькократному увеличению радиуса трубы, поэтому может причинить ее разрушение. Почему при осевой симметрии наблюдается раздувание, а не

сжатие, еще невыяснено. Во всяком случае осевая симметрия облегчает изучение этого явления.

Для описания осесимметрических форм потери устойчивости воспользуемся уравнением (25). Если поставим в (25) $m=0$ и $\partial^4\Phi/\partial\alpha^4 = w$, после двукратного интегрирования по α получим:

$$(32) \quad c^2 \frac{d^4 w}{d\alpha^4} + (1 - \nu^2)w + \frac{1 - \nu^2}{3} \frac{h}{c^2} \frac{p\alpha}{R E} \left[w - \frac{1}{4} \frac{d^2 w}{d\alpha^2} \right] = K_5 \alpha + K_6.$$

Постоянные K_5 и K_6 связаны с добавочным потенциалом χ , поэтому для их определения необходимо исходить из системы (23), (24).

Интересующая нас информация содержится в (23). Перепишем (23), полагая $m=0$ и $d^4\Phi/d\alpha^4 = w$:

$$\frac{2C_0}{R} \frac{dw}{d\alpha} = \frac{d^2 \chi^*}{d\alpha^2},$$

или

$$(33) \quad \frac{2C_0}{R} w = \frac{d\chi^*}{d\alpha} + k.$$

Для определения постоянной k рассмотрим небольшой участок G' трубы, находящийся непосредственно до левого конца основного участка G . Предположим, что труба в G' недеформируема, т. е., что уравнение срединной поверхности трубы в G'

$$W = W(\alpha)$$

от давления и скорости флюида не зависит. Для G' имеет место та же связь между w и χ , как и для G :

$$(34) \quad \frac{2C_0}{R} W = \frac{d\chi^*}{d\alpha} + K.$$

Значение K зависит от вида функции $W(\alpha)$. В дальнейшем нас будет интересовать случай, в котором G' цилиндр радиуса R , т. е. $W=0$. Воспользуемся уравнением

$$\frac{\partial \chi}{\partial r_{r=R}} = 0,$$

которое означает, что течение, соответствующее χ , через стенку G' не проникает. Подставляя сюда выражение (22), получаем

$$\frac{R}{2} \frac{\partial^2 \chi^*}{\partial \alpha^2} = 0,$$

откуда заключаем, что

$$\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} = K_1.$$

Мы нашли, что в G' добавочный потенциал χ является потенциалом транспортного течения со скоростью K_1 . Так как χ малая добавка, следует, что K_1 тоже малая величина. Добавим K_1 к скорости C_0 основного течения. Если теперь в качестве скорости основного течения примем $C_0 + K_1$, то в добавочном потенциале необходимости не будет, т. е. в G' можно положить $\partial \chi^*/\partial \alpha = 0$. Но на G' функция $W=0$, следовательно в (34) K

будет равно нулю. Так как K из (34) и k из (33) одна и та же постоянная, следует, что

$$\frac{2C_0}{R} \omega = \frac{\partial \chi^*}{\partial a}.$$

После подстановки полученного выражения для $\frac{\partial \chi^*}{\partial a}$ в (24), полагая $m=0$ и $d^4 \Phi^* / da^4 = \omega$, находим

$$c^2 \frac{d^4 \omega}{da^4} + (1 - \nu^2) \omega - \frac{1}{3c^2} \frac{h}{R} \frac{pd}{E} \left(\omega - \frac{1}{4} \frac{d^2 \omega}{da^2} \right) = 0.$$

При отыскивании наименьшего критического значения скорости, при не очень коротких участках, можно упростить последнее дифференциальное уравнение, пренебрегая $-\frac{1}{4} \frac{d^2 \omega}{da^2}$. После перехода к независимой переменной $z = -aR$ упрощенному уравнению можно придать вид

$$(35) \quad \frac{d^4 \omega}{dz^4} - \frac{12(1 - \nu^2)}{h^2 R^2} \left(1 - 4 \frac{pd}{E} \right) \omega = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (9) работы [1], которое получено другим способом.

