БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

ВЪРХУ НАПРЕЧНИЦИТЕ НА ПРОСТРАНСТВОТО НА НЕПРЕКЪСНАТИТЕ ФУНКЦИИ

Благовест Сендов и Боян Пенков

В настоящата работа е намерена асимптотиката (вж. формула (3.1)) на n-тия напречник на пространството C_Δ на дефинираните в интервала $\Delta=[a, b]$ непрекъснати функции, метризирано с хаусдорфова метрика.

В § 0 са изложени необходимите дефиниции и основни твърдения. § 1 съдържа оценка за напречника отгоре, а § 2 — съответно отдолу. В § 3 са дадени някои заключителни бележки. Получените тук резултати са публикувани без доказателство в [6].

§ 0. Нека R е произволно метрично пространство. Разстоянието между два елемента $x\in R$ и $y\in R$ ще бележим с $\varrho(x, y)$. Ако $G\subset R$, под разстояние на точката x до множеството G разбираме

$$\varrho(x, G)=\inf_{y\in G}\varrho(x, y).$$

Отклонението $\delta(F, G)$ на множеството $F\subset R$ от множеството $G\subset R$ се дефинира чрез

$$\delta(F, G)=\sup_{x\in F}\varrho(x, G).$$

В случая, когато G е линейно подпространство L_n на R с краен брой измерения (например, ако R е функционално пространство, L_n може да бъде съвкупността на функциите от вида $c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots+c_n\varphi_n$, дето c_ν, $\nu=1, 2, \ldots, n$, са константи, а $\varphi_\nu\in R$), $\varrho(x, L_n)$ и $\delta(F, L_n)$ са съответно познатите от теорията на апроксимациите най-добро индивидуално приближение $E_n(x)$ на елемента x с елементи на L_n и съответно най-добро приближение $\mathcal{E}_n(F)$ за класа F чрез елементи на L_n.

Нека по-нататък R е и линейно пространство над полето на реалните числа и F е едно негово симетрично подмножество, т. е. такова, за което от $x\in F$ следва $-x\in F$.

Дефиниция. Под n-ти напречник $d_n(F)$ на множеството F ще разбираме

$$d_n(F)=\inf_{L\in Q_n}\delta(F, L),$$

където Q_n е множеството на всички крайномерни линейни пространства L_m с размерност $m\leqq n$.

Понятието напречник е дефинирано за пръв път от А. Н. Колмогоров [1]. Подробно е изследвал напречниците на множества в банахови пространства В. М. Тихомиров в [2] и [3].

Очевидно е, че с растенето на n напречниците не растат, т. е.

$$d_0 \geqq d_1 \geqq d_2 \geqq \cdots \geqq d_n \geqq \cdots,$$

като за някои стойности на индекса съответният напречник може да бъде равен и на ∞.

Както споменахме, пространството C_Δ се състои от непрекъснатите реалнозначни функции в интервала $\Delta = [a, b]$. За разстояние между два елемента $f \in C_\Delta$ и $g \in C_\Delta$ в настоящата работа е възприето хаусдорфовото разстояние, въведено и изучено в [4], което се дефинира по следния начин. Нека $x \in \Delta$ и $y \in \Delta$. Да означим

$$\|f(x), g(y)\| = \max[|x-y|, |f(x)-g(y)|].$$

Тогава хаусдорфовото разстояние $r(f, g)$ между непрекъснатите функции f и g се дава чрез

$$r(f, g) = \max\{\max_{x \in \Delta} \min_{y \in \Delta} \|f(x), g(y)\|, \max_{x \in \Delta} \min_{y \in \Delta} \|g(x), f(y)\|\}.$$

В настоящата работа се изучава n-тият напречник на C_Δ, т. е.

$$d_n(C_\Delta) = \inf_{m \leqq n} \delta(C_\Delta, L_m).$$

дето

$$\delta(C_\Delta, L_m) = \sup_{f \in C_\Delta} r(f, L_m),$$

$$r(f, L_m) = \inf_{l \in L_m} r(f, l),$$

а L_m е m-мерно линейно подпространство на C_Δ.

§ 1. За да намерим една оценка отгоре за $d_n(C_\Delta)$, достатъчно е да оценим отклонението $\delta(C_\Delta, L_n)$ на C_Δ от едно подходящо подбрано n-мерно линейно подпространство на C_Δ.

