БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) IX

КАНОНИЧЕН РЕПЕР НА ТРИПАРАМЕТРИЧНИТЕ СЪВКУПНОСТИ ОТ ПРАВИ В ЧЕТИРИМЕРНОТО ПРОЕКТИВНО ПРОСТРАНСТВО

Иванка Иванова-Каратопраклиева

Настоящата работа е посветена на диференциалната геометрия на правите линии в четиримерното проективно пространство P_4. По-точно ще разгледаме трипараметричните съвкупности от прави, като произволна от тях ще означаваме с M_3. Ще предполагаме, че в P_4 е дадена една проективна координатна система K, спрямо която отнасяме съвкупността M_3. Както е известно, петорка хомогенни проективни координати на геометрична точка спрямо K се нарича аналитична точка, а съвкупност от пет линейно независими аналитични точки — репер. Оттук е ясно, че произволен репер в P_4 зависи от 25 параметъра, от които 24 са съществени

Произволна права p от M_3 се задава с две различни свои точки, чиито координати са функции на параметрите u, v, w на съвкупността M_3. С всяка права от M_3 ще свържем един репер, който да зависи само от параметрите u, v, w на M_3 и да бъде инвариантен при произволна проективност. Такъв репер ще наричаме каноничен. Доколкото ни е известно, този въпрос не е изложен в литературата.

Нека A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 са върхове на произволен репер в P_4. Инфинитезималните преобразувания на групата на проективните преобразувания, т. е. инфинитезималните преобразувания на върховете на репера се дават с уравненията

$$dA_i = \omega_i^j A_j, \quad i, j = 1, \ldots, 5, \tag{1}$$

където ω_i^j са линейни диференциални форми на 25-те независими параметъра и удовлетворяват уравненията на структурата в P_4:

$$D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j], \quad i, j, k = 1, \ldots, 5. \tag{2}$$

От всички репери в P_4 да разгледаме онези, за които върховете A_1 и A_2 са точки от правата p, т. е. $p = A_1 A_2$. Всеки такъв репер се нарича репер от нулев ред. Съвкупността от всички тези репери зависи освен от параметрите u, v, w, които ще наричаме главни, още и от 19 вторични параметъра. Диференцирайки аналитичната права $(A_1 A_2)$, съответствуваща на геометричната права $p = A_1 A_2$, получаваме

$$(3)\qquad d(A_1A_2)=(\omega_1^1+\omega_2^2)(A_1A_2)+\omega_2^3(A_1A_3)+\omega_2^4(A_1A_4)+\omega_2^5(A_1A_5)-\omega_1^3(A_2A_3)$$
$$-\omega_1^4(A_2A_4)-\omega_1^5(A_2A_5).$$

Нека правата p е фиксирана, т. е. $du=dv=dw=0$. За произволен репер от нулев ред, свързан с нея, се менят само вторичните параметри и диференциалът $d(A_1A_2)$ е пропорционален на (A_1A_2). Тогава от (3) получаваме

$$(3')\qquad \omega_1^3=\omega_1^4=\omega_1^5=\omega_2^3=\omega_2^4=\omega_2^5=0.$$

Обратно, ако са изпълнени (3'), то $d(A_1A_2)=(\omega_1^1+\omega_2^2)(A_1A_2)$, откъдето следва, че правата A_1A_2 е неподвижна, т. е. $du=dv=dw=0$. Следователно при подвижна права p формите

$$(3'')\qquad \omega_1^3,\ \omega_1^4,\ \omega_1^5,\ \omega_2^3,\ \omega_2^4,\ \omega_2^5$$

зависят само от диференциалите на главните параметри u, v, w. Поради това те се наричат главни диференциални форми от нулев ред. Рангът на системата (3'') е три. Наистина допускането, че той е по-малък от три, води до противоречие с това, че разглежданата съвкупност е трипараметрична. Нека вземем ω_1^3, ω_1^4 и ω_2^4 за базисни форми. Тогава

$$(4)\qquad \begin{aligned} \omega_1^5&=a_1\omega_1^3+a_2\omega_1^4+a_3\omega_2^4,\\ \omega_2^3&=b_1\omega_1^3+b_2\omega_1^4+b_3\omega_2^4,\\ \omega_2^5&=c_1\omega_1^3+c_2\omega_1^4+c_3\omega_2^4,\end{aligned}$$

където коефициентите $a_i, b_i, c_i, i=1, 2, 3$, зависят от главните и вторичните параметри — онези параметри, които преобразуват реперите от нулев ред. В зависимост от избора на вторичните параметри, т. е. на репера, коефициентите ще имат едни или други значения. Ще изберем вторичните параметри така, че тези значения да бъдат възможно най-прости.

Репери от първи ред. Ако u, v и w са функции на един параметър, ще получим еднопараметрична съвкупност от прави, принадлежаща на M_3, а между базисните форми ω_1^3, ω_1^4 и ω_2^4 ще се появят две линейни връзки. Обратното също е вярно. Следователно произволна еднопараметрична съвкупност от прави, принадлежаща на M_3, се задава с две линейни връзки между базисните форми.

Ще потърсим еднопараметрични съвкупности, принадлежащи на M_3, със свойството: за всяка права $p=A_1A_2$ да съществува точка $M=\lambda A_1+\mu A_2$ такава, че линията, описана от M, да има за допирателна в същата точка правата p. Такива еднопараметрични съвкупности ще наричаме развиваеми. За целта нека u, v и w са функции на параметъра s. За да има M това свойство, необходимо и достатъчно е dM да бъде линейна комбинация на A_1 и A_2. Тогава от

$$dM=(\lambda\omega_1^1+d\lambda+\mu\omega_2^1)A_1+(\lambda\omega_1^2+d\mu+\mu\omega_2^2)A_2+(\lambda\omega_1^3+\mu\omega_2^3)A_3+(\lambda\omega_1^4+\mu\omega_2^4)A_4$$
$$+(\lambda\omega_1^5+\mu\omega_2^5)A_5$$

получаваме

$$\lambda\omega_1^3+\mu\omega_2^3=0,$$

(5)
$$\lambda\omega_1^4+\mu\omega_2^4=0,$$
$$\lambda\omega_1^5+\mu\omega_2^5=0,$$

откъдето поради (4) следва

$$(\lambda+\mu b_1)\omega_1^3+\mu b_2\omega_1^4+\mu b_3\omega_2^4=0,$$

(5′)
$$\lambda\omega_1^4+\mu\omega_2^4 \quad =0,$$
$$(\lambda a_1+\mu c_1)\omega_1^3+(\lambda a_2+\mu c_2)\omega_1^4+(\lambda a_3+\mu c_3)\omega_2^4=0.$$

Тривиалното решение на (5′) дава фиксирана права от M_2, а ние търсим еднопараметрични съвкупности. Следователно интересуваме се от нетривиалните решения. Необходимо и достатъчно условие (5′) да има нетривиално решение за ω_1^3, ω_1^4 и ω_2^4 е детерминантата от коефициентите да бъде нула, откъдето получаваме

(6)
$$a_3\lambda^3+(a_3b_1-a_1b_3-a_2+c_3)\lambda^2\mu+(a_1b_2-a_2b_1+b_1c_3-b_3c_1-c_2)\lambda\mu^2$$
$$+(b_2c_1-b_1c_2)\mu^3=0.$$

Следователно необходимо и достатъчно условие точката M да е с желаното свойство е λ и μ да удовлетворяват кубичното уравнение (6).

В комплексния случай има следните възможности за решенията на (6): 1) три прости корена; 2) един двоен корен и един прост и 3) един троен корен, а в реалния случай съответно: 1) три реални прости корена; 2) два комплексно-спрегнати и един реален (всички прости); 3) един реален двоен и един реален прост и 4) един реален троен. За всяко решение на (6) върху правата p ще съответствува точка M с казаното свойство. Такава точка ще наричаме ф о к у с, а съответната тримерна повърхнина, която ще опише точката M при изменението на главните параметри, ще наричаме ф о к а л н а. От изброените възможности за решенията на уравненията (6) следва една естествена класификация на трипараметричните съвкупности от прави в P_4 в комплексния и съответно в реалния случай. Ние ще разгледаме най-обща трифокусна трипараметрична съвкупност. Резултатите, които ще получим, ще бъдат валидни както в комплексното, така и в реалното пространство, когато и трите фокуса са реални. От казаното е ясно, че в този случай M_3 се явява съвкупността от всички прави, допиращи се до три хиперповърхнини. Лесно се вижда, че обратното също е вярно, т. е. ако са дадени в общия случай три произволни хиперповърхнини в P_4, съвкупността от общите им допирателни е трипараметрична.

