БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

ОБОБЩЕНИЕ НА НИЛЗЕН-ЦЕНОВИТЕ УРАВНЕНИЯ

Благовест Долапчиев

УВОД

В една наша предишна работа [1] се спряхме на така наречените от нас „Nielsen'ови уравнения" [2] за движението на една реономна холономна материална система, които уравнения, от една страна, свързахме с принципа на Jourdain [3], като ги изведохме от него, и на които, от друга страна, дадохме Appell'ов вид и Ценов вид [4], отнасящ се и до нехолономните механични системи. В последния случай наложилото се повторение на Ценовата процедура — при която обаче намалихме с единица реда на всички срещащи се производни на кинетичната енергия и на обобщените координати, фигуриращи в уравненията на Ценов, за да може тази процедура да бъде пренесена и за уравненията на Нилзен — подсказа възможността за едно очевидно обобщение на тези уравнения. Подобен вид обобщение бе вече загатнато от Wassmuth [5], а извършено от Mangeron—Deleanu [6], но и в двата случая то не бе доведено докрай. В първия случай чрез неизбежното въвеждане на понятието „енергия на ускорението" то си остана на равнището, до което аналитичната механика бе доведена от Appell [7]; във втория случай не бе подчертана връзката между всеки от представителите на класата обобщени уравнения със съответния вариационен принцип, от който то може да бъде изведено, и с динамичните особености на механичния проблем, особено когато се касае до структурата на нехолономните връзки и закона на силите. При това в последния случай отделящото се значение на Нилзеновата форма на Лагранжовите уравнения от втори род в класата обобщени уравнения бе отминато без внимание, като само бе отбелязано неговото използване от методична гледна точка като разновидност на познатите Лагранжови уравнения и без изобщо да бе свързано с името на Нилзен (вероятно по липса на сведение за тази връзка), а като $n=1$-ви представител на споменатата класа уравнения от най-общ вид.

До обобщението на Нилзен-Ценовите уравнения ние достигнахме по два различни от приложения от авторите на [6] начини, а именно: първо, като използваме една друга, непосредствена индукция, начеваща с тъждеството, което следва от формите на Нилзен — Ценов; второ, като обобщим дедукцията на Журден до един най-общ диференциален вариационен принцип, от който да се получи и най-общата форма на диференциалните уравнения за движението на холономните и нехолономните материални системи. Както и в предната си работа [1], в последния случай на нехолономни системи ще следваме отново пътя, аналогичен на метода на Ценов.

§ 1. ИЗВЕЖДАНЕ НА ЕДНО КИНЕМАТИЧНО ТЪЖДЕСТВО

1. Ще докажем следната

Теорема. Нека е дадена функцията

$$z(x)=z(x,\ldots,y_\sigma,\ldots,y'_\sigma,\ldots),\ \sigma=1,2,3,\ldots,s, \tag{1}$$

гдето

$$y_\sigma=y_\sigma(x),\ y'_\sigma=\frac{dy_\sigma}{dx},\quad \sigma=1,2,3,\ldots,s, \tag{2}$$

и нека както функциите $y_\sigma(x)$, $\sigma=1,2,3,\ldots,s$, така и функцията $z(x)$ и нейните пълни производни относно x са произволно много пъти диференцируеми по x, съответно по $y_\sigma^{(n)}=\frac{d^ny_\sigma}{dx^n}$, $\sigma=1,2,3,\ldots,s$; $n=1,2,3,\ldots$ Тогава е в сила тъждеството

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial z}{\partial y'_\sigma}=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial y_\sigma^{(n)}}-\frac{\partial z}{\partial y_\sigma}\right),\quad z^{(n)}=\frac{d^nz}{dx^n},\quad \sigma=1,2,3,\ldots,s. \tag{3}$$

Доказателство. Чрез три последователни пълни диференцирания на функцията $z(x)$ (1) относно x получаваме

$$z'=\frac{\partial z}{\partial x}+\sum_{\varrho=1}^{s}\frac{\partial z}{\partial y_\varrho}y'_\varrho+\sum_{\varrho=1}^{s}\frac{\partial z}{\partial y'_\varrho}y''_\varrho; \tag{4}$$

$$z''=2\sum_{\varrho=1}^{s}\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y'_\varrho}y''_\varrho+2\sum_{\varrho,\sigma=1}^{s}\frac{\partial^2z}{\partial y_\varrho\partial y'_\sigma}y'_\varrho y''_\sigma \tag{5}$$

$$+\sum_{\varrho,\sigma=1}^{s}\frac{\partial^2z}{\partial y'_\varrho\partial y'_\sigma}y''_\varrho y''_\sigma+\sum_{\varrho=1}^{s}\frac{\partial z}{\partial y_\varrho}y''_\varrho+\sum_{\varrho=1}^{s}\frac{\partial z}{\partial y'_\varrho}y'''_\varrho+\cdots;$$

$$z'''=3\left(\sum_{\varrho=1}^{s}\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y'_\varrho}y'''_\varrho+\sum_{\varrho,\sigma=1}^{s}\frac{\partial^2z}{\partial y_\varrho\partial y'_\sigma}y'_\varrho y'''_\sigma+\sum_{\varrho,\sigma=1}^{s}\frac{\partial^2z}{\partial y'_\varrho\partial y'_\sigma}y''_\sigma y'''_\varrho\right) \tag{6}$$

$$+\sum_{\varrho=1}^{s}\frac{\partial z}{\partial y_\varrho}y'''_\varrho+\sum_{\varrho=1}^{s}\frac{\partial z}{\partial y'_\varrho}y^{\mathrm{IV}}_\varrho+\cdots$$

