БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

ЕДИН ТИП ЗАДАЧИ ОТ НЕЛИНЕЙНОТО ПРОГРАМИРАНЕ, РАЗРЕШИМИ ЧРЕЗ СИМПЛЕКС-ПРОЦЕДУРА

Веселин Спиридонов и Милчо Германов

1. В теорията на линейното програмиране са известни редица практически удобни методи за решаване на линейни задачи за условен екстремум. Такива са например симплексният метод с неговите модификации, разпределителният метод за транспортната задача, унгарският метод и др. За разлика от тях методите на нелинейното програмиране са значително по-сложни и трудно приложими дори и в случаите, когато на функцията и областта, в която се търси екстремумът, са наложени силни ограничения. Затова представлява интерес да се види в кои случаи процедурите, използвани в методите на линейното програмиране, могат да служат за решаване на нелинейни задачи. В настоящата работа се разглежда един клас от нелинейни функции, за които намирането на екстремум може да се извърши чрез симплекс-процедура. Тук не става дума за намиране на нов симплексен метод за решаване на задачи от нелинейното програмиране, както това се прави в [1], [2] и [3], а до използване на симплекс-процедурата от линейното програмиране в нелинейни задачи.

В тази работа се дефинира един клас функции и се показва, че намирането на минимума на функция от този клас в изпъкнала многостенна област може да стане чрез обикновената симплекс-процедура. Показва се, че за функции от този клас по същия начин може да се реши и задачата за намиране на максимум. Получените резултати се прилагат и за решаване на нелинейни транспортни задачи.

Някои от изложените тук резултати са публикувани накратко в [4].

2. Ще разгледаме следната основна

Задача I. Да се намери минимумът на функцията

$$f(X)=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1}$$

в изпъкналата, ограничена и затворена многостенна област R, определена от системата неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqq b_i, \quad i=1, 2, \dots, m; \ m>n, \tag{2}$$

ако f притежава непрекъснати и ограничени втори частни производни по всички променливи x_j, $j=1, 2, \dots, n$, в R и е строго изпъкнала функция в R.

Поставената задача понякога се нарича „задача на изпъкналото програмиране". Условието за строга изпъкналост се разбира в следния смисъл: ако X и Y са две произволни точки от R, то

$$f(aX+(1-a)Y)<af(X)+(1-a)f(Y),$$

където $0<a<1$.

Съвкупността на функциите f, удовлетворяващи условието на задача I, ще означаваме с C_R^2.

Определение I. Ще казваме, че задача I може да бъде решена чрез симплекс-процедура, ако са изпълнени следните условия:

а) функцията f има минимум в някой връх X^* на многостена R;

б) за всеки връх X_1 на R съществува крайна редица от върхове на R

$$X_1, X_2, \ldots, X_p=X^* \tag{3}$$

такава, че всеки два съседни нейни члена принадлежат на общ ръб и

$$f(X_1)>f(X_2)>\ldots>f(X_p). \tag{4}$$

Забележка. Тъй като f е непрекъсната функция в затворената област R, тя достига своята минимална стойност в точка от R. При това минимумът се достига само в една точка поради строгата изпъкналост на f. Ако f има локален минимум в R, той ще бъде и абсолютен.

Определение 2. Ще казваме, че функцията $f\in C_R^2$ има локален минимум върху стена S на R, ако минималната стойност на f за всички точки от S се достига за вътрешна точка на S.

Определение 3. Ще казваме, че една функция f от C_R^2 принадлежи на клас A_R, ако не притежава локални минимуми както във вътрешността на R, така и по всички стени на R от първи, втори, ..., $n-1$-ви ред.

От определението се вижда, че всяка функция, принадлежаща на класа A_R, може да има минимум в R само във връх на R. Трябва да се отбележи, че принадлежността на една функция f към класа A_R зависи съществено и от областта R. Така например, ако

$$f(x, y)=x^2+y^2,$$

$$R'=\begin{cases} 2x+y\geq 0, \\ -2x+y\geq 0, \\ -x-y\geq -3; \end{cases} \qquad R''=\begin{cases} 2x+y\geq 0, \\ -2x+y\geq 0, \\ -y\geq -2, \end{cases}$$

то $f\in A_{R'}$, но $f\overline{\in} A_{R''}$.

Нашата цел по-нататък ще бъде да установим, че задача I за функции от класа A_R може да бъде решена чрез симплекс-процедура. Действително в този случай условието а) е изпълнено. Трябва да се установи, че е изпълнено и условието б). Ще докажем предварително някои твърдения.