Нека върховете A_1 и A_2 на репера са фокуси. Тогава $\lambda_1=1$, $\mu_1=0$ и $\lambda_2=0$, $\mu_2=1$ трябва да са решения на (6), откъдето получаваме $a_3=0$, $b_2c_1-b_1c_2=0$. Да означим третия фокус с B. Тогава $B=\lambda_3A_1+\mu_3A_2$, където $\lambda_3=-a_1b_2+a_2b_1-b_1c_3+b_3c_1+c_2$, $\mu_3=-a_1b_3+a_3b_1-a_2+c_3$. Фокалните тримерни повърхнини, описани от точките A_1, A_2 и B, ще наричаме съответно първа, втора и трета. Допирателните хиперравнини към тях в съответните точки ще наричаме ф о к а л н и. Да разгледаме онази подсъвкупност на разглежданата съвкупност от репери, за която координатните хиперравнини $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_2A_4A_5$ са фокалните хиперравнини съответно към първата и втората фокална тримерна повърхнина. Тогава от

$$(7)\qquad \begin{aligned} dA_1 &= \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4 + \omega_1^5 A_5, \\ dA_2 &= \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3 + \omega_2^4 A_4 + \omega_2^5 A_5 \end{aligned}$$

поради това, че dA_1 и dA_2 лежат в съответните фокални тримерни равнини, получаваме $\omega_1^5=0$, т. е. $a_1=a_2=a_3=0$, и $\omega_2^3=0$, т. е. $b_1=b_2=b_3=0$. Уравненията (4) добиват вида

$$(4')\qquad \begin{aligned} &\omega_1^5=0, \\ &\omega_2^3=0, \\ &\omega_2^5=c_1\omega_1^3+c_2\omega_1^4+c_3\omega_2^4, \end{aligned}$$

а за третия фокус получаваме $B=c_2A_1+c_3A_2$. От това, че разглеждаме най-общия случай, следва $c_i\neq 0$, $i=2,3$. Като диференцираме външно (4′), използваме (4′) и (2) и приложим лемата на Картан, получаваме

$$(4_1'')\qquad \begin{aligned} \omega_2^1-c_1\omega_5^3&=x_1\omega_1^3+x_2\omega_1^4+x_3\omega_2^4, \\ -c_2\omega_5^3&=x_2\omega_1^3+x_4\omega_1^4+x_5\omega_2^4, \\ -\omega_4^3-c_3\omega_5^3&=x_3\omega_1^3+x_5\omega_1^4+x_6\omega_2^4; \end{aligned}$$

$$(4_2'')\qquad \begin{aligned} c_1\omega_1^2-\omega_3^5&=y_1\omega_1^3+y_2\omega_1^4+y_3\omega_2^4, \\ c_2\omega_1^2-\omega_4^5&=y_2\omega_1^3+y_4\omega_1^4+y_5\omega_2^4, \\ c_3\omega_1^2&=y_3\omega_1^3+y_5\omega_1^4+y_6\omega_2^4; \end{aligned}$$

$$(4_3'')\qquad \begin{aligned} -dc_1+c_1(-\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_5^5+c_3\omega_5^4)+c_2\omega_3^4&=z_1\omega_1^3+z_2\omega_1^4+z_3\omega_2^4, \\ -dc_2+c_2(-\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_4^4-\omega_5^5+c_3\omega_5^4)+c_1\omega_4^3-c_3\omega_2^1&=z_2\omega_1^3+z_4\omega_1^4+z_5\omega_2^4, \\ -dc_3+c_3(\omega_4^4-\omega_5^5+c_3\omega_5^4)-\omega_4^5-c_2\omega_1^2&=z_3\omega_1^3+z_5\omega_1^4+z_6\omega_2^4. \end{aligned}$$

Коефициентите x_i, y_i, z_i, $i=1,\ldots,6$, са функции както на главните параметри, така и на вторичните. Те определят диференциалната околност от втори ред на правата p. При фиксиране на правата p се изменят само вторичните параметри, за чието изменение ще използваме символа за диференциране δ. Да означим значенията на ω_i^j, съответствуващи на изменението само на вторичните параметри, с π_i^j, които ще наричаме вторични форми. Тогава от $(4_1'')$, $(4_2'')$ и $(4_3'')$ получаваме съответно

$$(4_1''')\qquad \begin{aligned} &\pi_2^1-c_1\pi_5^3=0, \\ &c_2\pi_5^3=0, \\ &\pi_4^3+c_3\pi_5^3=0; \end{aligned}$$

$$c_1\pi_1^2-\pi_3^5=0,$$

$$(4_2''')\qquad c_2\pi_1^2-\pi_4^5=0,$$

$$c_3\pi_1^2=0;$$

$$\delta c_1=c_1(-\pi_1^1+\pi_2^2+\pi_3^3-\pi_5^5+c_3\pi_5^4)+c_2\pi_3^4,$$

$$(4_3''')\qquad \delta c_2=c_2(-\pi_1^1+\pi_2^2+\pi_4^4-\pi_5^5+c_3\pi_5^4)+c_1\pi_4^3-c_3\pi_2^1,$$

$$\delta c_3=c_3(\pi_4^4-\pi_5^5+c_3\pi_5^4)-\pi_4^5-c_2\pi_1^2.$$

Понеже $c_i\neq 0$, $i=2,\ 3$, от $(4_1''')$ и $(4_2''')$ получаваме

$$(8)\qquad \pi_5^3=0,\ \pi_2^1=0,\ \pi_4^3=0,\ \pi_1^2=0,\ \pi_3^5=0,\ \pi_4^5=0.$$

Тогава $(4_3''')$ добива вида

$$\delta c_1=c_1(-\pi_1^1+\pi_2^2+\pi_3^3-\pi_5^5+c_3\pi_5^4)+c_2\pi_3^4,$$

$$(9)\qquad \delta c_2=c_2(-\pi_1^1+\pi_2^2+\pi_4^4-\pi_5^5+c_3\pi_5^4),$$

$$\delta c_3=c_3(\pi_4^4-\pi_5^5+c_3\pi_5^4).$$

Получените формули показват как се изменят функциите c_1, c_2, c_3 при изменението на вторичните параметри. Формите, участвуващи в дясната част на (9), са независими. Да разгледаме онези репери, за които $\pi_i^k=0$, $i, k=1, 2, 3, 4$, а $\pi_5^5\neq 0$ и да положим $\pi_5^5=-\delta\tau$. Тогава от (9_3) получаваме $\delta\ln c_3=\delta\tau$ или $c_3=e^{\tau+c}$, където c е произволна константа, независеща от τ. Като изберем $\tau=-c$, получаваме $c_3=1$. Обратно, ако $c_3=1$, от (9_3) получаваме

$$(10)\qquad \pi_4^4-\pi_5^5+\pi_5^4=0.$$

Изборът $c_3=1$ означава някакво закрепване на върховете на репера, което ще обясним после. Поради (10) равенствата (9_1) и (9_2) се написват във вида

$$(9_1')\qquad \delta c_1=c_1(-\pi_1^1+\pi_2^2+\pi_3^3-\pi_4^4)+c_2\pi_3^4,$$

$$(9_2')\qquad \delta c_2=c_2(\pi_2^2-\pi_1^1).$$

Като се направят разглеждания, аналогични на извършените за (9_3), се вижда, че вторичните параметри може така да се изберат, че c_2 да бъде единица, а c_1 нула, откъдето получаваме

$$(11)\qquad \pi_2^2-\pi_1^1=0,\ \pi_3^4=0.$$

Да изясним геометричния смисъл на направения избор на вторичните параметри. От израза

$$dB=L_1A_1+L_2A_2+\omega_1^3(c_2A_3+c_1c_3A_5)+\omega_1^4(c_2A_4+c_2c_3A_5)+\omega_2^4(c_3^2A_5+c_3A_4)$$

се вижда, че изборът c_1 да е нула, а c_3 — единица означава, че точките A_3 и A_4+A_5 лежат в допирателната хиперравнина към третата фокална повърхнина. Изборът $c_2=1$ очевидно означава пренормировка на върховете на репера. Като се вземат пред вид получените стойности за a_i, b_i и c_i, уравненията (5') и получените решения на (6), за развиваемите еднопараметрични съвкупности получаваме съответно

$$\omega_1^3=0, \qquad \omega_1^4=0 \quad \text{с фокус } A_1 \tag{12}$$

$$\omega_1^4=0, \qquad \omega_2^4=0 \quad \text{с фокус } A_2 \text{ и} \tag{13}$$

$$\omega_1^3=0, \qquad \omega_1^4+\omega_2^4=0 \quad \text{с фокус } A_1+A_2. \tag{14}$$

При направения избор на вторичните параметри системата (4) добива вида

$$\begin{aligned} &\omega_1^5=0,\\ &\omega_2^3=0,\\ &\omega_2^5=\omega_1^4+\omega_2^4. \end{aligned} \tag{15}$$

Реперите, спрямо които съвкупността M_3 се представя със системата диференциални уравнения (15), наричаме репери от първи ред. Ще докажем следната

Теорема. Системата (15) е в инволюция и определя съвкупността M_3 с произвола на три функции на три аргумента.