Уравнение (35) необходимо решить с граничными условиями.

Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

Задача. Найти наименьшее критическое значение $C_{\text{кр}}$ скорости, если концы участка G длиной L зашпемлены, т. е.

$$(36) \quad \omega = \frac{d\omega}{dz} = 0 \text{ для } z=0 \text{ и } z=L,$$

а входной участок — цилиндр радиуса R .

Из сказанного выше следует, что решение задачи сводится к решению уравнения (35) с граничными условиями (36). В [1] показано, что эта задача имеет нетривиальные решения для бесконечного множества дискретных значений C_0 . Для самого низшего в [1] приведена формула

$$(37) \quad pd_{\text{кр}} = \frac{e C_{\text{кр}}^2}{2} = \left(1 + 48 \frac{R^2 h^2}{L^4} \right) \frac{h}{4R} E.$$

При вычислении коэффициента перед $\frac{R^2 h^2}{L^4}$ для числа Пуассона ν принято значение $1/3$, а сам коэффициент округлен с 2,95 на 3.

Сравнение (37) с (17) показывает, что влияние зашпемления велико. Тем не менее, при очень тонких стенках трубы, значения критической скорости, полученные по обеим формулам, почти совпадают.

§ 6. Раздувание длинного участка

Из (17) и (37) видно, что основная критическая скорость мало зависит от длины участка L , если L/R порядка нескольких единиц. Поэтому интересно исследовать предельный случай $L \gg R$. В результате этого исследования найдется простой способ для определения критической

скорости, т. е. то значение C_0 , ниже которого обычный радиус трубы является устойчивым. Кроме того будет возможно определить и радиус трубы, при котором она находится в устойчивом равновесии после раздувания.

Пусть радиус трубы в невозмущенном участке R , а в возмущенном $R+w$, причем w не зависит от φ и от z . Окружность трубы удлинилась на $2\pi(R+w) - 2\pi R$. Такому удлинению соответствует напряжение σ в стенке трубы.

$$\sigma = \frac{w}{R} E,$$

где E — среднее значение модуля упругости, вообще некоторая функция удлинения w/R . Напряжение $\sigma = w/R$ подержалось бы, если разница q между внутренним и внешним давлением имела бы значение

$$(38) \quad q = \sigma \frac{h}{R} = \frac{w}{R^2} h E.$$

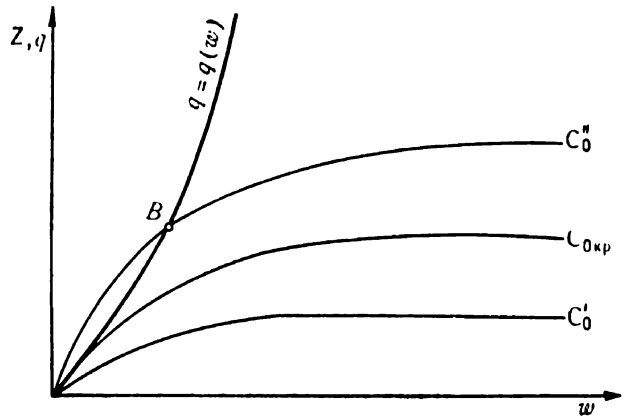


Рис. 4

Фактическое значение этой разницы обозначим через Z . Если p_e наружное давление, p_0 и p статическое давление в невозмущенном и возмущенном участке трубы соответственно, то для $Z = p - p_e$ по уравнению Бернулли получим

$$Z = \frac{\rho C_0^2}{2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{w}{R}\right)^4} \right].$$

При написании формулы мы приняли, что $p_0 - p_e = 0$. Случай $p_0 - p_e \neq 0$ ничего нового не вносит. Видно, что при увеличении w Z стремится асимптотически к постоянному значению. На рис. 4 изображены функции $q = q(w)$ и $Z = Z(w, C_0)$, причем $Z = Z(w, C_0)$ изображено для трех значений C_0 : C_0' , $C_{0кр}$ и C_0'' ; $C_0' < C_{0кр} < C_0''$. Из рисунки видно, что для всех $C_0' < C_{0кр}$ система труба—флюид устойчива. Устойчивость начинает теряться при $C_{0кр}$. Из равенства наклонов кривых $Z = Z(w, C_0)$ и $q = q(w)$ при $w \rightarrow 0$ находим

$$(39) \quad \frac{\rho C_{0кр}^2}{2} = \frac{1}{4} \frac{h}{R} E,$$

причем E — значение модуля упругости при значениях σ близких к нулю.