Теорема 1. Ако функцията f от C_R^2 има локален минимум в R, тя има локален минимум поне върху една от стените от $n-1$-ви ред.

Доказателство. Функцията f е строго изпъкнала и ако има локален минимум в R, той е единствен. Нека f има локален минимум и той се получава в точка X_0, която е вътрешна за R. Тогава можем да изберем $\delta>0$ така, че ако $|X-X_0|\leq\delta$, то $X\in R$. Ще докажем, че съществува такова $\varepsilon>0$, за което ако $f(X)-f(X_0)=\varepsilon$, то $|X-X_0|\leq\delta$. Да допуснем противното, т. е. че за всяко $\varepsilon>0$ съществува точка $X^*\in R$ такава, че $f(X^*)-f(X_0)=\varepsilon$, но $|X^*-X_0|>\delta$. Да означим $\varepsilon=\min\limits_{|X-X_0|=\delta}(f(X)-f(X_0))$. От непрекъснатостта и строгата изпъкналост на f следва, че $\varepsilon>0$. Разглеждаме отсечката X^*X_0. Нека X' е точката от тази отсечка, за която $|X'-X_0|=\delta$. Тогава съществува число α, $0<\alpha<1$, за което $X'=\alpha X_0+(1-\alpha)X^*$. Тъй като $|X'-X_0|=\delta$, от избора на ε следва, че $f(X')-f(X_0)\geq\varepsilon$. Тогава можем да напишем

$$f(X_0)+\varepsilon\leq f(X')=f(\alpha X_0+(1-\alpha)X^*)<\alpha f(X_0)$$
$$+(1-\alpha)f(X^*)=\alpha f(X_0)+(1-\alpha)[f(X_0)+\varepsilon]<f(X_0)+\varepsilon.$$

Полученото противоречие показва, че при направения избор на ε, ако $f(X)-f(X_0)=\varepsilon$, то $|X-X_0|\leq\delta$. Оттук следва, че повърхнината на ниво $f(X)=f(X_0)+\varepsilon$ лежи изцяло в R. Ще покажем, че тази повърхнина на ниво е затворена. Да разгледаме точките X', за които $|X'-X_0|=\delta$. За всяка от тях имаме $f(X')\geq f(X_0)+\varepsilon$. Нека X_1' е произволна измежду тези точки. Тогава върху отсечката X_0X_1' поради непрекъснатостта на f съществува точка X, за която $f(X)=f(X_0)+\varepsilon$. Тази точка е единствена поради строгата изпъкналост на f. Тъй като X_1' беше избрана произволно, а f е непрекъсната функция в R, съвкупността от точки X, за които $f(X)=$ $=f(X_0)+\varepsilon$, образуват затворена повърхнина. От диференцируемостта на f следва, че тази повърхнина е гладка.

Да означим $C_0=f(X_0)+\varepsilon$. Да разгледаме повърхнините на ниво $f(X)=C$, където $C\geq C_0$. Да оставим параметърът C да расте. Тъй като функцията е ограничена и непрекъсната в R, съществува такова число C_1, че повърхнината на ниво $f(X)=C_1$ лежи изцяло в R и има допирна точка поне с една от стените на R. В тази точка върху тази стена функцията достига минималната си стойност на стената. Тя е вътрешна за $n-1$-мерната стена поради гладкостта на повърхнините на ниво. Следователно функцията f има локален минимум поне върху една от стените на R от $n-1$-ви ред.

Теорема 1 може да се обобщи:

Т е о р е м а 2. Нека S е k-мерна стена на областта R $(2\leq k\leq n)$. Ако функцията f има локален минимум в S, то тя има локален минимум поне върху една от стените на S от $k-1$-ви ред.

Доказателство. Нека f има локален минимум във вътрешната точка X_0 на S. Да разгледаме повърхнините на ниво на f в S. Те представляват сечения на повърхнините на ниво на f в R със самата област S. Тогава може да се избере $\varepsilon>0$ така, че повърхнината на ниво $f(X)=f(X_0)+\varepsilon$ да лежи изцяло в S. По-нататък доказателството се извършва по същия начин като в теорема 1.

С помощта на доказаните теореми ще установим необходими и достатъчни условия една функция да принадлежи на класа A_R.