Такова линейно подпространство ще построим по следния начин. Нека m е цяло положително число. Да разделим интервала $[a, b]$ на m равни части с точките

$$x_0 = a,\ x_1 = x_0 + \frac{b-a}{m},\ x_2 = x_1 + \frac{b-a}{m}, \ldots, x_m = b. \tag{1.1}$$

С ξ_i да означим средата на интервала $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, т. е. $\xi_i = (x_{x-1} + x_i)/2$.

Нека $(b-a)/6m > \delta > 0$ и непрекъснатите функции $\sigma_\delta(x)$ и $\tau_\delta(x)$ са дефинирани за всяко x чрез

$$\sigma_\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq -\delta, \\ \frac{1}{2\delta}(x+\delta) & -\delta \leqq x \leqq \delta, \\ 1 & x \geqq \delta; \end{cases} \tag{1.2}$$

$$(1.3)\qquad \tau_\delta(x)=\begin{cases} 0 & x\leqq -\delta, \\ \frac{1}{\delta}(x+\delta) & -\delta\leqq x\leqq 0, \\ \frac{1}{\delta}(\delta-x) & 0\leqq x\leqq \delta, \\ 0 & x\geqq \delta. \end{cases}$$

Да дефинираме сега в $[a, b]$ $3m+1$ на брой непрекъснати функции σ_0, σ_i, τ_i^+, τ_i^-, $i=1, 2, \ldots, m$, по следния начин:

$$(1.4)\qquad \sigma_0=1,\ \sigma_i(x)=\sigma_\delta(x-\xi_i),$$

$$(1.5)\qquad \tau_i^+(x)=\tau_\delta(x-\xi_i-2\delta),$$

$$(1.6)\qquad \tau_i^-(x)=\tau_\delta(x-\xi_i+2\delta).$$

С L_δ да означим линейното пространство, образувано от линейните комбинации на функциите (1.4), (1.5) и (1.6). Броят на измеренията на L_δ не надминава $3m+1$.

Теорема 1.1. За отклонението $\delta(C_\Delta, L_\delta)$ е в сила неравенството

$$(1.7)\qquad \delta(C_\Delta, L_\delta)\leqq\frac{b-a}{2m}+3\delta.$$

Доказателство. Нека $f\in C_\Delta$. Да означим

$$m_i=\min_{x\in\Delta_i} f(x),$$

$$M_i=\max_{x\in\Delta_i} f(x),\ i=1, 2, \ldots, m,$$

и да разгледаме функцията

$$f^*(x)=f(x_0)\sigma_0(x)+\sum_{j=1}^{m}\{[m_j-f(x_{j-1})]\tau_j^-(x)+[f(x_j)-f(x_{j-1})]\sigma_i(x)$$
$$+[M_j-f(x_j)]\tau_j^+(x)\}.$$

Очевидно $f^*\in L_\delta$. Теоремата ще бъде доказана, ако покажем, че

$$(1.8)\qquad r(f, f^*)\leqq\frac{b-a}{2m}+3\delta,$$

понеже f е произволен елемент на C_Δ.

Тъй като

$$\tau_k^-(\xi_i-2\delta)=\tau_\delta(\xi_i-\xi_k)=\begin{cases}0 & i\neq k,\\ 1 & i=k,\end{cases}$$

$$\tau_k^-(\xi_i+2\delta)=\tau_\delta(\xi_i-\xi_k+4\delta)=0,$$

$$\tau_k^+(\xi_i+2\delta)=\tau_\delta(\xi_i-\xi_k)=\begin{cases}0 & i\neq k,\\ 1 & i=k,\end{cases}$$

$$\tau_k^+(\xi_i-2\delta)=\tau_\delta(\xi_i-\xi_k-4\delta)=0,$$

$$\sigma_k(\xi_i-2\delta)=\sigma_\delta(\xi_i-\xi_k-2\delta)=\begin{cases}0 & i\leqq k,\\ 1 & i>k,\end{cases}$$

$$\sigma_k(\xi_i+2\delta)=\sigma_\delta(\xi_i-\xi_k+2\delta)=\begin{cases}0 & i<k,\\ 1 & i\geqq k,\end{cases}$$

от дефиницията на f^* получаваме

$$f^*(\xi_i-2\delta)=f(x_0)+m_i-f(x_{i-1})+\sum_{j=1}^{i-1}[f(x_j)-f(x_{j-1})],\ i=1,2,\ldots,m,$$

или

(1.9) $$f^*(\xi_i-2\delta)=m_i,\ i=1,2,\ldots,m.$$

Аналогично се вижда, че

(1.10) $$f^*(\xi_i+2\delta)=M_i.$$

От (1.9) и (1.10) следва, че

(а) за всяко x в интервала Δ_i има точка $x'\in[\xi_i-2\delta,\ \xi_i+2\delta]$, за която $f^*(x')=f(x)$.