Многоточията (5) и (6) означават, че са изоставени събираемите, които не съдържат като множители производните на $y_\varrho(x)$, респективно на $y_\sigma(x)$ относно x от ред, равен или по-висок от реда на производните на функцията $z(x)$. Но освен тези събираеми не съществуват други ненаписани (заменени с точки) членове, които при едно следващо диференциране на $z(x)$ биха довели при гореспоменатото изискване до други събираеми с множители производните на $y_\sigma(x)$, респективно на $y_\varrho(x)$, от ред, не по-нисък от този на $z(x)$, освен тези, които имат същите коефициенти както (6). При това наличността на събираемото, което съдържа казаната производна от по-висок ред от реда на $z(x)$, диференцирана по x, y_ϱ и y'_ϱ, именно увеличава броя на членовете с производни на y_ϱ, респективно y_σ, равни на производната на z. Така например последният член на (6), диференциран относно x, y_ϱ и y'_ϱ, ни води точно до първите три члена в (6), с което множителят пред тях нараства от 3 на 4, и т. н. Поради горното законът за съставяне на n-тата производна $z^{(n)}(x)$ на $z(x)$ следва непосредствено от (6):

$$z^{(n)}(x)=n\left(\sum_{\varrho=1}^{s}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y'_\varrho}y_\varrho^{(n)}+\sum_{\varrho,\sigma=1}^{s}\frac{\partial^2 z}{\partial y_\sigma\partial y'_\varrho}y'_\sigma y_\varrho^{(n)}+\sum_{\varrho,\sigma=1}^{s}\frac{\partial^2 z}{\partial y'_\sigma\partial y'_\varrho}y''_\sigma y_\varrho^{(n)}\right)$$
$$\sum_{\varrho=1}^{s}\frac{\partial z}{\partial y_\varrho}y_\varrho^{(n)}+\sum_{\varrho=1}^{s}\frac{\partial z}{\partial y'_\varrho}y_\varrho^{(n+1)}+\dots \tag{7}$$

Като диференцираме, от друга страна, в (7) $z^{(n)}(x)$ частно относно $y_\varrho^{(n)}$, ще получим

$$\frac{\partial z^{(n)}}{\partial y_\varrho^{(n)}}=n\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y'_\varrho}+\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial^2 z}{\partial y_\sigma\partial y'_\varrho}y'_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial^2 z}{\partial y'_\sigma\partial y'_\varrho}y''_\sigma\right)+\frac{\partial z}{\partial y_\sigma}, \tag{8}$$

$$\varrho=1, 2, 3, \dots, s;\ n=1, 2, 3, \dots$$

Заедно с това да извършим означеното в (3) диференциране

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial z}{\partial y'_\varrho}=\frac{\partial^2 z}{\partial y'_\varrho\partial x}+\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial^2 z}{\partial y'_\varrho\partial y_\sigma}y'_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial^2 z}{\partial y'_\varrho\partial y'_\sigma}y''_\sigma,\quad \varrho=1, 2, 3, \dots, s. \tag{9}$$

От (8) и (9) очевидно следва тъждеството (3).

2. Да напишем по реда на изброяването им уравненията на Лагранж от втори род, на Нилзен [2] и на Ценов [4] в следния вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_\varkappa}=\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}+Q_\varkappa,\quad \varkappa=1, 2, 3, \dots, k, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\dot T}{\partial\dot q_\varkappa}-\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}=\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}+Q_\varkappa,\quad \varkappa=1, 2, 3, \dots, k, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\ddot T}{\partial\ddot q_\varkappa}-\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right)=\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}+Q_\varkappa,\quad \varkappa=1, 2, 3, \dots, k, \tag{12}$$

гдето, както е добре познато, с T, $\dot T$ и $\ddot T$ са означени съответно кинетичната енергия на разглежданата механична система, която в най-общия случай е функция на времето t, на обобщените координати $q_\varkappa$ и на обобщените скорости $\dot q_\varkappa$, т. е. имаме

$$T=T(t, \dots, q_\varkappa, \dots, \dot q_\varkappa, \dots),\quad \varkappa=1, 2, 3, \dots, k, \tag{13}$$

и нейните първа и втора производни dT/dt, респективно d^2T/dt^2.