Т е о р е м а 3. Една функция $f\in C_R^2$ принадлежи на класа A_R тогава и само тогава, когато няма локални минимуми по ръбовете на многостена R.

Доказателство. Да напомним, че под ръб на многостен се разбира стена от първи ред. Тогава необходимостта на условието следва непосредствено от определението на класа A_R. Да установим достатъчността. Допускаме, че функцията f не принадлежи на класа A_R. Тогава на една от стените от k-ти ред $(2 \leq k \leq n)$ f ще има локален минимум. От теорема 2 следва, че тогава тя трябва да има локален минимум поне на една от стените от $k-1$-ви ред. Като приложим многократно теорема 2, получаваме, че f има локален минимум върху ръб на многостена. Това противоречие доказва достатъчността на условието в теорема 3.

Доказаната теорема 3 е еквивалентна на всяка от следните две теореми:

Теорема 4. Функцията $f \in C_R^2$ принадлежи на класа A_R тогава и само тогава, когато е монотонна по всеки ръб на многостена R.

Теорема 5. Функцията $f \in C_R^2$ принадлежи на класа A_R тогава и само тогава, когато проекциите на градиента на f в краищата на всеки ръб върху ръба са еднакво насочени вектори.

Еквивалентността на теоремите 3, 4 и 5 следва от следните съображения. В едномерния случай всяка функция $f \in C_R^2$, която принадлежи на класа A_R, трябва да бъде строго монотонна в разглеждания интервал. Следователно, ако f няма локален минимум по ръбовете на многостена, тя ще бъде монотонна функция по тях. Оттук се вижда еквивалентността на теорема 3 и теорема 4. От друга страна, една функция $f \in C_R^2$ е монотонна върху ръб на многостена тогава и само тогава, когато проекцията на градиента върху ръба е вектор, който не сменя посоката си. В този случай и в краищата на ръба проекциите на градиента ще бъдат еднакво насочени вектори. Обратно — ако в краищата на един ръб проекциите на градиента са еднакво насочени вектори и $f \in C_R^2$, f ще бъде монотонна функция по ръба. Следователно теорема 4 и теорема 5 са еквивалентни.

В сила е следната

Теорема 6. Необходимо и достатъчно условие функцията $f \in C_R^2$ да има абсолютен минимум във върха X_p на R е проекциите на градиента в X_p върху всички ръбове, излизащи от X_p, да бъдат вектори, насочени към съседните върхове.

Като се има пред вид принадлежността на f към класа C_R^2, тази теорема следва от общата теория на нелинейното програмиране (виж напр. [9]). Конусът на допустимите направления за върха X_p и конусът на възможните направления (който в този случай представлява онова полупространство, ограничено от хиперравнината през X_p, перпендикулярна на градиента в X_p, което не съдържа вектора градиент) имат единствена обща точка — самия връх X_p.

С помощта на доказаните дотук твърдения ще установим следната основна

Теорема 7. Ако $f \in A_R$, задача I може да бъде решена чрез симплекс-процедура.

Доказателство. По-горе споменахме, че условието а) от определение 1 е изпълнено за функции от класа A_R. Сега ще покажем, че е изпълнено и условието б). Нека X_1 е произволен връх на многостена R. Разглеждаме съседните върхове на X_1 (тези, които имат общ ръб с X_1).

Ако за поне един от тях, например за X_2, е изпълнено неравенството $f(X_1)>f(X_2)$ (ако това е в сила за повече от един връх, за X_2 избираме кой да е от тях), X_2 определяме за втори елемент от редицата (3). По същия начин получаваме върховете X_3, X_4 и т. н. Тъй като броят на всички върхове на многостена е краен, а редицата от съответните функционни стойности (4) е строго намаляваща, ще достигнем до връх X_p, за който стойността на функцията е по-малка, отколкото за всички съседни върхове. Ще покажем, че в този връх имаме абсолютен минимум в R. От монотонността на f (теорема 4) по ръбовете следва, че тя е строго растяща функция, когато X се мени от X_p към всеки от съседните върхове. Тогава проекциите на градиента в X_p на всички ръбове, излизащи от X_p, ще бъдат вектори, насочени към съседните върхове. От теорема 6 следва, че в X_p функцията има абсолютен минимум за R.

Теорема 7 представлява едно достатъчно условие за възможността задача I да бъде решена чрез симплекс-процедура. При решаване на конкретни задачи трябва да се проверява дали разглежданата функция (1) принадлежи на класа A_R. Тъй като извършването на една такава проверка е свързано със значителни трудности, ще дадем следния алгоритъм за едновременна проверка за монотонност и намиране на минимума:

Алгоритъм:

1) Намираме произволен връх на многостена (по методи, известни от линейното програмиране).