Нека x е произволна точка в Δ. Тогава има такова i, за което $x\in\Delta_i$ и съгласно (а) такова $x'\in[\xi_i-2\delta,\ \xi_i+2\delta]$, че $f^*(x')=f(x)$. Следователно

$$\|f(x),f^*(x')\|=\max\{|x-x'|,0\}=|x-x'|\leqq\frac{b-a}{2m}+2\delta,$$

откъдето

$$\min_{y\in\Delta}\|f(x),f^*(y)\|\leqq\frac{b-a}{2m}+2\delta$$

и поради произволния избор на x

(1.11) $$\max_{x\in\Delta}\min_{y\in\Delta}\|f(x),\ f^*(y)\|\leqq\frac{b-a}{2m}+2\delta.$$

От друга страна, лесно се съобразява (аналогично на извода на (1.9) и (1.10)), че

(1.12) $$m_i=\min_{x\in\Delta_i}f^*(x),\ M_i=\max_{x\in\Delta_i}f^*(x).$$

Нека пак x е произволна точка от Δ и нека $x\in\Delta_i$. Ще разгледаме два случая: α) $x\in[\xi_i-3\delta,\ \xi_i+3\delta]$ и β) $x\,\overline{\in}\,[\xi_i-3\delta,\ \xi_i+3\delta]$.

Случай α). Поради (1.12) има точка $x'\in\Delta_i$, за която $f(x')=f^*(x)$ и следователно

(1.13) $$\|f^*(x),f(x')\|=\max\{|x-x'|,0\}=|x-x'|\leqq\frac{b-a}{2m}+3\delta.$$

Случай β). От дефиницията на f^* се вижда, че за $x\in[\xi_i-3\delta,\ \xi_i+3\delta]$ е в сила или $f^*(x)=f(x_{i-1})$ (при $x_{i-1}\leqq x\leqq\xi_i-3\delta$), или $f^*(x)=f(x_i)$ (при $\xi_i+3\delta\leqq x\leqq x_i$). Следователно, ако

$$x'=\begin{cases}x_{i-1} & x_{i-1}\leqq x\leqq\xi_i-3\delta,\\ x_i & \xi_i+3\delta\leqq x\leqq x_i,\end{cases}$$

ще имаме

(1.14) $$\|f^*(x), f(x')\| = |x-x'| \leqq \frac{b-a}{2m} - 3\delta.$$

От (1.13) и (1.14) имаме

$$\min_{y\in\Delta} \|f^*(x), f(y)\| \leqq \frac{b-a}{2m} + 3\delta,$$

откъдето поради произволния избор на $x\in\Delta$

(1.15) $$\max_{x\in\Delta}\min_{y\in\Delta} \|f^*(x), f(y)\| \leqq \frac{b-a}{2m} + 3\delta.$$

Но по дефиниция

$$r(f^*, f) = \max\{\max_{x\in\Delta}\min_{y\in\Delta}\|f(x), f^*(y)\|, \max_{x\in\Delta}\min_{y\in\Delta}\|f^*(x), f(y)\|\},$$

следователно съгласно (1.11) и (1.15)

$$r(f, f^*) \leqq \frac{b-a}{2m} + 3\delta,$$

което е търсеното неравенство (1.8). С това теоремата е доказана.

Следствие 1.1. За всяко цяло $m \geqq 1$ е в сила неравенството

(1.16) $$d_{3m+1}(C_\Delta) \leqq \frac{b-a}{2m}\cdot$$

Доказателство. Тъй като L_δ има размерност $\leqq 3m+1$, ще имаме

$$d_{3m+1}(C_\Delta) = \inf_{L\in Q_{3m+1}} \delta(C_\Delta, L) \leqq \delta(C_\Delta, L_\delta).$$

От друга страна, по теорема 1.1 $\delta(C_\Delta, L_\delta) \leqq (b-a)/2m + 3\delta$. Тогава следва $d_{3m+1}(C_\Delta) \leqq (b-a)/2m + 3\delta$ и тъй като δ е произволно, оттук получаваме (1.16).