При $C_0 > C_{0кр}$ радиус R больше не является устойчивым. Новый устойчивый радиус получается графически из положения точки B на рис. 4.

И так, первый радиус устойчивого равновесия это радиус трубы R . Этот радиус устойчив, если $C_0 < C_{0кр}$. При $C_0 > C_{0кр}$ R перестает быть устойчивым радиусом. Значение нового устойчивого радиуса находится графически.

Заключение

Потеря устойчивости цилиндрической трубы под влиянием гидродинамических сил внутреннего течения рассмотрена как внутренняя задача аэроупругости. В работе исходит из т. наз. основной задачи, при которой задача о потере устойчивости системы формулируется при минимум допущений. Для решения основной задачи, в § 2 выведены линеаризованная система (9), (10), (11), (12). Для иллюстрации решена задача об определении критической скорости при предположении, что потенциал и упругие перемещения стенки трубы периодические функции координаты z . Решение приводит к формуле (16), из которой видно, что существует бесчисленное множество критических значений скорости. В §§ 3 и 5 рассмотрены упрощения основных линеаризованных уравнений, причем в § 3 выводится упрощенная система в общем виде — уравнения (23), (24) или (25), а в § 5 изучаются те же системы в частном случае осевой симметрии. В § 5 получено уравнение (35) для определения критической скорости раздувания. В том же параграфе выведена формула (37) для критической скорости при защемлении концов раздутого участка трубы.

Нелинейная постановка внутренней задачи аэроупругости изучается в § 4 в общем виде и в § 6 — для специального случая. Нелинейная система (27), (29) и (30) выведена при предположении, что на ряду с членами прогиба первого порядка малости существенны и квадратические. Сохранены тоже и квадратические члены гидродинамического происхождения. В § 6 рассматривается раздувание на длинном участке. Из-за большой симметрии возможно найти радиус трубы после раздувания. Это задача по существу нелинейная.

ЛИТЕРАТУРА

1. Недялков И. П., Върху устойчивоста на тънкостенни тръби, през които тече флуид, Годишник на МЭИ, т. IV, 1950—1952.
2. Власов В. З., Общая теория оболочек и ее приложение в технике, Москва, 1949.
3. Вольмир А. С., Устойчивость упругих систем, Москва, 1963.
4. Недялков И. П., Stability of Cylindrical Tubes Caused by Hydrodynamic Forces (в печат).

Постъпила на 29. III. 1965 г.

AEROELASTIC STABILITY OF CYLINDRICAL TUBES

Ivan P. Nedyalkov

(Summary)

The theory of aeroelastic stability studies the mechanical interactions between deformable bodies and the stream flowing around them. The essential aspect of this case is that it is always a matter of external flows. There are, however, analogical phenomena in which the flows are internal, and a typical example is the behaviour of a soft-walled tube through which a fluid is flowing. In this case we have an elastic system and an internal flow. When the velocity C_0 of the flow reaches a certain critical value C_{0cr} the tube increases its original radius (two or three times in some cases) and passes into a new state of equilibrium. In this case one can speak about aeroelastic stability of a cylindrical tube, this being the object of the present investigation. The fact that the flow is internal proved to be an essential one and it does not permit the utilization of the methods of solving the external problems of aeroelasticity.

A system of linearized equations has been worked out in § 2 for describing the phenomenon examined. These equations are solved exactly in a particular case. The equations are greatly simplified in the following paragraph and this makes possible the practical solution of a broad class of problems. The equations of this problem in non-linear approximation are worked out in § 4. A thorough examination is made of the problem in § 5 which is one of axial symmetry, while in § 6 the same problem is examined under the assumption that the length of the deformed section is very great.