2) Намираме вектора градиент във върха.

3) Избираме един съседен връх и намираме вектора градиент в него. Определяме проекциите на градиентите от 2) и 3) на общия ръб и сравняваме посоките им. Ако двете проекции са еднопосочни с направлението от втория към първия връх, с новия връх преминаваме към 2); ако не са — продължаваме с 4).

4) Избираме следващия съседен връх и отново извършваме процедурата от 3). Ако сме изчерпили всички съседни върхове и не сме преминали към 2), продължаваме с 5).

5). Проверяваме дали проекциите на вектора градиент в разглеждания връх и във всички съседни върхове върху общите им ръбове са еднакво насочени вектори. Ако има поне един връх, за който това не е изпълнено, задача I не може да се реши чрез симплекс-процедура. Ако за всички съседни върхове това условие е изпълнено, задача I е решена — в разглеждания връх имаме абсолютен минимум.

Този алгоритъм е основан на следните съображения. Ако $f \in C_R^2$ и X_p е такъв връх на многостена R, за който е изпълнено условието на теорема 6, в този връх се получава абсолютният минимум. Ако намерим редица от върхове на многостена

$$X_1, X_2, \dots, X_p \tag{3}$$

такава, че всеки два съседни нейни члена принадлежат на общ ръб и f е монотонно намаляваща по начупената линия, съставена от тези общи ръбове, задача I се решава чрез симплекс-процедура. Ако $f \in A_R$, такава редица от върхове винаги съществува независимо от избора на първия връх. Ако $f \bar{\in} A_R$, но $f \in C_R^2$ и достига минимума си в R във връх на R, то при подходящ избор на първия връх може да се образува редицата (3). Алгоритъмът цели да бъде обхванат и този случай.

С помощта на изложения алгоритъм едновременно се проверява дали функцията f е монотонна по разглежданите ръбове и се извършва симплекс-процедурата. Направлението на движението по ръбовете се извършва в посока, обратна на посоката на проекцията на градиента. За разлика от известните градиентни проективни методи [6], [7] и [8], тук проектирането на градиента се прави само по ръбове, а не и по стени на R. Затова разглежданата процедура е симплексна.

Съвсем аналогично се разглежда и дуалната задача на задача I. Тя е

Задача II. Да се намери максимумът на функцията

$$f(X)=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{7}$$

в изпъкналата, ограничена и затворена многостенна област R, определена от системата неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i=1, 2, \dots, m; \; m>n, \tag{8}$$

ако f притежава непрекъснати и ограничени втори частни производни по всички x_j, $j=1, 2, \dots, n$ в R и е строго вдлъбната функция в R.

3. По-подробно ще се спрем на задачата, която в известен смисъл е обратна на задача I.

Задача III. Да се намери максимумът на функцията $f \in C_R^2$ в областта R, определена от неравенствата (2).

В тази задача се търси максимум на изпъкнала функция в многостенната област R. В теорията на нелинейното програмиране тази задача обикновено не се разглежда, тъй като в общия случай не са известни условия за единственост на решението и методи за неговото намиране.

Определение 4. Ще казваме, че една функция f има локален максимум във връх на R, ако съществува околност на върха, във всички точки на сечението на която с многостена функцията има стойност, по-малка или равна на стойността ѝ във върха.

Особеността на задача III се състои в това, че не е изключена възможността в няколко върха на многостена функцията да има локални максимуми. Това представлява пречка за прилагане на градиентни методи.

Ние ще покажем, че ако $f \in A_R$, задача III може да бъде решена чрез симплекс-процедура. По-точно ще дадем следното

Определение 5. Ще казваме, че задача III може да бъде решена чрез симплекс-процедура, ако са изпълнени условията:

а) функцията f има максимум в някой връх X^* на R;

б) за всеки връх X_1 на R съществува крайна редица от върхове на R

$$X_1, X_2, \dots, X_p = X^* \tag{9}$$

такава, че всеки два съседни нейни члена принадлежат на общ ръб и

$$f(X_1) < f(X_2) < \dots < f(X_p). \tag{10}$$

Тъй като f е непрекъсната функция в затворената област R, максимумът се достига. При това е в сила следната

Теорема 8. Ако $f \in C_R^2$, максимумът на f се достига във връх на R.