От монотонността на редицата на напречниците следва окончателната оценка отгоре ($n \geqq 4$)

(1.17) $$d_n(C_\Delta) \leqq \frac{b-a}{2\left[\frac{n-1}{3}\right]}\cdot$$

Директно може да се види, че $d_0(C_\Delta) = d_1(C_\Delta) = \infty$, $d_2(C_\Delta) = b-a$.

§ 2. За да намерим една оценка за $d_n(C_\Delta)$ отдолу, достатъчно е да оценим отдолу броя на измеренията на едно линейно пространство, за чието отклонение от C_Δ имаме оценка отгоре. По-точно ще докажем следната

Теорема 2.1. Ако за линейното пространство $L \subset C_\Delta$ за поне едно δ, $0 < \delta \leqq (b-a)/6m$, е в сила неравенството

(2.1) $$\delta(C_\Delta, L) < \frac{b-a}{2m} - 3\delta,$$

размерността на L не е по-малка от $3m-1$.

Доказателство. От (2.1) и от дефиницията на отклонение следва, че за всяко $f\in C_\Delta$ ще имаме

$$r(f, L) \leqq \frac{b-a}{2m} - 3\delta,$$

откъдето пък се вижда, че за всяко $f \in C_1$ има поне една функция $f^* \in L$, за която

$$r(f, f^*) \leqq \frac{b-a}{2m} - 3\delta. \tag{2.2}$$

Че размерността на L не е по-малка от $3m-1$, ще докажем, като намерим $3m-1$ на брой линейно независими функции от L. Тези функции ще получим, като първоначално подберем $3m-1$ специални елемента на C_1 и след това вземем съответните им елементи от L, за които е в сила (2.2).

Да разгледаме функциите

$$\begin{gathered} M\sigma_i(x), \quad i=1, 2, \ldots, m-1, \\ M\tau_i^-(x), \ M[\tau_i^-(x)+\tau_i^+(x)], \quad i=1, 2, \ldots, m, \end{gathered} \tag{2.3}$$

дето

$$M > 4^{m+2}(m+1)!\, a, \quad a = \frac{b-a}{2m} \tag{2.4}$$

и участвуващите в тях m и δ удовлетворят условията на теорема 2.1.

Съгласно казаното съществуват $3m-1$ на брой функции от L, които ще означим с $\varphi_i(x), i=1, 2, \ldots, m-1$, $\psi_i(x)$ и $\theta_i(x), i=1, 2, \ldots, m$, за които според (2.2) ще бъдат в сила неравенствата

$$\begin{gathered} r(M\sigma_i(x), \varphi_i(x)) \leqq a-3\delta, \ i=1, 2, \ldots, m-1, \\ r(M\tau_i^-(x), \psi_i(x)) \leqq a-3\delta, \ i=1, 2, \ldots, m, \\ r(M[\tau_i^-(x)+\tau_i^+(x)], \theta_i(x)) \leqq a-3\delta, \ i=1,2,\ldots,m. \end{gathered} \tag{2.5}$$

От неравенствата (2.5) и дефиницията на функциите (2,3) ((1.4), (1.5), (1.6)) получаваме, че

1) $$\begin{aligned} |\varphi_i(x)| &\leqq a && \text{за } x \in \Delta_j, \ j=1, 2, \ldots, i-1, \\ -a \leqq \varphi_i(x) &\leqq M+a && \text{за } x \in \Delta_i, \\ M-a \leqq \varphi_i(x) &\leqq M+a && \text{за } x \in \Delta_j, \ j=i+1, \ldots, m-1, \end{aligned}$$
$$i=1, 2, \ldots, m-1;$$

2) $$\begin{aligned} |\psi_i(x)| &\leqq a && \text{за } x \overline{\in} \Delta_i, \\ -a \leqq \psi_i(x) &\leqq M+a && \text{за } x \in \Delta_i, \end{aligned}$$