От (10), (11) и (12) следват непосредствено тъждествата

$$(14)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa}=\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_\varkappa}-\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_\varkappa}-\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right),\quad \varkappa=1, 2, 3, \ldots, k,$$

които напълно наподобяват тъждеството (3), с което се оправдава написването и на най-общото кинематично тъждество

$$(15)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa}=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa}-\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right),\quad \varkappa=1, 2, 3, \ldots, k,$$

тъй като функцията $T(t)$ и нейните аргументи $q_\varkappa(t)$ и $\dot{q}_\varkappa(t)$, $\varkappa=1, 2, 3, \ldots, k$, поради аналогичния на (1) строеж на (13) отговарят на същите изисквания, на които беше подчинена функцията $z(x)$ и нейните аргументи $y_\sigma(x)$ и $y'(x)$. Двете тъждества, съдържащи се в (14), получени от динамичните равенства (10), (11) и (12), очевидно сега ще се получат от тъждеството (15) при $n=1$, $n=2$.

Въведените означения

$$\overset{(n)}{T}=\frac{d^nT}{dt^n},\quad \overset{(n)}{q}_\varkappa=\frac{d^nq_\varkappa}{dt^n}$$

ще употребяваме само при $n>3$, т.е. наред с познатите $\dot{T}$ и $\ddot{T}$ ще запазим и означението $\dddot{T}=\frac{d^3T}{dt^3}$.

В заглавието на този параграф ние въведохме термина „кинематично тъждество"; очевидно той ще се отнася до тъждеството (15). Неговият кинематичен характер се дължи на обстоятелството, че като пренебрегнем постоянните маси m_ν ($\nu=1, 2, 3, \ldots, N=$ броят на материалните точки P_ν, от които се състои разглежданата механична система), които фигурират в дефиниционния израз за кинетичната енергия

$$(16)\qquad T=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu v_\nu^2}{2},$$

последният зависи само от кинематичната величина скорост

$$v_\nu=\frac{d\,r_\nu}{dt}=\dot{r}_\nu,$$

гдето

$$(17)\qquad r_\nu=r_\nu\,(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots)$$

е радиус-векторът OP_ν, съединяващ координатното начало O с произволната точка P_ν от системата. Наистина при установяването на тъждеството (3, 15) все едно, че сме използвали не израза (16), а израза (13), в който фигурират само геометрични и кинематични величини (обобщените координати и обобщените скорости), в които в последна сметка независимата променлива е времето t. Другояче стои работата с извода на частните тъждества (14), получени от динамичните равенства (10), (11) и (12), следващи и от (15).

Но тъждеството (15) би могло да бъде наречено и динамично, като вземем под внимание, че то важи и за функцията на сили $U(t)$.

В най-общия случай, когато силовата функция зависи и от обобщените скорости $\dot{q}_\varkappa$, т. е. имаме

$$(18)\qquad U(t)=U(t,\ldots,q_\varkappa,\ldots,\dot{q}_\varkappa,\ldots),\quad \varkappa=1,2,3,\ldots,k,$$

също можем да напишем тъждеството (3)

$$(19)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\varkappa}=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial \overset{(n)}{U}}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa}-\frac{\partial U}{\partial q_\varkappa}\right),\quad \varkappa=1,2,3,\ldots,k.$$

Същото важи и за Лагранжовата функция $L=T+U$ и т. н.

§ 2. ИЗВЕЖДАНЕ НА „ОБОБЩЕНИТЕ ЛАГРАНЖОВИ УРАВНЕНИЯ"

3. Първият начин, по който достигаме до една обобщена форма на уравненията на динамиката на холономните механични системи, се основава именно на тъждеството (15). Наистина достатъчно е за целта да внесем в уравненията на Лагранж от втори род (10) израза за $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa}$ от (15); непосредствено получаваме

$$(20)\qquad \frac{1}{n}\left(\frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa}-(n+1)\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right)=Q_\varkappa,\quad \varkappa=1,2,3,\ldots,k;\quad n=1,2,3,\ldots$$

Уравненията (20), получени от уравненията (10), от една страна, вече са обусловени и от дефиниционната формула (16) за кинетичната енергия, защото тази нейна структура е използвана при извеждане на (10) чрез принципа на Даламбер. От друга страна, тези уравнения (20) — макар за никой индекс n да не водят пряко до формата (10) на Лагранж, — както се видя, следват от тях. Но ние също така показахме в [1], че едно непосредствено преобразуване на (10), състоящо се в извършване на означената операция $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa}$ в (10) и свързването ѝ със свойствата на $\dot{T}$, води до уравненията на Нилзен (11), които се получават от (15) за $n=1$.

Всичко това е достатъчно основание да наречем уравненията (20) „обобщени Лагранжови уравнения". Такива са и Ценовите уравнения (12), които се получават при $n=2$, и уравненията, следващи от (20) за $n=3$, а именно

$$(21)\qquad \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \dddot{T}}{\partial \dddot{q}_\varkappa}-4\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right)=Q_\varkappa,\quad \varkappa=1,2,3,\ldots,k,$$

и които ще играят важна роля при задачите от динамиката, където участвуват вторите ускорения $\dddot{q}_\varkappa$ (Jerk, Ruck) [8], и т. н.