Доказателство. Да допуснем, че максимумът се получава в точка X_0 от R, която не е връх. Тогава съществува отсечка X_1X_2, принадлежаща на R, за която X_0 е вътрешна точка. От условието за строга изпъкналост на f имаме

$$f(aX_1+(1-a)X_2)<af(X_1)+(1-a)f(X_2),$$

където $0<a<1$. Нека точката X_0 съответствува на $a=a_0$. Тогава получаваме

$$f(X_0)<a_0 f(X_1)+(1-a_0)f(X_2). \tag{11}$$

Тъй като $f(X_0)\geq f(X_1)$ и $f(X_0)\geq f(X_2)$, замествайки $f(X_1)$ и $f(X_2)$ в дясната страна на (11), получаваме противоречието $f(X_0)<f(X_0)$. С това теоремата е доказана.

Сега ще докажем следната

Теорема 9. Ако $f \in A_p$, тя не може да има повече от един локален максимум във връх на R.

Доказателство. Допускаме противното: f има локални максимуми поне в два върха — X_1 и X_2. Разглеждаме отсечката X_1X_2. Тя принадлежи изцяло на областта R. Да разгледаме стойностите на функцията за точките от тази отсечка. Тъй като $f \in C_R^2$, съществува точно една точка X_3, вътрешна за отсечката X_1X_2, за която функцията достига минималната си стойност върху отсечката. Тогава проекцията на вектора градиент в X_3 върху X_1X_2 е нулев вектор. Възможни са два случая:

а) Векторът градиент в X_3 е нулев. Тогава поради строгата изпъкналост на f в R следва, че в X_3 функцията има локален минимум и следователно $f \bar{\in} A_R$.

б) Векторът градиент в X_3 не е нулев. Тогава определяме хиперравнина през X_3, нормална на него. Нека R_1 е сечението на R с положителното полупространство на хиперравнината. Разглеждаме многостена R_1. Ако R_1 не съдържа вътрешни точки на R, т. е. хиперравнината съдържа стена на R, тогава векторът градиент в X_3 ще бъде нормален на тази стена. В този случай f има локален минимум върху стена на R (в точката X_3) и следователно $f \bar{\in} A_R$. Нека сега R_1 съдържа вътрешни точки на R. Разглеждаме повърхнините на ниво на f. Да означим $C_1=f(X_3)$. Тогава $f(X)=C_1$ е повърхнина на ниво, която се допира до прекараната хиперравнина в точката X_3. Нека $f(X_1)\leq f(X_2)$. Тъй като във върха X_1 f има локален максимум, то съществува такова число C_2, $C_2<f(X_1)$, че повърхнината на ниво $f(X)=C_2$ пресича всички стени на R_1, минаващи през X_1. Сега да оставим параметърът C да се мени в интервала (C_1, C_2). Тъй като за $C=C_1$ повърхнината на ниво $f(X)=C_1$ се допира външно до R_1, а за $C=C_2$ $f(X)=C_2$ пресича всички стени на R_1, минаващи през X_1, то съществува такова C, за което повърхнината на ниво $f(X)=C$ се допира вътрешно до стена на R_1, която е също и стена на R. Следователно и в този случай $f \bar{\in} A_R$. С това теоремата е доказана.

От теорема 9 следва, че ако $f \in A_R$, задача III има единствено решение. Действително, да допуснем, че максималната стойност на f в R се достига най-малко в два върха (от теорема 8 е известно, че максимумът на f

в R може да се достига само във връх). Тъй като $f \in C_R^2$, в тези върхове максимумите ще бъдат локални според определение 4. Това противоречи на теорема 9.

Дотук доказахме, че ако $f \in A_R$, задача III има единствено решение, което се получава във връх на R и което съвпада с единствения локален максимум на f във връх на R. Сега ще покажем, че той може да бъде намерен чрез симплекс-процедура.

Теорема 10. Ако $f \in A_R$, задача III може да бъде решена чрез симплекс-процедура.

Доказателство. Изпълнението на условие а) от определение 5 се вижда от теорема 8. Ще покажем, че е в сила и условието б).

Нека X_1 е произволен връх на R. Разглеждаме съседните върхове. Ако поне за един от тях f има по-голяма стойност, избираме този връх за X_2. По този начин получаваме редицата (9). Тъй като броят на върховете е краен и редицата (10) е строго растяща, ще получим точка X_p, за която стойността на f е по-голяма от стойностите ѝ във всички съседни върхове. Сега ще установим, че в X_p функцията има локален максимум. От теорема 9 веднага ще следва, че максимумът в X_p е абсолютен.