За целта диференцираме външно (15). Получаваме ковариантната система

$$\begin{aligned} &[\omega_2^1, \omega_1^3]-[\omega_5^3, \omega_1^4]-[\omega_4^3+\omega_5^3, \omega_2^4]=0,\\ &[-\omega_3^5, \omega_1^3]+[\omega_1^2-\omega_4^5, \omega_1^4]+[\omega_1^2, \omega_2^4]=0.\\ &[\omega_3^4, \omega_1^3]+[-\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4-\omega_2^1, \omega_1^4]+[\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4-\omega_4^5-\omega_1^2, \omega_2^4]=0. \end{aligned} \tag{15'}$$

Тя съдържа $s_1=3$ независими квадратични уравнения с $q=9$ нови линейно независими диференциални форми. Поради $q=s_1+s_2+s_3$ и $s_1\geqq s_2\geqq s_3$ ([2], стр. 192) следва, че $s_2=s_3=3$. Тогава за числото на Картан получаваме $Q=s_1+2s_2+3s_3=18$. От друга страна, най-общият тримерен интегрален елемент на (15) зависи от $N=18$ параметъра. Съгласно с критерия на Картан системата (15) е в инволюция и определя съвкупността M_3 с произвола на три функции на три аргумента.

Репери от втори ред. Поради $c_1=0$, $c_2=c_3=1$ равенствата ($4_1''$), ($4_2''$) и ($4_3''$) добиват вида

$$\begin{aligned} \omega_2^1&=x_1\omega_1^3+x_2\omega_1^4+x_3\omega_2^4,\\ -\omega_5^3&=x_2\omega_1^3+x_4\omega_1^4+x_5\omega_2^4,\\ -\omega_4^3-\omega_5^3&=x_3\omega_1^3+x_5\omega_1^4+x_6\omega_2^4; \end{aligned} \tag{16}$$

$$-\omega_3^5=y_1\omega_1^3+y_2\omega_1^4+y_3\omega_2^4,$$
$$(17)\qquad \omega_1^2-\omega_4^5=y_2\omega_1^3+y_4\omega_1^4+y_5\omega_2^4,$$
$$\omega_1^2=y_3\omega_1^3+y_5\omega_1^4+y_6\omega_2^4;$$

$$\omega_3^4=z_1\omega_1^3+z_2\omega_1^4+z_3\omega_2^4,$$
$$(18)\qquad -\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4-\omega_2^1=z_2\omega_1^3+z_4\omega_1^4+z_5\omega_2^4,$$
$$\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4-\omega_4^5-\omega_1^2=z_3\omega_1^3+z_5\omega_1^4+z_6\omega_2^4.$$

Левите части на (16), (17) и (18) са нови главни форми от първи ред. За dA_1, dA_2 и $d(A_1+A_2)$ имаме

$$dA_1=\omega_1^1A_1+\omega_1^2A_2+\omega_1^3A_3+\omega_1^4A_4,$$
$$(19)\qquad dA_2=\omega_2^1A_1+\omega_2^2A_2+\omega_2^4A_4+(\omega_1^4+\omega_2^4)A_5,$$
$$d(A_1+A_2)=(\omega_1^1+\omega_2^1)A_1+(\omega_1^2+\omega_2^2)A_2+\omega_1^3A_3+(\omega_1^4+\omega_2^4)(A_4+A_5).$$

Да означим трите фокални хиперравнини съответно с

$$(20)\qquad E_1=(A_1A_2A_3A_4),\quad E_2=(A_1A_2A_4A_5),\quad E_3=(A_1A_2A_3A_4+A_5).$$

Те се пресичат две по две в двумерни равнини, както следва:

$$(E_1E_2)=(A_1A_2A_4),$$
$$(21)\qquad (E_1E_3)=(A_1A_2A_3),$$
$$(E_2E_3)=(A_1A_2A_4+A_5).$$

Трите развиваеми еднопараметрични съвкупности (12), (13) и (14) секат трите фокални тримерни повърхнини съответно в три линии, които ще наричаме първа, втора и трета главна линия. За първата главна линия върху първата фокална повърхнина

$$dA_1=\omega_1^1A_1+\omega_1^2A_2,$$

т. е. допирателната е правата p. За да нямаме изроден случай, трябва при $\omega_1^3=0$, $\omega_1^4=0$ формата ω_1^2 да бъде различна от нула, откъдето следва, че $y_6\neq 0$. Като се направят аналогични разсъждения за втората главна линия върху втората фокална повърхнина и за третата главна линия върху третата фокална повърхнина, се получава, че $x_1\neq 0$ и $2y_5-y_4-y_6\neq -2z_5+z_4+z_6$. За втората главна линия върху първата фокална повърхнина

$$dA_1=\omega_1^1A_1+\omega_1^2A_2+\omega_1^3A_3.$$

Да разгледаме онези репери, за които върхът A_3 е върху допирателната на тази линия. Следователно трябва ω_1^2 да бъде нула при $\omega_1^4=\omega_2^4=0$. Поради това от (17_3) следва, че $y_3=0$. Върха A_4 да изберем върху допирателната към третата главна линия върху първата фокална повърхнина. При този избор получаваме $y_5=y_6$. Да изберем точката A_4+A_5 да лежи върху допирателната към първата главна линия върху втората фокална повърхнина. Тогава получаваме $x_3=0$. Като вземем пред вид (20) и (21), виждаме, че за A_3, A_4 и A_4+A_5 можем да направим още следните ограничения: 1) A_3 да бъде пресечна точка на допирателните към вторите главни линии върху първата и третата фокална повърхнина; 2) A_4 да бъде пресечна точка на допирателните към третите главни линии върху първата и втората фокална повърхнина и 3) A_4+A_5 да бъде пресечната точка на допирателните към първите главни линии върху втората и третата фокална повърхнина. Като се направи този избор, получаваме съответно $y_3-y_2=z_2-z_3$, $x_2=0$ и z_5 $z_6=y_6-y_5$. Като се вземат пред вид получените връзки за коефициентите

$$x_2=x_3=y_3=0,\quad y_5=y_6,\quad z_5=z_6,\quad z_2=z_3-y_2,\quad x_1\neq0,\quad y_6\neq0,\quad y_5-y_4\neq z_4-z_5, \tag{22}$$

за (16), (17) и (18) получаваме

$$\begin{aligned}\omega_2^1&=x_1\omega_1^3,\\ -\omega_5^3&=x_4\omega_1^4+x_5\omega_2^4,\\ -\omega_4^3-\omega_5^3&=x_5\omega_1^4+x_6\omega_2^4;\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}-\omega_3^5&=y_1\omega_1^3+y_2\omega_1^4,\\ \omega_1^2-\omega_4^5&=y_2\omega_1^3+y_4\omega_1^4+y_5\omega_2^4,\\ \omega_1^2&=y_5\omega_1^4+y_6\omega_2^4;\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\omega_3^4&=z_1\omega_1^3+z_2\omega_1^4+z_3\omega_2^4,\\ -\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4-\omega_2^1&=z_2\omega_1^3+z_4\omega_1^4+z_6\omega_2^4,\\ \omega_1^4-\omega_5^5+\omega_5^4-\omega_4^5-\omega_1^2&=z_3\omega_1^3+z_5\omega_1^4+z_6\omega_2^4.\end{aligned} \tag{25}$$

Реперите, за които са изпълнени връзките (22), наричаме репери от втори ред. Като диференцираме външно (23), (24) и (25), използваме уравненията на структурата (2), връзките (15), (23), (24), (25) и приложим лемата на Картан, получаваме

$$\begin{aligned}-dx_1+x_1(-2\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3)&=a_1\omega_1^3+a_2\omega_1^4+a_3\omega_2^4,\\ -\omega_5^1+x_1\omega_4^3&=a_2\omega_1^3+a_4\omega_1^4+a_5\omega_2^4,\\ -\omega_4^1-\omega_5^1&=a_3\omega_1^3+a_5\omega_1^4+a_6\omega_2^4;\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}-\omega_5^1+x_4\omega_3^4&=\beta_1\omega_1^3+\beta_2\omega_1^4+\beta_3\omega_2^4,\\ -dx_4+x_4(\ \omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4+\omega_5^5-\omega_5^4)+x_5(-\omega_2^1+2\omega_5^4)&=\beta_2\omega_1^3+\beta_4\omega_1^4+\beta_5\omega_2^4,\\ -dx_5+x_5(-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4+\omega_5^5)-x_4\omega_1^2+x_6\omega_5^4&=\beta_3\omega_1^3+\beta_5\omega_1^4+\beta_6\omega_2^4;\end{aligned} \tag{27}$$

$$-\omega_4^1-\omega_5^1+x_5\omega_3^4=\gamma_1\omega_1^3+\gamma_2\omega_1^4+\gamma_3\omega_2^4,$$

$$-dx_5+x_5(-\omega_1^1-\omega_3^3+2\omega_4^4+\omega_5^4)+x_4(-\omega_4^4$$

(28) $$+\omega_5^5+\omega_4^5-\omega_5^4)+x_6(-\omega_2^1+\omega_5^4)=\gamma_2\omega_1^3+\gamma_4\omega_1^4+\gamma_5\omega_2^4,$$

$$-dx_6+x_6(-\omega_2^2-\omega_3^3+2\omega_4^4+2\omega_5^4)$$

$$+x_5(-\omega_4^4+\omega_5^5+\omega_4^5-\omega_5^4-\omega_1^2)=\gamma_3\omega_1^3+\gamma_5\omega_1^4+\gamma_6\omega_2^4;$$

$$-dy_1+y_1(-\omega_1^1+2\omega_3^3-\omega_5^5)+2y_2\omega_3^4=\delta_1\omega_1^3+\delta_2\omega_1^4+\delta_3\omega_2^4,$$

$$-dy_2+y_2(-\omega_1^1+\omega_3^3+\omega_4^4-\omega_5^5)-\omega_3^2-(y_5-y_4)\omega_3^4+y_1\omega_4^3=\delta_2\omega_1^3+\delta_4\omega_1^4+\delta_5\omega_2^4,$$