има точка $\eta_i \in \Delta_i$, за която $\psi(\eta_i) \geqq M-a$,

$$i=1, 2, \ldots, m;$$

3) $$\begin{aligned} |\theta_i(x)| &\leqq a && \text{за } x \overline{\in} \Delta_i, \\ |\theta_i(x)| &\leqq M+a && \text{за } x \in \Delta_i, \end{aligned}$$

има точки $\zeta_i^+ \in \Delta_i$ и $\zeta_i^- \in \Delta_i$, за които

$$\theta_i(\zeta_i^-) \leqq -M+a, \ \theta_i(\zeta_i^+) \geqq M-a,$$
$$i=1, 2, \ldots, m.$$

Ще докажем, че функциите φ_i, $i=1, 2, \ldots, m-1$, ψ_i и θ_i, $i=1, 2, \ldots, m$, са линейно независими. Да допуснем противното, т. е. че има $3m-1$ на брой числа λ_i, $i=1, 2, \ldots, m-1$, μ_i и ν_i, $i=1, 2, \ldots, m$, не всички равни на нула, за които

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \psi_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \nu_i \theta_i(x) = 0 \tag{2.6}$$

за всяко $x \in \Delta$.

Да въведем означението

$$\tau_i = |\mu_i| + |\nu_i|, \; i=1, 2, \ldots, m,$$

и да дефинираме функциите $\varkappa_i(x) = 1, 2, \ldots, m$ чрез

$$\varkappa_i(x) = \begin{cases} \tau_i^{-1}(\mu_i \psi_i(x) + \nu_i \theta_i(x) & \text{при } \tau_i \neq 0, \\ \frac{1}{2} \psi_i(x) + \frac{1}{2} \theta_i(x) & \text{при } \tau_i = 0. \end{cases}$$

Очевидно имаме

$$\mu_i \psi_i(x) + \nu_i \theta_i(x) = \tau_i \varkappa_i(x). \tag{2.7}$$

Така дефинираните функции $\varkappa_i(x)$ имат следните свойства:

$$|\varkappa_i(x)| \leq a \text{ за } x \in \bar{\Delta}_i, \; i=1, 2, \ldots, m. \tag{2.8}$$

Това свойство следва непосредствено от свойствата 2) и 3) на $\psi_i(x)$ и $\theta_i(x)$.

Освен това има точки $\zeta_i \in \Delta_i$, за които

$$|\varkappa_i(\zeta_i)| \geqq \frac{1}{4} M. \tag{2.9}$$

За да се убедим в съществуването на ζ_i, ще разгледаме три случая:

α) $\tau_i = 0$. В този случай можем да положим $\zeta_i = \zeta_i^+$, понеже

$$\varkappa_i(\zeta_i^+) = \frac{1}{2}[\psi_i(\zeta_i^+) + \theta_i(\zeta_i^+)] \geqq -\frac{1}{2} a + \frac{1}{2}(M-a) = \frac{1}{2} M - a \geqq \frac{1}{4} M;$$

β) $\tau_i \neq 0$, $|\nu_i/\tau_i| > 1/3$. В този случай дефинираме ζ_i чрез

$$\zeta_i = \begin{cases} \zeta_i^+, & \text{ако } \operatorname{sgn} \gamma_i \mu_i = 1; \\ \zeta_i^-, & \text{ако } \operatorname{sgn} \gamma_i \mu_i = -1. \end{cases}$$

При такава дефиниция на ζ_i имаме

$$\varkappa_i(\zeta_i) \geqq -\frac{2}{3} a + \frac{1}{3}(M-a) = \frac{1}{3} M - a \geqq \frac{1}{4} M;$$

γ) $\tau_i \neq 0$, $|\nu_i/\tau_i| \leq 1/3$. В този случай полагаме $\zeta_i = \eta_i$. Тогава

$$|\varkappa_i(\eta_i)| \geqq \left|\frac{\mu_i}{\tau_i}\right| |\psi_i(\eta_i)| - \left|\frac{\gamma_i}{\tau_i}\right| |\theta_i(\eta_i)|$$

$$\geqq \frac{2}{3}(M-a) - \frac{1}{3}(M+a) = \frac{1}{3} M - a \geqq \frac{1}{4} M.$$

С това двете основни свойства (2.8) и (2.9) на функциите са доказани.