По ръбовете, водещи в X_p от съседните върхове, функцията е монотонно растяща. От строгата изпъкналост на f следва, че проекциите на градиента в X_p върху ръбовете са ненулеви вектори, насочени по продълженията на ръбовете навън от R. Да си вземем произволен лъч през X_p, насочен навътре в R. Проекцията на градиента в X_p върху този лъч ще бъде ненулев вектор, насочен по продължението на лъча навън от многостена. От непрекъснатостта на частните производни на f следва, че за точките от лъча в една достатъчно малка околност на X_p този вектор ще запази посоката си. Това показва, че за всички точки от тази околност, които принадлежат на R, стойността на функцията е по-малка от $f(X_p)$. Понеже изборът на лъча беше произволен през X_p в R, то в X_p имаме локален максимум. С това теорема 10 е доказана.

Алгоритъмът за решаване на задача III може да се построи аналогично на този от задача I.

Аналогично на задача III може да се разгледа дуалната ѝ задача — минимизиране на вдлъбната функция.

4. Получените резултати могат да се приложат за решаване на нелинейната транспортна задача:

Задача IV. Да се намери минимумът на функцията

$$f(X)=f(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}) \tag{12}$$

в областта R, определена от условията

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, \quad i=1, 2, \ldots, m,\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, \quad j=1, 2, \ldots, n,\\ x_{ij} \geqq 0,\end{gathered} \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

ако $f \in C_R^2$.

Линейната транспортна задача може да се реши чрез разпределителния метод (виж например [10]), който по същество представлява симплекс-процедура. Тук ще бъде показано, че разпределителният метод може да се обобщи и в нелинейния случай, когато f принадлежи на класа A_R.

В практиката задачи от вида IV се срещат, когато транспортните разноски са нелинейна функция на превозените количества [12]. Ако числата a_i от (13) не са фиксирани, а се изменят в дадени граници, към вида IV могат да се причислят и нелинейните задачи за разпределение на производствени мощности [5], [11], [13].

Задача IV е частен случай от задача I, при който областта R има специален вид. Сега R е многостен, който е част от $(mn-m-n+1)$-мерно пространство, докато функцията е дефинирана в mn-мерното пространство. Всички върхове на R лежат на координатни стени от $(mn-m-n+1)$-ви ред в mn-мерната координатна система. Тъй като тези координатни стени съдържат $mn-m-n+1$ координатни оси, то всяка точка, която лежи на тях, ще има само $m+n-1$ ненулеви координати. В транспортната задача се въвежда понятието транспортен план. Казва се, че една съвкупност от mn числа $\{x_{ij}\}$ образува транспортен план, ако точно $m+n-1$ числа от тях са различни от нула и са удовлетворени условията (13). Ясно е, че всеки транспортен план дава координатите на връх от многостена R. Тези $m+n-1$ числа, които са различни от нула, образуват съвкупност, която се нарича базис.

Определение 6. Ще казваме, че транспортната задача IV може да бъде решена чрез разпределителна процедура, ако са изпълнени следните условия:

а) функцията f има минимум в някой връх X^* на многостена R (т. е. минимумът се получава за транспортния план X^*);

б) за всеки първоначален транспортен план X_1 съществува крайна редица от транспортни планове

$$X_1, X_2, \ldots, X_p = X^*, \tag{14}$$

всеки два съседни члена на която се отличават помежду си по това, че на мястото на един елемент от базиса на единия план съответствува нула в другия и, обратно, на мястото на един елемент от базиса на втория план съответствува нула в първия, и за които е изпълнено

$$f(X_1) > f(X_2) > \cdots > f(X_p). \tag{15}$$

Вижда се, че разпределителната процедура е една симплекс-процедура.

В сила е следната

Теорема 11. Ако $f \in A_R$, задача IV може да бъде решена чрез разпределителна процедура.

Доказателството следва от теорема 7.

В случая, когато $f \in A_R$, задача IV може да бъде решена на електронна сметачна машина чрез програма, съставена по алгоритъм, който съвпада с алгоритъма на разпределителния метод за линейната транспортна задача.