(29) $$-\omega_3^2-(y_6-y_5)\omega_3^4-y_2\omega_1^2=\delta_3\omega_1^3+\delta_5\omega_1^4+\delta_6\omega_2^4;$$

$$-dy_2+y_2(-\omega_1^1+\omega_3^3+\omega_4^4-\omega_5^5)+y_4\omega_3^4-\omega_3^2+y_1\omega_4^3=\lambda_1\omega_1^3+\lambda_2\omega_1^4+\lambda_3\omega_2^4,$$

(30) $$-dy_4+y_4(-\omega_1^1+2\omega_4^4-\omega_5^5)+y_5(\omega_1^1-\omega_2^2$$

$$-\omega_4^4+\omega_5^5-\omega_2^1+\omega_5^4)-2\omega_4^2+2y_2\omega_4^3=\lambda_2\omega_1^3+\lambda_4\omega_1^4+\lambda_5\omega_2^4,$$

$$-dy_5+y_5(-\omega_2^2+2\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4)-y_4\omega_1^2+y_6(\omega_1^1$$

$$-\omega_2^2-\omega_4^4+\omega_5^5)-\omega_2^4=\lambda_3\omega_1^3+\lambda_5\omega_1^4+\lambda_6\omega_2^4;$$

$$-\omega_3^2+y_5\omega_3^4=\mu_1\omega_1^3+\mu_2\omega_1^4+\mu_3\omega_2^4,$$

(31) $$-dy_5+y_5(-\omega_2^2+\omega_4^4)+y_6(-\omega_2^1+\omega_5^4)-\omega_4^2=\mu_2\omega_1^3+\mu_4\omega_1^4+\mu_5\omega_2^4,$$

$$-dy_6+y_6(\omega_1^1-2\omega_2^2+\omega_4^4+\omega_5^4)-y_5\omega_1^2=\mu_3\omega_1^3+\mu_5\omega_1^4+\mu_6\omega_2^4;$$

$$-dz_1+z_1(-\omega_1^1+2\omega_3^3-\omega_4^4)+y_1\omega_5^4+z_2\omega_3^4=\nu_1\omega_1^3+\nu_2\omega_1^4+\nu_3\omega_2^4,$$

(32) $$-dz_2+z_2(-\omega_1^1+\omega_3^3)+y_2\omega_5^4+z_1\omega_4^3+z_3(-\omega_2^1+\omega_5^4)+\omega_3^1=\nu_2\omega_1^3+\nu_4\omega_1^4+\nu_5\omega_2^4,$$

$$-dz_3+z_3(-\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_5^4)-z_2\omega_1^2+\omega_3^2=\nu_3\omega_1^3+\nu_5\omega_1^4+\nu_6\omega_2^4;$$

$$-dz_2+z_2(-\omega_1^1+\omega_3^3)+z_1(\omega_4^3+\omega_5^3)+x_1(\omega_1^1-\omega_2^2-2\omega_1^2)$$

$$+y_1\omega_5^3+(y_2+z_3)\omega_5^4+z_4\omega_3^4+\omega_3^1=u_1\omega_1^3+u_2\omega_1^4+u_3\omega_2^4,$$

(33) $$-dz_4+z_4(-\omega_1^1+\omega_4^4)+z_5(-\omega_2^1+\omega_5^4)+(y_4+z_5)\omega_5^4$$

$$+z_2(\omega_5^3+2\omega_4^3)+y_2\omega_5^3+2(\omega_4^1+\omega_5^1-\omega_5^2)=u_2\omega_1^3+u_4\omega_1^4+u_5\omega_2^4,$$

$$-dz_5+z_5(-\omega_2^2+\omega_4^4+\omega_5^4)-z_4\omega_1^2+(y_5+z_6)\omega_5^4$$

$$+z_3(\omega_5^3+\omega_4^3)+\omega_4^1+\omega_5^1-\omega_5^2=u_3\omega_1^3+u_5\omega_1^4+u_6\omega_2^4;$$

$$-dz_3+z_3(-\omega_1^1+\omega_3^3+\omega_5^4)+y_2(\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4)$$

$$+y_1(\omega_5^3+\omega_4^3)+z_1(\omega_4^3+\omega_5^3)+z_5\omega_3^4+\omega_3^2=r_1\omega_1^3+r_2\omega_1^4+r_3\omega_2^4,$$

(34) $$-dz_5+z_5(-\omega_1^1+\omega_4^4+\omega_5^4)+z_2(\omega_4^3+\omega_5^3)+y_5(-\omega_1^1+\omega_2^2$$

$$-\omega_4^4+\omega_5^5)+y_4(\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4)+y_2(\omega_4^3+\omega_5^3)+z_3\omega_4^3$$

$$+z_6(\omega_5^4-\omega_2^1)+\omega_4^1+\omega_5^1-\omega_5^2=r_2\omega_1^3+r_4\omega_1^4+r_5\omega_2^4,$$

$$-dz_6+z_6(-\omega_2^2+\omega_4^4+2\omega_5^4)+z_3(\omega_4^3+\omega_5^3)+y_5(\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4)$$

$$+y_6(-\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_4^4+\omega_5^5)-\omega_4^2-z_5\omega_1^2=r_3\omega_1^2+r_5\omega_1^4+r_6\omega_2^4.$$

При неподвижна права p десните части на тези равенства са нули. Следователно те са нови главни форми от втори ред. Като използваме въведените отпреди означения при изменението само на вторичните параметри и вземем пред вид (8), (10) и (11), получаваме

$$(26')\qquad \begin{aligned} &-\delta x_1+x_1(-\pi_1^1+\pi_3^3)=0,\\ &\pi_5^1=0,\\ &\pi_4^1=0; \end{aligned}$$

$$(27')\qquad \begin{aligned} &-\delta x_4+x_4(-\pi_1^1-\pi_3^3+2\pi_4^4)+2x_5\pi_5^4=0,\\ &-\delta x_5+x_5(-\pi_2^2-\pi_3^3+\pi_4^4+\pi_5^5)+x_6\pi_5^4=0; \end{aligned}$$

$$(28')\qquad \begin{aligned} &-\delta x_5+x_5(-\pi_2^2-\pi_3^3+\pi_4^4+\pi_5^5)+x_6\pi_5^4=0,\\ &\delta x_6+x_6(-\pi_2^2-\pi_3^3+2\pi_5^5)=0; \end{aligned}$$

$$(29')\qquad \begin{aligned} &-\delta y_1+y_1(-\pi_1^1+2\pi_3^3-\pi_5^5)=0,\\ &-\delta y_2+y_2(-\pi_1^1+\pi_3^3+\pi_4^4-\pi_5^5)=0,\\ &\pi_3^2=0; \end{aligned}$$

$$(30')\qquad \begin{aligned} &-\delta y_2+y_2(-\pi_1^1+\pi_3^3+\pi_4^4-\pi_5^5)=0,\\ &-\delta y_4+y_4(-\pi_1^1+2\pi_4^4-\pi_5^5)+2y_5\pi_5^4-2\pi_4^2=0,\\ &-\delta y_5+y_5(-\pi_2^2+\pi_4^4)+y_6\pi_5^4-\pi_4^2=0; \end{aligned}$$

$$(31')\qquad \begin{aligned} &-\delta y_5+y_5(-\pi_2^2+\pi_4^4)+y_6\pi_5^4-\pi_4^2=0,\\ &-\delta y_6+y_6(-\pi_2^2+\pi_5^5)=0; \end{aligned}$$

$$(32')\qquad \begin{aligned} &-\delta z_1+z_1(-\pi_1^1+2\pi_3^3-\pi_4^4)+y_1\pi_5^4=0,\\ &-\delta z_2+z_2(-\pi_1^1+\pi_3^3)+(y_2+z_3)\pi_5^4+\pi_3^1=0,\\ &-\delta z_3+z_3(-\pi_1^1+\pi_3^3+\pi_5^4)=0; \end{aligned}$$

$$(33')\qquad \begin{aligned} &-\delta z_2+z_2(-\pi_1^1+\pi_3^3)+(y_2+z_3)\pi_5^4+\pi_3^1=0,\\ &-\delta z_4+z_4(-\pi_1^1+\pi_4^4)+(2z_5+y_4)\pi_5^4-2\pi_5^2=0,\\ &-\delta z_5+z_5(-\pi_1^1+\pi_5^5)+(y_5+z_6)\pi_5^4-\pi_5^2=0; \end{aligned}$$

$$-\delta z_3+z_3(-\pi_1^1+\pi_3^3+\pi_5^4)=0,$$

(34′)
$$-\delta z_5+z_5(-\pi_1^1+\pi_5^5)+(y_5+z_6)\pi_5^4-\pi_5^2=0,$$

$$-\delta z_6+z_6(-\pi_2^2+\pi_5^5+\pi_5^4)+y_6\pi_5^4-\pi_4^2=0.$$

От равенството $y_5=y_6$ следва $\delta y_5=\delta y_6$, откъдето, като използваме (31′), получаваме