Разполагането с такива „обобщени Лагранжови уравнения" в тази тяхна най-обща форма вън от другите качества, които те крият и на които ще се спрем малко по-късно, е от важно значение за динамиката, която би обхващала проблеми, в които се срещат и ускорения от произволен, по-висок ред $\overset{(n)}{q}_{\varkappa}$, $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

За практическото съставяне на тази форма на уравненията на динамиката, когато $n = 1$, е познато правилото на Schieldrop, застъпено в книгата на Nielsen [2]. Изглежда то може да се разшири и за произволно n, с което единствено строежът на функцията $\overset{(n)}{T}$ ще бъде меродавен при написването на k-те уравнения на движение на системата. Ценов [4] е прилагал нееднократно своите уравнения (12), които също така са показали изгодата от тяхното използване.

4. Доколкото ни се простират сведенията, в литературата се среща само един случай на частично обобщение на динамичните уравнения на една материална система, дължимо на Wassmuth [5]. До тях той достига, инспириран от дедукцията на Leitinger [9], извършена от последния по повод появата на принципа на Jourdain [3]. Обобщението на Васмут се отнася до Апеловите уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_{\varkappa}} = Q_{\varkappa}, \quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k, \tag{22}$$

в които с

$$S = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu w_\nu^2}{2} \quad \left(w = \frac{d^2\bar{r}_\nu}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}_\nu \right) \tag{23}$$

е означена така наречената „енергия на ускорението".

Чрез това обобщение, което Васмут спира до $n = 3$, той намери уравненията

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial \dddot{q}_{\varkappa}} = Q_{\varkappa}, \quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k, \tag{24}$$

които, явно, най-общо биха гласели

$$\frac{\partial \overset{(n)}{S}}{\partial \overset{(n+2)}{q}_{\varkappa}} = Q_{\varkappa}, \quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k. \tag{25}$$

Формата (25) е наглед по-проста от формата (20), но не трябва да се забравя, че пресмятането на енергията на ускорението S и особено на нейните производни съвсем не е лека задача. Както ще видим впрочем по-късно, на такъв прост вид, който в [1] нарекохме „Апелов вид", са пригодни и „обобщените уравнения" (20).

Накрая по аналогия на въведения по-горе термин за формата (20) да наречем формата (25) „обобщени Апелови уравнения".

§ 3. ВЪВЕЖДАНЕ НА „ОБОБЩЕНИЯ ПРИНЦИП НА ДАЛАМБЕР"

Вече изложихме [1] сведенията за едно формално съображение, което прави принципа на Журден [3]

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\bar{F}_\nu - m_\nu \bar{w}_\nu) \,.\, \delta\dot{\bar{r}}_\nu = 0, \quad \delta t = 0, \quad \delta\bar{r}_\nu = 0, \quad \delta\dot{\bar{r}} \neq 0 \tag{26}$$

равноправен с принципа на Гаус

$$(27)\qquad \sum_{\nu=1}^{N}(F_\nu - m_\nu w_\nu)\,.\,\delta\ddot{\bar r} = 0,\ \ \delta t = 0,\ \ \delta\bar r_\nu = \delta\dot{\bar r}_\nu = \bar 0,\ \ \delta\ddot r_\nu \neq 0;$$

това съображение беше приведено и използвано от Лайтингер, а именно, че както принципът на Гаус, така и принципът на Журден следват от принципа на Даламбер

$$(28)\qquad \sum_{\nu=1}^{N}(\bar F_\nu - m_\nu \bar w_\nu)\,.\,\delta\bar r_\nu = 0,\ \ \delta t = 0,\ \ \delta\bar r_\nu \neq \bar 0:$$

(26) — чрез еднократно диференциране, а (27) — чрез двукратно диференциране на (28) относно t, стига само при тези диференцирания да се държи сметка за съответните изисквания, на които трябва да отговарят срещащите се вариации; очевидно касае се до условията

$$(29)\qquad \frac{d}{dt}\,\delta r_\nu = \delta\,\frac{d\bar r_\nu}{dt},\ \ \frac{d}{dt}\,\delta\dot{\bar r}_\nu = \delta\,\frac{d\dot{\bar r}_\nu}{dt},\ \ldots,\quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, N.$$

Следвайки тази процедура, явно ние ще достигнем до един найобщ диференциален вариационен принцип

$$(30)\qquad \sum_{\nu=1}^{N}(\bar F_\nu - m_\nu \bar w_\nu)\,.\,\delta\overset{(n)}{\bar r_\nu} = 0,$$

при който аналогично на (26) и (27) имаме

$$(31)\qquad \delta t = 0,\ \ \delta\bar r_\nu = \delta r_\nu = \delta r_\nu = \cdots = \delta\overset{(n-1)}{\bar r_\nu} = \bar 0,\ \ \delta\overset{(n)}{\bar r_\nu} \neq \bar 0,\ \ \nu = 1, 2, 3, \ldots, N.$$

Поради макар формалната връзка на принципа (30) с принципа на Даламбер (28) ще го наречем „обобщен вариационен принцип на Даламбер“, от който (28) следва при $n=0$. При $n=1$ и $n=2$ от този обобщен принцип следват съответно принципът на Журден (26) и принципът на Гаус (27). Но ние ще се абстрахираме както от генезиса му, така и от механическото му тълкуване, каквото придружаваше както принципа на Даламбер, така и принципа на Гаус, като покажем и известна негова „практическа стойност“ — противно на мнението, изказано от Nordheim в [10]. С други думи, ние ще въведем диференциалния вариационен принцип (30) отнапред и излизайки от него, ще покажем как могат да бъдат изведени и най-общите уравнения на динамиката на холономните механични системи, т. е. вече изведените по друг път „обобщени уравнения на Лагранж“, тъй както уравненията на Лагранж от втори род (10) бяха изведени от принципа на Даламбер (28).