Ако предварително не е установена принадлежността на функцията f към класа A_R, алгоритъмът може да се съчетае с едновременна проверка за монотонност на f по ръбовете на многостена R, определени чрез редицата (14). За целта се пресмята векторът градиент за всеки два съседни транспортни плана. Проверява се дали проекциите на двата вектора върху общия връх са еднопосочни вектори с направлението от втория връх към първия. Ако в даден момент достигнем до транспортен план, за който не може да се премине към съседен, задача IV или е решена, или решението ѝ не може да се намери чрез разпределителна процедура при избраната редица (14). За да имаме първия случай, необходимо и достатъчно е проекциите на градиента в последния връх на многостена R върху всички ръбове, излизащи от него, да бъдат вектори, насочени към съседните върхове. Това съображение следва от теорема 6.

При съставянето на програма в разглеждания случай пресмятането на компонентите на вектора градиент става чрез обръщение към нестандартна част. За тази цел е необходимо да се съставят подпрограми за получаването на всички частни производни от първи ред на функцията (12). На всяка стъпка обаче не е необходимо да се пресмятат всички производни. Достатъчно е да се намират компонентите на вектора градиент само за тези x_{ij}, които участвуват в съответния цикъл. Действително, в алгоритъма се използва не самият вектор, а неговата проекция върху ръб на R. Компонентите на единичния вектор на този ръб са пропорционални на разликата от компонентите на съответните върхове. Различни от нула ще бъдат евентуално само онези от тях, които по място съответствуват на елементите от цикъла, чрез който сме получили единия план от другия.

Аналогично на задачи II и III може да бъдат разгледани дуалната и обратната задача на IV.

Авторите изказват благодарност на Бл. Сендов за указанията и проявеното внимание към тази работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wolfe P., The Simplex Method for Quadratic Programming, Econometrica, **27**, 1959, 382—398.
2. Kelley J., The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs, Journ. of the Soc. for Industrial and Applied Math., **8**, No. 4, 1960, 703—712.
3. Wolfe P., Accelerating the Cutting Plane Method for Nonlinear Programming, Journ. of the Soc. for Industrial and Applied Math., **9**, No 3, 1961, 481—488.
4. Спиридонов В. и М. Германов, Об одном классе выпуклых функций в нелинейном программировании, Доклады БАН, **18**, № 8, 1965, 723—724.
5. Спиридонов В. и М. Германов, О нелинейной задаче размещения производства, Revue Roumaine de math. pures et appliquées, **10**, No. 4, 1965, 431—436.
6. Спиридонов В., Една модификация на градиентния проективен метод в нелинейното програмиране, Изв. на Мат. инст. на БАН, т. VIII, 1964, 145—151.
7. Rosen J., The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part. I. Linear Constraints, Journ. of the Soc. for Industrial and Applied Math., **8**, No. 1, 1960, 181—217.
8. Wolfe. P., The Present Status of Nonlinear Programming, Mathematical Optimisation Techniques, Berkeley, 1963, 233—249.

9. Зойтендейк Г., Методы возможных направлений, Москва, 1963.
10. Рейнфельд Н. и У. Фогель, Математическое программирование, Москва, 1960.
11. Гирсанов И. и Б. Поляк, Математические методы решения задач о размещении, Проблемы оптимального планирования и управления производства, Москва, 1962.
12. Гольштейн Е., Транспортная задача и ее обобщения, Методы и алгоритмы решения транспортной задачи, Москва, 1963.
13. Борисова Т., З. Влашек, В. Карманов и Б. Поляк, Некоторые методы решения задач о размещении, Вычислительные методы и программирование, т. III, Москва, 1965.

Постъпила на 9. IV. 1965 г.

ОДИН ТИП ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, РЕШИМЫХ СИМПЛЕКС-ПРОЦЕДУРОЙ

Веселин Спиридонов и Милчо Германов

(Резюме)

Рассматриваются следующие задачи:

Задача I. Найти минимум функции

$$f(X)=f(x_1,\ x_2, \dots, x_n) \tag{1}$$

в ограниченной, выпуклой и замкнутой многогранной области R, которая определена системой неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad (i=1, 2, \dots, m;\ m>n), \tag{2}$$

если f имеет непрерывные и ограниченные частные производные второго порядка по всем переменным x_j $(j=1, 2, \dots, n)$ в R и является строго выпуклой функцией в R.

Множество всех функций f, удовлетворяющих условию задачи I, обозначается через C_R^2.