(35)
$$\pi_4^2=0.$$

Аналогично от $z_5=z_6$ и $z_2-z_3+y_2=0$ намираме съответно

(36)
$$\pi_5^2=0,\ \pi_3^1=0.$$

Поради (10), (11), (22), (35) и (36) от равенствата (26′)—(34′) получаваме следните дванадесет различни равенства:

(37)
$$\begin{aligned}
&\delta x_1=x_1(-\pi_1^1+\pi_3^3),\\
&\delta x_4=x_4(-\pi_1^1-\pi_3^3+2\pi_4^4)+2x_5\pi_5^4,\\
&\delta x_5=x_5(-\pi_1^1-\pi_3^3+\pi_4^4+\pi_5^5)+x_6\pi_5^4,\\
&\delta x_6=x_6(-\pi_2^2-\pi_3^3+2\pi_5^5),\\
&\delta y_1=y_1(-\pi_1^1+2\pi_3^3-\pi_5^5),\\
&\delta y_2=y_2(-\pi_1^1+\pi_3^3-\pi_5^4),\\
&\delta y_4=y_4(-\pi_1^1+\pi_4^4-\pi_5^4)+2y_5\pi_5^4,\\
&\delta y_5=y_5(-\pi_1^1+\pi_5^5),\\
&\delta z_1=z_1(-\pi_1^1+2\pi_3^3-\pi_4^4)+y_1\pi_5^4,\\
&\delta z_3=z_3(-\pi_1^1+\pi_3^3+\pi_5^4),\\
&\delta z_4=z_4(-\pi_1^1+\pi_4^4)+(2z_5+y_4)\pi_5^4,\\
&\delta z_5=z_5(-\pi_1^1+\pi_5^5+\pi_5^4)+y_5\pi_5^4.
\end{aligned}$$

Репера, определен от инвариантно свързаните с M_3 точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_4+A_5, ще наричаме полуканоничен. Остава да се направят още четири нормировки. От (37) се вижда, че останалите нормировки може да се направят по различен начин. Например от (37_1), (37_8) и (37_{12}) се вижда, че можем да изберем вторичните параметри така, че $x_1=1$, $y_5=1$ и $z_5=0$, откъдето получаваме съответно

(38)
$$\pi_1^1+\pi_3^3=0,\qquad \pi_5^5\ \ \pi_1^1-0,\qquad \pi_5^4=0.$$

Условията (38) поради (10) се получават вследствие подходящо пренормиране върховете на репера, като нормировките на A_4 и A_5 са свързани Дотук извършихме четири нормировки. Последната да направим така, че детерминантата от координатите на върховете да има стойност единица, т. е.

(39) $$(A_1A_2A_3A_4A_5)=1.$$

Като диференцираме (39), получаваме

(40) $$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4+\omega_5^5=0,$$

което при изменението само на вторичните параметри добива вида

(41) $$\pi_1^1+\pi_2^2+\pi_3^3+\pi_4^4+\pi_5^5=0.$$

Поради (10), (11_1), (38) и (41) намираме

$$\pi_1^1=\pi_2^2=\pi_3^3=\pi_4^4=\pi_5^5=0.$$

С това всички вторични форми станаха нули, откъдето $\delta A_i=0$, $i=1,\ldots,5$, което показва, че каноничният репер е построен.

От (37) получаваме девет диференциални инварианти от втори ред, които означаваме съответно

(42) $$x_4=\alpha,\ x_5=\beta,\ x_6=\gamma,\ y_1=\delta,\ y_2=\lambda,\ y_4=\mu,\ z_1=\nu,\ z_3=a,\ z_4=b.$$

Поради последното неравенство от (22) имаме

(43) $$1-\mu\neq b.$$

При така построения каноничен репер равенствата (23)—(34) добиват вида

$$\omega_2^1=\omega_1^3,$$

$$-\omega_5^3=\alpha\omega_1^4+\beta\omega_2^4,$$

(44) $$-\omega_4^3-\omega_5^3=\beta\omega_1^4+\gamma\omega_2^4,$$

$$-\omega_3^5=\delta\omega_1^3+\lambda\omega_1^4,$$

(45) $$\omega_1^2-\omega_4^5=\lambda\omega_1^3+\mu\omega_1^4+\omega_2^4,$$

$$\omega_1^2=\omega_1^4+\omega_2^4;$$

$$\omega_3^4=\nu\omega_1^3+(a-\lambda)\omega_1^4+a\omega_2^4,$$

(46) $$-\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4-\omega_2^1=(a-\lambda)\omega_1^3+b\omega_1^3,$$

$$\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4-\omega_4^5-\omega_1^2=a\omega_1^3;$$

$$-2\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=u_1\omega_1^3+a_2\omega_1^4+a_3\omega_2^4,$$

(47) $$-\omega_5^1+\omega_4^3=a_2\omega_1^3+a_4\omega_1^4+a_5\omega_2^4,$$

$$-\omega_4^1-\omega_5^1=a_3\omega_1^3+a_5\omega_1^4+\sigma_6\omega_2^4;$$

$$-\omega_5^1+a\omega_3^4=\beta_1\omega_1^3+\beta_2\omega_1^4+\beta_3\omega_2^4,$$

(48) $$-da+a(-\omega_1^1-\omega_3^3+\omega_4^4+\omega_5^5-\omega_5^4)+\beta(2\omega_5^4-\omega_2^1)=\beta_2\omega_1^3+\beta_4\omega_1^4+\beta_5\omega_2^4,$$

$$-d\beta+/(-\omega_2^2-\omega_3^3+\omega_4^4+\omega_5^5)-a\omega_1^2+\gamma\omega_5^4=\beta_3\omega_1^3+\beta_5\omega_1^4+\beta_6\omega_2^4;$$

$$-\omega_4^1-\omega_5^1+\beta\omega_3^4=\gamma_1\omega_1^3+\gamma_2\omega_1^4+\gamma_3\omega_2^4,$$

(49) $$-d\beta+\beta(-\omega_1^1-\omega_3^3+2\omega_4^4+\omega_5^4)+\alpha(-\omega_4^4+\omega_5^5$$
$$+\omega_4^5-\omega_5^4)+\gamma(\omega_5^4-\omega_2^1)=\gamma_2\omega_1^3+\gamma_4\omega_1^4+\gamma_5\omega_2^4,$$

$$-d\gamma+\gamma(-\omega_2^2-\omega_3^3+2\omega_4^4+2\omega_5^4)+\beta(-\omega_4^4+\omega_5^5-\omega_1^2$$
$$+\omega_4^5-\omega_5^4)=\gamma_3\omega_1^3+\gamma_5\omega_1^4+\gamma_6\omega_2^4;$$

$$-d\delta+\delta(-\omega_1^1+2\omega_3^3-\omega_5^5)+2\lambda\omega_3^4=\delta_1\omega_1^3+\delta_2\omega_1^4+\delta_3\omega_2^4,$$

(50) $$-d\lambda+\lambda(-\omega_1^1+\omega_3^3+\omega_4^4-\omega_5^5)-\omega_3^2-(1-\mu)\omega_3^4+\delta\omega_4^3=\delta_2\omega_1^3+\delta_4\omega_1^4+\delta_5\omega_2^4,$$

$$-\omega_3^2-\lambda\omega_1^2=\delta_3\omega_1^3+\delta_5\omega_1^4+\delta_6\omega_2^4;$$

$$-d\lambda+\lambda(-\omega_1^1+\omega_3^3+\omega_4^4-\omega_5^5)+\mu\omega_3^4-\omega_3^2+\delta\omega_4^3=\lambda_1\omega_1^3+\lambda_2\omega_1^4+\lambda_3\omega_2^4,$$

(51) $$-d\mu+\mu(-\omega_1^1+2\omega_4^4-\omega_5^5)+\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_4^4+\omega_5^5$$
$$-\omega_2^1+\omega_5^4-2\omega_4^2+2\lambda\omega_4^3=\lambda_2\omega_1^3+\lambda_4\omega_1^4+\lambda_5\omega_2^4,$$

$$\omega_1^1-2\omega_2^2+\omega_4^4+\omega_5^4-\mu\omega_1^2-\omega_4^2=\lambda_3\omega_1^3+\lambda_5\omega_1^4+\lambda_6\omega_2^4;$$

$$-\omega_3^2+\omega_3^4=\mu_1\omega_1^3+\mu_2\omega_1^4+\mu_3\omega_2^4,$$

(52) $$-\omega_2^2+\omega_4^4-\omega_4^2-\omega_2^1+\omega_5^4=\mu_2\omega_1^3+\mu_4\omega_1^4+\mu_5\omega_2^4,$$

$$\omega_1^1-2\omega_2^2+\omega_4^4+\omega_5^4-\omega_1^2=\mu_3\omega_1^3+\mu_5\omega_1^4+\mu_6\omega_2^4;$$

$$-d\nu+\nu(-\omega_1^1+2\omega_3^3-\omega_4^4)+\delta\omega_5^4+(a-\lambda)\omega_3^4=\nu_1\omega_1^3+\nu_2\omega_1^4+\nu_3\omega_2^4,$$