И тъй, нека (30) е в сила и при какво да е $n>2$.

За n-тата производна на радиус-вектора $\bar r_\nu$ (17) относно t намираме последователно и чрез индукция

$$(32)\qquad \dot r_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial\bar r_\nu}{\partial q_\varkappa}\,\dot q_\varkappa + \frac{\partial\bar r_\nu}{\partial t},\quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, N,$$

$$(33)\qquad \ddot{\bar r}_\nu = \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{k} \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial q_\varkappa \partial q_\lambda}\dot q_\varkappa \dot q_\lambda + 2\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial t \partial q_\varkappa}\dot q_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial \bar r_\nu}{\partial q_\varkappa}\ddot q_\varkappa + \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial t^2},$$

$$\nu = 1, 2, 3, \ldots, N,$$

а така също

$$(34)\qquad \dddot{\bar r}_\nu = 3\left(\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{k} \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial q_\varkappa \partial q_\lambda}\ddot q_\varkappa \dot q_\lambda + \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial q_\varkappa \partial t}\ddot q_\varkappa\right) + \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial \bar r_\nu}{\partial q_\varkappa}\dddot q_\varkappa + \cdots.$$

Тук ние сме изоставили членовете, в които всички срещнати множители са с ред на производната на $q_\varkappa$ по t с две единици по-нисък от тоя на $\bar r_\nu$.

Следователно можем да напишем

$$(35)\qquad \overset{(n)}{\bar r}_\nu = n\left(\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{k} \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial q_\varkappa \partial q_\lambda}\overset{(n-1)}{q}_\varkappa \dot q_\lambda + \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial q_\varkappa \partial t}\overset{(n-1)}{q}_\varkappa\right) + \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial \bar r_\nu}{\partial q_\varkappa}\overset{(n)}{q}_\varkappa + \cdots \quad n > 2.$$

Аналогично за n-тата производна на кинетичната енергия T (16) относно t намираме последователно и чрез индукция

$$(36)\qquad \dot T = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\bar r}_\nu . \ddot{\bar r}_\nu,$$

$$(37)\qquad \ddot T = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\bar r}_\nu^{\,2} + \sum_{\nu=1}^{N} \dot{\bar r}_\nu . \dddot{\bar r}_\nu,$$

а така също

$$(38)\qquad \dddot T = 3\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\bar r}_\nu . \dddot{\bar r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\bar r}_\nu . \overset{(4)}{\bar r}_\nu$$

и

$$(39)\qquad \overset{(4)}{T} = 4\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\bar r}_\nu . \overset{(4)}{\bar r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\bar r}_\nu . \overset{(5)}{\bar r}_\nu + \cdots,$$

като тук сме изоставили члена, в който множителят с ред на производните на $\bar r_\nu$ относно t е по-нисък от реда на T.

Следователно

$$(40)\qquad \overset{(n)}{T} = n\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\bar r}_\nu . \overset{(n)}{\bar r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\bar r}_\nu . \overset{(n+1)}{\bar r}_\nu + \cdots$$

От една страна, от (35) имаме релациите

$$(41)\qquad \frac{\partial \overset{(n)}{r}_\nu}{\partial \overset{(n-1)}{q}_\varkappa} = n\left(\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial q_\varkappa \partial q_\lambda}\dot q_\lambda + \frac{\partial^2 r_\nu}{\partial q_\lambda \partial t}\right), \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots, k,$$

и

$$(42)\qquad \frac{\partial \overset{(n)}{\bar r_\nu}}{\partial \overset{(n)}{q_\varkappa}}=\frac{\partial \bar r_\nu}{\partial q_\varkappa},\quad \varkappa=1,2,3,\ldots,k.$$

От друга страна, от (32) следва

$$(43)\qquad \frac{\partial \dot{\bar r}_\nu}{\partial q_\lambda}=\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial q_\varkappa \partial q_\lambda}\dot q_\varkappa+\frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial t\partial q_\lambda}.$$

Тогава от (41) и (43) намираме

$$(44)\qquad \frac{\partial \overset{(n)}{r_\nu}}{\partial \overset{(n-1)}{q_\varkappa}}=n\frac{\partial r_\nu}{\partial q_\varkappa}\qquad \varkappa=1,2,3,\ldots,k;\quad \nu=1,2,3,\ldots,N.$$