Като използваме функции $\varkappa_i(x)$, можем да запишем линейната зависимост (2.6) във вида

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \varkappa_i(x) = 0. \tag{2.10}$$

По-нататък ще се стремим да покажем, че сумата

$$S = \sum_{i=1}^{m-1} |\lambda_i| + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \tag{2.11}$$

е равна на нула. Поради дефиницията на τ_i това ще означава, че всички коефициенти λ_i, μ_i и ν_i са нули, с което линейната независимост на φ_i, ψ_i и θ_i ще бъде доказана. Да допуснем, че $S>0$.

От (2.10) имаме

$$|\lambda_1 \varphi_1(x)| \leqq \sum_{i=2}^{m-1} |\lambda_i| \, \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \tau_i \, \varkappa_i(x) .$$

Ако в това неравенство положим $x=x_1$ и вземем пред вид свойствата 1) и (2.8), получаваме

$$|\lambda_1| \leqq \frac{Sa}{\mu - a} < \frac{2Sa}{\mu} .$$

По-общо, можем да се убедим, че

$$|\lambda_k| < \frac{4^k k!\, Sa}{M}, \quad k=1, 2, \ldots, m-1. \tag{2.12}$$

Наистина нека (2.12) е вярно за $k=1, 2, \ldots, r$. Тогава

$$|\lambda_{r+1}|\, |M-a| \leq \sum_{k=1}^{r} \frac{4^k k!\, Sa}{M} (M+a) + Sa,$$

или

$$|\lambda_{r+1}| \frac{M}{2} < r \frac{4^r r!\, Sa}{M} (M+a) + Sa,$$

$$X_{r+1} < \frac{4^{r+1}(r+1)!\, Sa}{M} .$$

По-нататък ще използваме по-груба оценка от (2.12), а именно

$$|\lambda_i| \leq \frac{4^{m-1}(m-1)!\, Sa}{M}, \quad i=1, 2, \ldots, m-1,$$

която може да се напише поради (2.4) и така:

$$|\lambda_i| \leq \frac{S}{4m}, \quad i=1, 2, \ldots, m-1. \tag{2.13}$$

Аналогична оценка се получава и за τ_l. Пак от (2.10) имаме

$$\tau_l\,|\,\varkappa_l(\zeta_l)\,|\leqq\sum_{i=1}^{m-1}|\,\lambda_i\,|\,|\,\psi_i(\zeta_l)\,|+\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{m}\tau_l\,|\,\varkappa_l(\zeta_l)\,|,$$

откъдето съгласно 1), (2.8), (2.9)

$$\frac{1}{4}\tau_l M\leqq(M+a)\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i+a\sum_{i=1}^{m}\tau_i,$$

или

$$\tau_l\leqq\frac{4(M+a)m4^{m-1}(m-1)!}{M^2}Sa+Sa;$$

оттук

(2.14) $$\tau_l\leqq\frac{S}{4m},\quad l=1,2,\ldots,m.$$

От (2.13) и (2.4) обаче получаваме

$$S=\sum_{i=1}^{m-1}|\,\lambda_i\,|+\sum_{i=1}^{m}\tau_i<\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}=\frac{\delta}{2}\,.$$

И тъй направеното предположение ни доведе до противоречие. Следователно заключаваме, че $S=0$, понеже $S\geqq 0$.

Така доказахме, че в пространството L има поне $3m-1$ линейно независими елемента, следователно неговата размерност е по-голяма или равна на $3m-1$, с което теорема 2.1 е доказана.

Следствие 2.1. Ако размерността на едно линейно пространство L е по-малка от $3m-1$, за него

(2.15) $$\delta(C_\Delta,L)\geqq\frac{b-a}{2m}\,.$$

Доказателство. Щом размерността на L е по-малка от $3m-1$, съгласно теорема 2.1 ще имаме

$$\delta(C_\Delta,L)\geqq\frac{b-a}{2m}-3\delta$$

за произволно δ, $0<\delta<(b-a)/6m$, откъдето (2.15) следва веднага.