(53) $$-d(a-\lambda)+(a-\lambda)(-\omega_1^1+\omega_3^3)+\omega_3^1$$
$$+(a+\lambda)\omega_5^4+\nu\omega_4^3-a\omega_2^1=\nu_2\omega_1^3+\nu_4\omega_1^4+\nu_5\omega_2^4,$$

$$-da+a(-\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_5^4)+\omega_3^2-(a-\lambda)\omega_1^2=\nu_3\omega_1^3+\nu_5\omega_1^4+\nu_6\omega_2^4;$$

$$-d(a-\lambda)+(a-\lambda)(-\omega_1^1+\omega_3^3)+\nu(\omega_4^3+\omega_5^3)+\omega_1^1$$

(54) $$-\omega_2^2-2\omega_1^2+\delta\omega_5^3+(a+\lambda)\omega_5^4+\omega_3^1+b\omega_3^4=u_1\omega_1^3+u_2\omega_1^4+u_3\omega_2^4,$$

$$-db+b(-\omega_1^1+\omega_4^4)+\mu\omega_5^4+2(a-\lambda)\omega_4^3+a\omega_5^3$$
$$+2(\omega_4^1+\omega_5^1-\omega_5^2)=u_2\omega_1^3+u_4\omega_1^4+u_5\omega_2^4,$$

$$-b\omega_1^2+\omega_5^4-\omega_5^2+a(\omega_5^3+\omega_4^3)+\omega_4^1+\omega_5^1=u_3\omega_1^3+u_5\omega_1^4+u_6\omega_2^4;$$

$$-da+a(-\omega_1^1+\omega_3^3+\omega_5^4)+\lambda(\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4)$$
$$+(\delta+\nu)(\omega_4^3+\omega_5^3)+\omega_3^2=r_1\omega_1^3+r_2\omega_1^4+r_3\omega_2^4,$$

(55) $$a\omega_5^3+(-\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_4^4+\omega_5^5)+\mu(\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4)$$

$$+2a\omega_4^3+\omega_4^1+\omega_5^1-\omega_5^2=r_2\omega_1^3+r_4\omega_1^4+r_5\omega_2^4,$$

$$a(\omega_4^3+\omega_5^3)-\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_4^2+\omega_5^4=r_3\omega_1^3-r_5\omega_1^4+r_6\omega_2^4.$$

Формите (3′) и левите части на (15), (44)—(55) са главните диференциални форми от втори ред на M_3. Коефициентите a_i, β_i, γ_i, δ_i, λ_i, μ_i, ν_i, u_i, r_i, $i=1,\dots,6$, са нови диференциални инварианти от трети ред.

Поради това, че броят на небазисните линейни диференциални форми ω_i^j и диференциалните инварианти от втори ред е по-малък от броя на получените главни форми, за диференциалните инварианти получаваме следните връзки:

$$
\begin{array}{lll}
 & \beta_1=a_2+a\nu, & \lambda_1=\nu+\delta_2,\\
 & \beta_2 \quad -\alpha+\beta+a_4+aa-\lambda\alpha & \lambda_2=-\lambda+a+\delta_4,\\
 & \beta_3=\gamma-\beta+a_5+aa, & \lambda_3=\mu_2,\\
 & \beta_5=-b\beta+\gamma_4, & \lambda_5=\mu_4+2-2\mu+b,\\
 & \beta_6=\gamma_5, & \lambda_6=\mu_5+1-\mu,\\
(56) & \gamma_1=a_3+\beta\nu, & \nu_2=u_1-a+1-b\nu,\\
 & \gamma_2=a_5+a\beta-\lambda\beta & \nu_3=r_1-a+\lambda^2-a\lambda,\\
 & \gamma_3=a_6+a\beta, & \nu_4=u_2+b+\mu+\alpha\delta+\lambda\nu-ab+b\lambda,\\
 & \delta_3=-\nu+\mu_1, & \nu_5=r_2+a-a\mu-\lambda+\lambda\mu+\beta\delta+\beta\nu-ab,\\
 & \delta_5=-a+\mu_2, & \nu_6=r_3+\gamma\delta+\gamma\nu,\\
 & \delta_6=-a+\mu_3-\lambda, & u_3=r_2+a-1-a\mu-\lambda+\lambda\mu,
\end{array}
$$

$$u_5=r_4-2b-aa-4\mu+4+\mu^2+a\beta,$$

$$u_6=r_5-a\beta+a\gamma+2-\mu-b.$$

Компоненти на инфинитизималните преобразувания на каноничния репер. От равенствата (15), (44)—(55), (40) и връзките (56) за компонентите на инфинитезималните преобразувания на каноничния репер получаваме

$$\omega_1^1=\left(-1-\frac{1}{5}a_1-\frac{1}{5}\mu_3-\frac{1}{5}\lambda+\frac{1}{5}a+\frac{1}{5}r_3-\frac{1}{5}\mu_2\right)\omega_1^3+\left(\frac{9}{5}-\frac{4}{5}b\right.$$

$$\left.-\mu-\frac{1}{5}\alpha_2-\frac{1}{5}\mu_5+\frac{1}{5}r_5+\frac{1}{5}a\beta-\frac{1}{5}\mu_4\right)\omega_1^4$$

$$+\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\alpha_3-\frac{1}{5}\mu_6+\frac{1}{5}r_6+\frac{1}{5}a\gamma-\frac{1}{5}\mu_5\right)\omega_2^4.$$

$$\omega_1^2=\omega_1^4+\omega_2^4,$$

$$\omega_1^5=0,$$

$$\omega_2^1=\omega_1^3,$$

$$\omega_2^2=\left(-\frac{1}{5}\alpha_1-\frac{1}{5}\mu_3-\frac{1}{5}\lambda+\frac{1}{5}a+\frac{1}{5}r_3-\frac{1}{5}\mu_2\right)\omega_1^3+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}b\right.$$

$$-\frac{1}{5}\alpha_2-\frac{1}{5}\mu_5+\frac{1}{5}r_5+\frac{1}{5}a\beta-\frac{1}{5}\mu_4\Big)\omega_1^4+\Big(-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\alpha_3-\frac{1}{5}\mu_6+\frac{1}{5}r_6$$

$$\left.+\frac{1}{5}a\gamma-\frac{1}{5}\mu_5\right)\omega_2^4,$$

$$\omega_2^3=0,$$

$$\omega_2^5=\omega_1^4+\omega_2^4,$$

$$\omega_3^1=(3\nu-2\mu_1-r_1-\mu\nu+\delta_2+u_1+1-b\nu)\omega_1^3+(3a-a\mu-2\mu_2-r_2-3\lambda$$

$$+\lambda\mu+\delta_4+u_2+b+\mu-ab+\lambda b)\omega_1^4+(3a-2\mu_3-2a\mu+\mu_2-\lambda+\lambda\mu-ab+r_2-r_3)\omega_4^2$$

$$\omega_3^2=(\nu-\mu_1)\omega_1^3+(a-\lambda-\mu_2)\omega_1^4+(a-\mu_3)\omega_2^4,$$

$$\omega_3^3=\left(-2+\frac{1}{5}a+\frac{4}{5}\alpha_1-\frac{1}{5}\lambda-\frac{1}{5}\mu_2-\frac{1}{5}\mu_3+\frac{1}{5}r_3\right)\omega_1^3+\left(\frac{19}{5}-\frac{9}{5}b+\frac{4}{5}\alpha_2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}a\beta-2\mu-\frac{1}{5}\mu_4-\frac{1}{5}\mu_5+\frac{1}{5}r_5\right)\omega_1^4+\left(\frac{9}{5}+\frac{4}{5}\alpha_3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}a\gamma-\frac{1}{5}\mu_5-\frac{1}{5}\mu_6+\frac{1}{5}r_6\right)\omega_2^4$$

$$\omega_3^4=\nu\omega_1^3+(a-\lambda)\omega_1^4+a\omega_2^4.$$

$$\omega_3^5=-\delta\omega_1^3-\lambda\omega_1^4,$$

$$\omega_4^1=(\alpha_2-\alpha_3)\,\omega_1^3+(-\alpha+\beta+\alpha_4-\alpha_5)\omega_1^4+(\alpha_5-\alpha_6-\beta+\gamma)\omega_2^4, \tag{57}$$

$$\omega_4^2=(\mu_3-\mu_2)\,\omega_1^3+(b-1+\mu+\mu_5-\mu_4)\,\omega_1^4+(\mu_6-\mu_5)\,\omega_2^4,$$

$$\omega_4^3=(\alpha-\beta)\omega_1^4+(\beta-\gamma)\omega_2^4,$$

$$\omega_4^4=\left(2-\frac{1}{5}\alpha_1-\frac{1}{5}\mu_3-\frac{1}{5}\lambda+\frac{1}{5}a-\frac{4}{5}r_3+\frac{4}{5}\mu_2\right)\omega_1^3+\left(\frac{6}{5}b+\mu-\frac{11}{5}\right.$$