Имаме също

$$(45)\qquad \frac{\partial T}{\partial q_\lambda}=\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu r_\nu\cdot\frac{\partial \dot{\bar r}_\nu}{\partial q_\lambda},\quad \lambda=1,2,3,\ldots,k,$$

откъдето поради зависимостта (44) получаваме

$$(46)\qquad \frac{\partial T}{\partial q_\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\bar r}_\nu\cdot\frac{\partial \overset{(n)}{r_\nu}}{\partial \overset{(n-1)}{q_\varkappa}}$$

Най-после от (40) следва

$$(47)\qquad \frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \overset{(n)}{q_\varkappa}}=n\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{\bar r}_\nu\cdot\frac{\partial \overset{(n)}{r_\nu}}{\partial \overset{(n)}{q_\varkappa}}+\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\dot{\bar r}_\nu\cdot\frac{\partial \overset{(n+1)}{\bar r_\nu}}{\partial \overset{(n)}{q_\lambda}}$$

Тогава вследствие (46) намираме

$$(48)\qquad \frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \overset{(n)}{q_\varkappa}}=n\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{\bar r}_\nu\cdot\frac{\partial \overset{(n)}{\bar r_\nu}}{\partial \overset{(n)}{q_\varkappa}}+(n+1)\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}.$$

По-нататък ни предстои използването на обобщения принцип на Даламбер (30), за която цел варираме $\overset{(n)}{r_\nu}$ от (35) и вземаме под внимание релацията (42); имаме, от една страна,

$$(49)\qquad \delta \overset{(n)}{r_\nu}=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial \bar r_\nu}{\partial q_\varkappa}\delta\overset{(n)}{q_\varkappa}=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial \overset{(n)}{r_\nu}}{\partial \overset{(n)}{q_\varkappa}}\delta\overset{(n)}{q_\varkappa}.$$

От друга страна, с оглед на (49) написваме по познат начин

$$(50)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{k}\left(\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\ddot{\bar r}_\nu\cdot\frac{\partial \overset{(n)}{\bar r_\nu}}{\partial \overset{(n)}{q_\varkappa}}-\sum_{\nu=1}^{N}\bar F_\nu\cdot\frac{\partial \overset{(n)}{r_\nu}}{\partial \overset{(n)}{q_\varkappa}}\right)\delta\overset{(n)}{q_\varkappa}=0.$$

Като анулираме коефициентите пред независимите и различни от нула вариации $\delta \overset{(n)}{q}_\varkappa$, които коефициенти в динамиката означаваме с $P_\varkappa$ и $Q_\varkappa$, а в случая снабдяваме с индекса n, написваме уравненията

$$(51) \qquad P_\varkappa^{(n)} = Q_\varkappa^{(n)}, \quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Тъй като изразът $P_\varkappa^{(n)}$ не е нищо друго освен първото събираемо в дясната страна на (48), а $Q_\varkappa^{(n)}$ са обобщените сили, съответствуващи на обобщените координати $q_\varkappa$, отново намираме

$$(20) \qquad \frac{1}{n}\left(\frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa} \quad (n+1)\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right) \quad Q_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

т. е. обобщените уравнения на Лагранж като следствие от обобщения принцип на Даламбер.

Вече сме в състояние да подчертаем следните съпоставяния:

На принципа на Даламбер — съответствуват — уравненията на Лагранж

$$(28) \qquad \sum_{1}^{N}(F \quad m_\nu w_\nu)\,\delta r_\nu = 0 \qquad\qquad (10) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\varkappa} - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} = Q_\varkappa.$$

На принципа на Журден — съответствуват — уравненията на Нилзен

$$(26) \qquad \sum_{\nu=1}^{N}(F_\nu - m_\nu w_\nu).\delta \dot r_\nu = 0 \qquad\qquad (11) \qquad \frac{\partial \dot T}{\partial \dot q_\varkappa} - 2\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} = Q_\varkappa.$$

На принципа на Гаус — съответствуват — уравненията на Ценов

$$(27) \qquad \sum_{\nu=1}^{N}(F_\nu - m_\nu w_\nu).\delta \ddot r_\nu = 0 \qquad\qquad (12) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot T}{\partial \ddot q_\varkappa} - 3\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right) = Q_\varkappa.$$

На обобщения принцип на Даламбер — съответствуват — обобщените уравнения на Лагранж

$$(30) \qquad \sum_{\nu=1}^{N}(F_\nu - m_\nu w_\nu).\delta \overset{(n)}{r}_\nu = 0 \qquad\qquad (20) \qquad \frac{1}{n}\left(\frac{\partial \overset{(n)}{T}}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa} - (n+1)\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right) = Q_\varkappa.$$

При това да отбележим повторно, че от (30) за $n = 0, 1, 2$ следват съответно принципите на Даламбер (28), на Журден (26) и на Гаус (27), но от (20) за n 0 не следва уравнението на Лагранж от втори род, докато при $n = 1, 2$ следват уравненията на Нилзен и на Ценов. Обяснението за това „несъответствие“ се крие очевидно в новата форма на (20), до която уравнението (10) е доведено с помощта на тъждеството (15). Въз основа на формата (10) „новите“ уравнения започват от Нилзеновото ($n=1$) и „новите“ принципи — от тоя на Журден ($n=1$).