Скажем, что задачу I можно решить симплекс-процедурой, если выполнены следующие условия:

а) минимум функции f получается на некоторой вершине X^* многогранника R;

б) для любой вершины X_1 существует конечная последовательность вершин многогранника

$$X_1,\ X_2, \dots, X_p=X^* \tag{3}$$

такая, что каждые два ее соседних члена являются вершинами на одном и том же ребре многогранника и

$$f(X_1)>f(X_2)>\dots>f(X_p). \tag{4}$$

Будем говорить, что функция $f \in C_R^2$ имеет локальный минимум на грани S области R, если наименьшее значение функции f для всех точек S получается для внутренней точки S.

Вводится класс функций A_R, который является подмножеством класса C_R^2. Функция $f \in C_R^2$ принадлежит классу A_R, если не имеет локальных минимумов во внутренних точках R и по всем граням R первого, второго,..., $n-1$-ого порядка.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 4. Функция $f \in C_R^2$ принадлежит классу A_R тогда и только тогда, когда она монотонна на всех ребрах R.

Теорема 7. Если $f \in A_R$, то задачу I можно решить симплекс-процедурой.

В этой работе показан алгоритм для одновременного нахождения последовательности (3) и проверки монотонности функции на ребрах R. Если для последнего элемента (3) — вершины X_p, можно установить, что f монотонно убывающая функция на всех ребрах, входящих в X_p, то на этой вершине функция имеет абсолютный минимум.

Задача II. Аналогична задаче I и решается тем же способом.

Задача III. Найти максимум функции $f \in C_R^2$ в области R, определенной условиями (2).

Доказывается, что если $f \in A_R$, задачу III тоже можно решить симплекс-процедурой. Устанавливается единственность решения.

Полученные результаты применяются к решению нелинейной транспортной задачи:

Задача IV. Найти минимум функции (12) при условиях (13).

Доказывается, что если $f \in A_R$, задача IV может быть решена алгоритмом, который основан на распределительном методе.

A TYPE OF PROBLEMS OF NON-LINEAR PROGRAMMING, SOLVABLE BY SIMPLEX-PROCEDURE

Vesselin Spiridonov and Milcho Germanov

(Summary)

The following problems are examined:

Problem I. Find the minimum of the function

$$f(X)=f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) \tag{1}$$

in the convex, bounded, and closed polyhedral region R defined by the system of inequalities

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad (i=1,\ 2, \ldots,\ m;\ m>n), \tag{2}$$

if F possesses continuous and bounded second partial derivatives with respect to variables x_j $(j=1,\ 2, \ldots,\ n)$ in R and is a strictly convex function in R.

The set of the functions f satisfying the condition of Problem I is designated by C_R^2.

We say that Problem I can be solved by simplex-procedure when the following conditions are fulfilled:

a) The function f has a minimum at one of the vertex X^* of the polyhedron R.

b) For every vertex X_1 of R there exists a finite series of vertex of R

$$X_1, X_2, \ldots, X_p = X^* \tag{3}$$

such that each two adjacent members of it belong to a common edge, and

$$f(X_1) > f(X_2) > \cdots > f(X_p). \tag{4}$$

We say that a function $f \in C_R^2$ has a local minimum on a side S of R when the mimimum value of f for all points of S is reached at an interior point of S.

A class of functions A_R is introduced which is a subset of the class C_R^2. A function $f \in C_R^2$ belongs to the class A_R if it has not local minima in the interior of R and on any sides of R of the first, second,..., $n-1$. order.

The following theorems are proved:

Theorem 4. The function $f \in C_R^2$ belongs to the class A_R if and only if it is monotonous along every edge of R.

Theorem 7. If $f \in A_R$, Problem I can be solved by simplex-procedure.

The paper contains an algorithm of simultaneously finding the series (3) and checking the monotoneness of the function over the edges of R. If it is established for the last element of (3), the vertex X_p, that f is a monotonely decreasing function over all edges entering X_p, then the function has its absolute minimum in this vertex.

Problem II, being a dual one of Problem I, is solved in the same manner.

Problem III. Find the maximum of the function $f \in C_R^2$ in the region R defined by the conditions (2).

It is proved that if $f \in A_R$, Problem III can likewise be solved by simplex-procedure. The uniqueness of the solution is established.

The results obtained are applied in solving the non-linear transport problem:

Problem IV. Find the minimum of the function (12) under the conditions (13).

It is proved that if $f \in A_R$, Problem IV may be solved by an algorithm based on the distributive method.