$$-\frac{1}{5}\alpha_2-\frac{1}{5}\mu_5-\frac{4}{5}r_5-\frac{4}{5}a\beta+\frac{4}{5}\mu_4\Big)\omega_1^4+\Big(-\frac{6}{5}-\frac{1}{5}\alpha_3-\frac{1}{5}\mu_6$$

$$\left.-\frac{4}{5}r_6-\frac{4}{5}a\gamma+\frac{4}{5}\mu_5\right)\omega_2^4,$$

$$\omega_4^5=-\lambda\omega_1^3+(1-\mu)\omega_1^4,$$

$$\omega_5^1=-\alpha_2\omega_1^3+(\alpha-\beta-\alpha_4)\,\omega_1^4+(\beta-\gamma-\alpha_5)\,\omega_2^4,$$

$$\omega_5^2=(-\alpha+a\mu-\alpha_3-\mu_2+\mu_3+\lambda-\lambda\mu-r_2+r_3)\,\omega_1^3+(b-3-a\beta-\alpha_5+a\alpha+\mu_5$$

$$+r_5-\mu_4-r_4+4\mu-\mu^2)\,\omega_1^4+(a\beta-a\gamma-1-\alpha_6-\mu_5+\mu_6-r_5+r_6+\mu)\omega_2^4$$

$$\omega_5^3=-\alpha\omega_1^4-\beta\omega_2^4,$$

$$\omega_5^4=(-1-\mu_2+\mu_3+r_3)\,\omega_1^3+(1+a\beta-\mu_4+\mu_5+r_5)\,\omega_1^4+(1+a\gamma$$
$$-\mu_5+\mu_6+r_6)\,\omega_2^4,$$
$$\omega_5^5=\left(1-\frac{1}{5}\,a_1+\frac{4}{5}\,\mu_3+\frac{4}{5}\lambda-\frac{4}{5}\,a+\frac{1}{5}\,r_3-\frac{1}{5}\,\mu_2\right)\omega_1^3+\left(-\frac{16}{5}+\frac{6}{5}\,b+2\mu-\frac{1}{5}\,a_2\right.$$
$$+\frac{4}{5}\,\mu_5+\frac{1}{5}\,r_5+\frac{1}{5}\,a\beta-\left.\frac{1}{5}\,\mu_4\right)\omega_1^4+\left(-\frac{6}{5}-\frac{1}{5}\,a_3+\frac{4}{5}\,\mu_6+\frac{1}{5}\,r_6\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\,a\gamma-\frac{1}{5}\,\mu_5\right)\omega_2^4.$$

Аналогично за диференциалните инварианти от втори ред имаме

$$da=(8a-4\beta-\alpha_4+2a\lambda-2aa-a\alpha_1+2a\mu_2-2ar_3+2\beta\mu_3+2\beta r_3-2\beta\mu_2)\omega_1^3$$
$$+(-12a+2\beta-\beta_4+5ab+6a\mu-a\alpha_2-2ar_5+2a\mu_4-2aa\beta+2\beta\mu_5$$
$$+2\beta r_5+2a\beta^2-2\beta\mu_4)\,\omega_1^4+(-6a+2\beta-\gamma_4-a\alpha_3+2a\mu_5-2ar_6-2aa\gamma$$
$$+2\beta\mu_6+2\beta r_6+2a\beta\gamma-2\beta\mu_5+b\beta)\,\omega_2^4,$$
$$d\beta=(-aa-\alpha_5-\alpha_1\beta+6\beta-a\beta+\beta\mu_2+\beta\mu_3+\beta\lambda-\beta r_3-2\gamma-\gamma\mu_2+\gamma\mu_3$$
$$+\gamma r_3)\,\omega_1^3+(-a-9\beta-a\beta^2+5b\beta-\alpha_2\beta+\gamma-\gamma_4+5\beta\mu+\beta\mu_4+\beta\mu_5$$
$$-\beta r_5+a\beta\gamma-\gamma\mu_4+\gamma\mu_5+\gamma r_5)\,\omega_1^4+(-a-4\beta+\gamma-\gamma_5-\alpha_3\beta-a\beta\gamma+a\gamma^2$$
$$+\beta\mu_5+\beta\mu_6-\beta r_6-\gamma\mu_5+\gamma\mu_6+\gamma r_6)\,\omega_2^4,$$
$$d\gamma=(-\alpha_6+4\gamma-\alpha_1\gamma-2a\beta+2\gamma\mu_3)\,\omega_1^3+(-2\beta-6\gamma-\gamma_5+4b\gamma+4\gamma\mu-\alpha_2\gamma$$
$$+2\gamma\mu_5)\,\omega_1^4+(-2\beta-2\gamma-\gamma_6-\alpha_3\gamma+2\gamma\mu_6)\,\omega_2^4,$$
$$d\delta=(-4\delta-\delta_1+2\alpha_1\delta-\mu_3\delta-\lambda\delta+a\delta+2\lambda\nu)\,\omega_1^3+(9\delta-\delta_2-4b\delta-5\mu\delta+2\alpha_2\delta$$
$$-\mu_5\delta+2a\lambda-2\lambda^2)\,\omega_1^4+(4\delta+\nu-\mu_1+2\alpha_3\delta-\mu_6\delta+2a\lambda)\,\omega_2^4,$$
$$d\lambda=(\mu_1-2\nu-\delta_2+\alpha_1\lambda-\lambda\mu_3-\lambda^2+a\lambda-\lambda r_3+\lambda\mu_2+\mu\nu)\,\omega_1^3+(-2a+5\lambda+\mu_2$$
$$-\delta_4-b\lambda-3\lambda\mu+\alpha_2\lambda-\lambda\mu_5-\lambda r_5-a\beta\lambda+\lambda\mu_4+a\mu+a\delta-\beta\delta)\,\omega_1^4+(-a$$
$$+\lambda-\mu_2+\mu_3+a\mu+\alpha_3\lambda-\lambda\mu_6-\lambda r_6-a\gamma\lambda+\lambda\mu_5+\beta\delta-\gamma\delta)\,\omega_2^4,$$
$$d\mu=(-4-2a+2\lambda+4\mu+2r_3-\delta_4-\mu\mu_3-\lambda\mu+a\mu-2r_3\mu+2\mu\mu_2)\,\omega_1^3$$
$$+(4-3b-5\mu+2r_5-\lambda_4+2b\mu+\mu^2-\mu\mu_5-2\mu r_5-2a\beta\mu+2\mu\mu_4+2a\beta$$
$$+2a\lambda-2\lambda\beta)\,\omega_1^4+(b-\mu_4-\mu\mu_6-2\mu r_6-2a\gamma\mu+2\mu\mu_5+2r_6+2a\gamma$$
$$+2\lambda\beta-2\lambda\gamma)\,\omega_2^4,$$
$$d\nu=(-5\nu-\delta-\nu_1+2\alpha_1\nu+r_3\nu-\mu_2\nu+\delta\mu_3+\delta r_3-\delta\mu_2+a\nu-\lambda\nu)\,\omega_1^3+(-1+a \tag{58}$$
$$-u_1+8\nu+\delta-3b\nu-4\mu\nu+2\alpha_2\nu+r_5\nu+a\beta\nu-\mu_4\nu+\delta\mu_5+\delta r_5+a\beta\delta-\delta\mu_4$$

$$+a^2-2a\lambda+\lambda^2)\,\omega_1^4+(a-r_1+4\nu+\delta+a^2-\lambda^2+2a_3\nu+r_6\nu+a\gamma\nu-\mu_5\nu$$
$$+\mu_6\delta+r_6\delta+a\gamma\delta-\mu_5\delta)\,\omega_2^4,$$
$$da=(-2a+\nu-\mu_1-r_1+aa_1+a\mu_3+ar_3-a\mu_2+a\lambda-\lambda^2)\,\omega_1^3+(4a-ab-a\mu$$
$$+aa_2+a\mu_5+ar_5+a^2\beta-a\mu_4-\mu_2-r_2+\lambda-\lambda\mu-\beta\delta-\beta\nu)\,\omega_1^4+(3a+\lambda$$
$$-\mu_3-r_3+aa_3+a\mu_6+ar_6+a^2\gamma-a\mu_5-\gamma\delta-\gamma\nu)\,\omega_2^4,$$
$$db=(2a+3b-2\lambda-\mu-2\mu_3+2\mu_2+2r_2-2r_3-u_2-br_3+b\mu_2+\mu\mu_3+\mu r_3$$
$$-\mu\mu_2-2a\mu+2\lambda\mu)\,\omega_1^3+(6-6b+2b^2+2b\mu-br_5-ab\beta+b\mu_4+\mu\mu_5$$
$$-7\mu+\mu r_5+a\beta\mu-\mu\mu_4+aa-2a\lambda+2\beta\lambda+2\mu_4-2\mu_5+2r_4-2r_5+2\mu^2$$
$$-u_4)\omega_1^4+(-2-br_6-ab\gamma+b\mu_5+\mu\mu_6+\mu r_6+a\gamma\mu-\mu\mu_5+3\mu-2\beta\lambda$$
$$+2\gamma\lambda-2\mu_6-2r_6+2\mu_5+2r_5-2a\beta-r_4+aa-\mu^2)\,\omega_2^4.$$