§ 4. РЕДУЦИРАНЕ НА ОБОБЩЕНИТЕ УРАВНЕНИЯ ДО АПЕЛОВ И ЦЕНОВ ВИД

Най-първо по твърде удачната идея на Ценов да въведем в нашите разглеждания функцията T_0, представляща кинетичната енергия, в която си мислим, че обобщените скорости не фигурират; с други думи, в която $\dot{q}_\varkappa$ са фиксирани. От формата ѝ (13) сега ще имаме

$$(52) \qquad \dot{T}_0 = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} \dot{q}_\varkappa + \frac{\partial T}{\partial t}$$

Като запазим в следващите ѝ тотални производни до n-ти ред само ония членове, които съдържат като множител само производните на $q_\varkappa$ от ред, равен на реда на T, написваме

$$(53) \qquad \ddot{T}_0 = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} \ddot{q}_\varkappa + \cdots$$

и

$$(54) \qquad \overset{(n)}{T}_0 = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} \overset{(n)}{q}_\varkappa + \cdots$$

Като диференцираме (54) частно относно $\overset{(n)}{q}_\varkappa$, достигаме до релацията

$$(55) \qquad \frac{\partial \overset{(n)}{T}_0}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa} = \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} \qquad \varkappa \quad 1, 2, 3, \ldots, k.$$

Тогава, като внесем в (20) тази зависимост, за обобщените уравнения получаваме вида

$$(56) \qquad \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa} \left[\overset{(n)}{T} - (n \quad 1) \overset{(n)}{T}_0 \right] = Q_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

С Ценов полагаме

$$(57) \qquad R_n = \frac{1}{n} \left[\overset{(n)}{T} - (n+1) \overset{(n)}{T}_0 \right],$$

откъдето уравненията (20) стават

$$(58) \qquad \frac{\partial R_n}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa} = Q_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k; \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

вид, твърде много наподобяващ на вида (22) на Апел за холономните механични системи. Наистина за $n=2$ той се обръща почти на същия вид, а именно

(59) $$\frac{\partial R_2}{\partial \ddot{q}_\varkappa}=Q_\varkappa, \quad \varkappa=1, 2, 3, \ldots, k,$$

гдето функцията

(60) $$R_2=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)$$

не е нищо друго освен енергията на ускорението S на Апел (23), като в (60) не се вземат под внимание ония членове, несъдържащи $\ddot{q}_\varkappa$, спрямо които в (59) и (22) се търсят производните на R_2, респективно на S.

Тъй като обаче формата на Апел (22) се запазва и при нехолономните механични системи, очевидно това обстоятелство е дало повод на Ценов да се спре точно на втория ред на производните на обобщените координати, а оттам и на втория ред на производната на кинетичната енергия, а не например на п ъ р в а т а производна, която форма (на Нилзен) също би ни довела до Апеловия вид

(61) $$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_\varkappa}=Q_\varkappa, \quad \varkappa=1, 2, 3, \ldots, k,$$

при

(62) $$R_1=\dot{T}-2\dot{T}_0,$$

а оттам и до пренасянето му и за нехолономните материални системи, както това ще се види малко по-долу.

Прочее най-общият вид (58) с (57) е много по-прост от Васмутовия вид (24) или (25), при който все още фигурира чуждата за механичните понятия енергия на ускорението S.

Следваща крачка, която предлежи да се направи, е „екстремирането", на което Апел подхвърля уравненията с вида (58). Наистина и сега въвеждаме новата функция

(63) $$K_n=R_n-\sum_{\varkappa=1}^{k} Q_\varkappa^{(n)} \overset{(n)}{q}_\varkappa, \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

от която получаваме при условието (58) и $\dfrac{\partial Q_\varkappa^{(n)}}{\partial \overset{(n)}{q}_\mu}=0, \quad \mu=1, 2, 3, \ldots, k,$ че

(64) $$\frac{\partial K_\varkappa}{\partial \overset{(n)}{q}_\varkappa}=0, \quad \varkappa=1, 2, 3, \ldots, k; \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

И тъй, за да се получат уравненията за движение на холономните механични системи, достатъчно е да се потърси екстремумът на функцията $K_n\left(\left[\overset{(n)}{q}_\varkappa\right]\right)$. Ценов подобно на Апел показва, че този екстремум е минимум на функцията R_2 — обстоятелство, отговарящо на най-малкото принуждение съгласно принципа на Гаус (27).

§ 5. ПРИЛОЖЕНИЕ НА АПЕЛ-ЦЕНОВИЯ ВИД ЗА НЕХОЛОНОМНИТЕ МЕХАНИЧНИ СИСТЕМИ

Екстремалната форма (64) на обобщените Лагранжови уравнения позволява удобно пренасяне на всички досегашни разглеждания и върху нехолономните материални системи, подчинени на връзки от най-общ вид. Под това ще разбираме зависимост между времето, обобщените координати, обобщените скорости и обобщените ускорения от произволен ред. При това ще се касае до неинтегруеми диференциални връзки, които са нелинейни в най-общия случай спрямо най-висшата производна на $q_\varkappa$, съдържаща се в дадената зависимост.