Следствие 2.2. За всяко цяло $m\geqq 1$ е в сила неравенството

(2.16) $$d_{3m-2}(C_\Delta)\geqq\frac{b-a}{2m}\,.$$

Като вземем пред вид и монотонността на редицата $\{d_n\}$, (2.16) можем да запишем и така:

(2.17) $$d_n(C_\Delta)\geqq\frac{b-a}{2\left[\frac{n+4}{3}\right]}\,.$$

§ 3. Получените в § 1 и 2 резултати могат да се резюмират в следната

Теорема 3.1. За n-тия напречник $d_n(C_\Delta)$ на C_Δ е в сила асимптотичната формула ($n\to\infty$)

$$d_n(C_\Delta)\sim\frac{3(b-a)}{2n}. \tag{3.1}$$

Трябва да се отбележи, че полученият резултат се отнася за едно линейно пространство, което обаче не е нормирано (не е банахово), защото нормата, произхождаща от разстоянието r, е равномерната норма:

$$\|f\|=r(f,0)=\max_{x\in\Delta}|f(x)|.$$

От друга страна обаче, в общия случай

$$\|f-g\|\neq r(f,g)$$

(по-точно имаме $\|f-g\|\geqq r(f,g)$, вж. [4]), поради което породеното от така дефинираната норма разстояние не съвпада с първоначално даденото. Ето защо тук не може да бъде използван общият метод за получаване на оценки отдолу, развит от В. М. Тихомиров в [3], тъй като този метод е пригоден за банахови пространства.

В [5] е изследвано отклонението на C_Δ^M (C_Δ^M е множеството на непрекъснатите функции f, дефинирани в Δ, за които $|f|\leqq M$) от H_n, дето H_n е линейното пространство на алгебричните полиноми от степен $\leqq n$. Там е доказано, че

$$\delta(C_\Delta^M, H_n)\leqq\frac{C\log n}{n},$$

дето $C=C(M,\Delta)$ е константа, и че тази оценка не може да се подобри по отношение на порядъка. При това може да се покаже, че $C(\infty,\Delta)=\infty$. Теорема 3.1 обаче показва, че има други крайномерни линейни подпространства на C_Δ, чието отклонение от C_Δ е крайно и клони към нула с растенето на n.

От друга страна, ако разглеждаме функции от C_Δ^M, редът на най-доброто приближение с алгебрични полиноми от n-та степен се отличава от реда на напречника с $\log n$.

Получените тук резултати за асимптотиката на $d_n(C_\Delta)$ могат да бъдат обобщени и за асимптотиката на $d_n(F_\Delta)$, гдето F_Δ е съвкупността от затворените точкови множества в равнината, чиито проекции върху абсцисната ос съвпадат с интервала Δ и които са y-изпъкнали, т. е. всяка права, успоредна на ординатната ос, минаваща през Δ, ги сече в изпъкнало множество.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolmogoroff, A. N. Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionsklasse. Ann. of Math., 37 (1936), 107—111.
2. Тихомиров, В. М. Об n-мерных поперечниках некоторых функциональных классов. ДАН СССР, 130 (1960), 734—738.

3. Тихомиров, В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. Успехи матем. наук, 15, 3 (1960), 81—120.
4. Сендов, Бл. и Б. Пенков. ε-ентропия и ε-капацитет на пространството от непрекъснатите функции. Известия на Мат. инст. на БАН, 6 (1962), 27—50.
5. Сендов, Бл. Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип. Год. на Соф. унив., 55, 1 — математика (1960/61), 1—39.
6. Sendov, Bl. and B. Penkov. On widths of the space of continuous functions. Compt. rend. Acad. bulg. sci., 17 (1964), 689—692.

Постъпила на 6. II. 1964 г.

О ПОПЕРЕЧНИКАХ ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Благовест Сендов и Боян Пенков

Резюме

В настоящей работе дается асимптотическая формула (3.1) для n-того поперечника $d_n(C_\Delta)$ пространства C_Δ непрерывных функций определенных на сегменте $\Delta=[a, b]$. При этом C_Δ метризовано хаусдорффовской метрикой. Без доказательств результат был опубликован в [6].

ÜBER DIE QUERSCHNITTE DES RAUMES DER STETIGEN FUNKTIONEN

Blagowest Sendov und Bojan Penkov

Zusammenfassung

Vorliegende Arbeit enthält eine asymptotische Formel (3.1) für den n-ten Querschnitt $d_n(C_\Delta)$ des Raumes C_Δ der stetigen Funktionen im abgeschlossenen Intervall $\Delta=[a, b]$. Die Metrik in C_Δ ist vom Hausdorff'schen Typ. Ohne Beweis ist das Resultat in [6] veröffentlicht worden.