Като диференцираме външно базисните форми, получаваме

$$D\omega_1^3=(2-b-\mu+a_2)\,[\omega_1^3\omega_1^4]+(1+a_3)\,[\omega_1^3\omega_2^4]+(\beta-\gamma)\,[\omega_1^4\omega_2^4],$$

$$(59)\qquad D\omega_1^4=(-3+a-\lambda-\mu_2+r_3)\,[\omega_1^3\omega_1^4]+a\,[\omega_1^3\omega_2^4]+(-1-a\gamma+\mu_5-r_6)[\omega_1^4\omega_2^4],$$

$$D\omega_2^4=(2+\mu_2-\mu_3-r_3)[\omega_1^3\omega_1^4]+(-1-\mu_3)[\omega_1^3\omega_2^4]+(2-b+a\gamma-\mu-2\mu_5$$
$$+\mu_6+r_6)\,[\omega_1^4\omega_2^4].$$

Трите форми $\omega_1^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ и диференциалните инварианти (42) при условието (43), a_i, $i=1, \ldots, 6$, $\beta_4, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \delta_1, \delta_2, \delta_4, \lambda_4, \mu_i, i=1, \ldots, 6, \nu_1, u_1, u_2, u_4$, $r_i, i=1, \ldots, 6$ — на брой 39—са основните инварианти на трифокусната трипараметрична съвкупност M_3. Следователно можем да формулираме следната

Т е о р е м а. Нека са дадени три линейно независими линейни диференциални форми ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4 на три независими променливи u, v, w и 39 функции: (42) при условие (43), $a_i, i=1, \ldots, 6$, $\beta_4, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \delta_1, \delta_2, \delta_4, \lambda_4, \mu_i, i=1, \ldots, 6$, $\nu_1, u_1, u_2, u_4, r_i, i=1, \ldots, 6$ на същите променливи. Нека при това са удовлетворени уравненията на структурата (2) и равенствата (58), като формите ω_i^j са определени от (57). При тези условия системата (1) определя с точност до проективност трипараметричната съвкупност M_3 и свързания с нея каноничен репер $A_1A_2A_3A_4A_5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х о д ж В. и Д. П и д о, Методы алгебраической геометрии, т. I, II, Москва, 1954.
2. Ф и н и к о в С. П., Метод внешних форм Картана, Москва — Ленинград, 1948.
3. Ф и н и к о в С. П., Теория конгруэнций, Москва — Ленинград, 1950.

Постъпила на 17. VI. 1964 г.

КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СОВОКУПНОСТЕЙ ПРЯМЫХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Иванка Иванова-Каратопраклиева

(Резюме)

В предлагаемой работе построен канонический репер трехпараметрических совокупностей прямых в четырехмерном проективном пространстве P_4. Произвольная трехпараметрическая совокупность прямых обозначается через M_3.

Сперва рассматриваются реперы нулевого порядка, при которых вершины A_1 и A_2 являются точками на прямой $p \in M_3$. Из полученных шести главных форм нулевого порядка как базисные приняты ω_1^3, ω_1^4 и ω_2^4. Найдены развертывающиеся однопараметрические совокупности, относящиеся к M_3, т. е. те, которые обладают свойством: для каждой прямой $p = A_1A_2$ существует точка $M = \lambda A_1 + \mu A_2$ такая, что линия, описываемая M, касается в той же самой точке к прямой p. Необходимое и достаточное условие, чтобы точка M обладала этим свойством, состоит в том, чтобы λ и μ удовлетворяли кубическому уравнению (6). Трехмерная поверхность, описываемая точкой M при изменении параметров u, v, w для M_3, называется фокальной.

В дальнейшем рассматриваются трехфокусные трехпараметрические совокупности M_3 в комплексном пространстве и, соответственно, в действительном, когда все три фокуса являются действительными. Реперами первого порядка являются все те, для которых A_1 и A_2 представляют собой фокусы, координатные гиперплоскости $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_2A_4A_5$ являются касательными гиперплоскостями соответственно к первой и второй фокальным поверхностям, описанным фокусами A_1 и A_2, а A_3 и $A_4 + A_5$ расположены в касательной гиперплоскости к третьей фокальной поверхности. Аналитически эти реперы характеризуются уравнениями (15). Показано, что система (15) находится в инволюции и определяет совокупность M_3 с точностью до трех функций трех аргументов. Три развертывающиеся однопараметрические совокупности (12), (13) и (14) пересекают три фокальные гиперповерхности соответственно по трем линиям, называемым первой, второй и третьей главными линиями.

Реперы второго порядка характеризируются геометрически следующим образом: A_3 является точкой пересечения касательных к вторым главным линиям на первой и третьей фокальных поверхностях; A_4 является точкой пересечения касательных к третим главным линиям на первой и второй фокальных поверхностях; $A_4 + A_5$ является точкой пересечения касательных к первым главным линиям на второй и третьей фокальных поверхностях. После подходящих нормирований построен канонический репер. Получено девять дифференциальных инвариантов второго порядка и тридцать новых третьего порядка. В конце сформулирована следующая

Т е о р е м а. Пусть даны три линейно независимые линейные дифференциальные формы ω_1^3, ω_1^4 и ω_2^4 независимых переменных u, v, w и 39

функций: (42) при условии (43), a_i, $i=1, \ldots, 6$, $\beta_4, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \delta_1, \delta_2, \delta_4, \lambda_4, \mu_i, i=1, \ldots, 6, \nu_1, u_1, u_2, u_4, r_i, i=1, \ldots, 6$ тех же переменных. Пусть при этом удовлетворены уравнения структуры (2) и равенства (58), причем формы ω_i^j определены равенствами (57). При этих условиях система (1) определяет с точностью до проективности трехпараметрическую совокупность M_3 и связанный с ней канонический репер $A_1A_2A_3A_4A_5$.

CANONICAL FRAME OF REFERENCE OF THE THREE-PARAMETRIC SYSTEMS OF STRAIGHT LINES IN FOUR-DIMENSIONAL PROJECTIVE SPACE

Ivanka Ivanova-Karatopraklieva

(Summary)

A canonical frame of reference of the three-parametric systems of straight lines in the four-dimensional projective space P_4 is constructed. A three-parametric system of straight lines is denoted by M_3.

At first the frames of reference of order zero are considered in which the vertex A_1 and A_2 are points on the straight line $p \in M_3$. From the 6 principal forms of zero order obtained, ω_1^3, ω_1^4, and ω_2^4 are chosen as basic ones. The developable one-parametric systems belonging to M_3 are found, i. e. the ones possessing the following property: for every line $p=A_1A_2$ there exists a point $M=\lambda A_1+\mu A_2$ such that the line described by M has the straight line p as tangent in the same point. A necessary and sufficient condition for point M to possess this property is λ and μ to satisfy the cubic equation (6). The three-dimensional surface described by the point M when the parameters u, v, w of M_3 vary is called focal.

The examination further on covers the three-focal three-parametric systems M_3 in complex space as well as in real space when all three focuses are real. The frames of reference of the first order are all those for which: A_1 and A_2 are focuses, the coordinate hyperplanes $A_1A_2A_3A_4$ and $A_1A_2A_4A_5$ are the tangential hyperplanes to the first and second focal surfaces (described by the focuses A_1 and A_2), and A_3 and A_4+A_5 lie in the tangential hyperplane to the third focal surface. Analytically, these frames of reference are characterized by the equations (15). It is shown that the system (15) is in involution and determines the set M_3 with the arbitrariness of three functions of three arguments. The three developable one-parameter systems (12), (13), and (14) intersect the three focal surfaces in three lines respectively which are called first, second, and third principal lines.

The frames of reference of the second order are characterized geometrically in the following manner: A_3 is the point of intersection of the tangents to the second principal lines on the first and third focal surfaces; A_4 is the point of intersection of the tangents to the third principal lines on the first and second focal surfaces; and A_4+A_5 is the point of intersection of the tangents to the first principal lines on the second and third focal

surfaces. The canonical frame of reference is constructed after appropriate noıming. Nine differential invariants of the second order and 30 new ones of the third order were obtained. The paper ends with the formulation of the following

Theorem: Given are three linearly independent linear differential forms ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4 of the independent variables u, v, w and 39 functions: (42) under the condition (43), a_i, $i=1, \ldots, 6$, β_4, γ_4, γ_5, γ_6, δ_1, δ_2, δ_4, λ_4, μ_i, $i=1, \ldots, 6$, v_1 u_1, u_2, u_4, r_i, $i=1, \ldots. 6$ of the same variables. Furthermore, they satisfy equations of the structure (2) and the equations (58), the forms ω_i^j being determined from (57). Under these conditions the system (1) determines up to projectivity the three-parametric system M_3 and the canonical frame of reference $A_1A_2A_3A_4A_5$ related to it.