Ценов дълго време третираше със своите екстремни уравнения

$$\frac{\partial K_2}{\partial \ddot{q}_\varkappa}=0, \quad \varkappa=1, 2, 3, \ldots, k, \tag{65}$$

само линейните диференциални връзки. Той процедираше по следния начин. Нека е дадена зависимостта

$$\dot{q}_\varrho=\sum_{\lambda=1}^{l} a_{\varrho\lambda}\dot{q}_\lambda+a_\varrho, \quad \varrho=l+1, l+2, \ldots, l+r=k, \tag{66}$$

при която r на брой обобщени скорости поради линейността са изразени чрез l на брой такива, така че $r+l=k$ са степените на свобода на разглежданата материална система. Вследствие на това, че $a_{\varrho\lambda}$ и a_ϱ са функции само на времето и на k-те обобщени координати $q_\varkappa$, то чрез еднократно диференциране на връзката (66) и запазване в дясната страна на членовете, съдържащи само $\ddot{q}_\lambda$, се достига до

$$\ddot{q}_\varrho=\sum_{\lambda=1}^{l} a_{\varrho\lambda}\ddot{q}\;+a_\varrho, \quad \varrho=l+1, l+2, \ldots, l+r=k. \tag{67}$$

Тогава r на брой $\ddot{q}_\varrho$ в $K_2(\ddot{q}_\varkappa)$ се заместват с помощта на (67) чрез l на брой $\ddot{q}_\lambda$, откъдето сега K_2 става функция само на тях. Да я означим с K_2^*.

Сега уравненията (65) на Ценов ще приемат вида

$$\frac{\partial K_2^*}{\partial \ddot{q}_\lambda}=0, \quad \lambda=1, 2, 3, \ldots, l, \tag{68}$$

или

$$\frac{\partial K_2}{\partial \ddot{q}_\lambda}+\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\partial K_2}{\partial \ddot{q}_\varrho}\frac{\partial \ddot{q}_\varrho}{\partial \ddot{q}_\lambda}=0, \quad \varrho=l+1,\ l+2, \ldots, l+r, \tag{69}$$

т. е. поради (67) окончателно

$$\frac{\partial K_2}{\partial \ddot{q}_\lambda}+\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\partial K_2}{\partial \ddot{q}_\varrho}a_{\varrho\lambda}=0, \quad \varrho=l+1,\ l+2, \ldots, l+r, \tag{70}$$

които са търсените уравнения за нехолономните механични системи при линейни диференциални връзки, предложени от Ценов.

Но, както вече изтъкнахме на друго място [1], до по-прост резултат щяхме да достигнем при същите линейни връзки относно обобщените скорости, ако си послужехме не с уравненията на Ценов (12), (65), а с уравненията на Нилзен (10), т. е. със съответната им екстремна форма

$$\frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}_\varkappa}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial K_1^*}{\partial q_\lambda}=0, \quad \lambda=1, 2, 3, \ldots, l, \tag{71}$$

при

$$K_1=R_1-\sum_{\varkappa=1}^{k}{}' Q_\varkappa \dot{q}_\varkappa . \tag{72}$$

Прибягването до Ценовите уравнения (12), (65) или изобщо до обобщените уравнения (20), (64) е от изгода обаче тъкмо когато връзките, на които е подчинена нехолономната материална система, са **нелинейни**, т. е. когато разглежданата механична система е свързана с условия от вида

$$\Phi_\varrho^{(n-1)}(t, \ldots, q_\varkappa, \ldots, \dot{q}_\varkappa, \ldots, q_\varkappa, \ldots, \overset{(n-1)}{q_\varkappa}, \ldots)=0. \tag{73}$$

$$\varrho=1, 2, 3, \ldots, r; \quad \varkappa=1, 2, 3, \ldots, k,$$

изобщо нелинейни относно $\overset{(n-1)}{q_\varkappa}$. Чрез еднократно пълно диференциране спрямо времето обаче те стават

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial \Phi_\varrho^{(n-1)}}{\partial \overset{(n-1)}{q_\varkappa}} \overset{(n)}{q_\varkappa}+\cdots=0, \quad \varrho=1, 2, 3, \ldots, r, \tag{74}$$

т. е. се обръщат на **линейни** относно обобщените ускорения $\overset{(n)}{q_\varkappa}$ от произволен ред n, така че отново бихме могли да изразим r от тях чрез останалите $k-r=l$, или да напишем аналогичната на (66) релация

$$\overset{(n)}{q_\varrho}=\sum_{\lambda=1}^{l} a_{\varrho\lambda} \overset{(n)}{q_\lambda}+a_\varrho, \quad \varrho=l+1, l+2, \ldots, l+r, \tag{75}$$

в която $a_{\varrho\lambda}$ и a_ϱ вече съдържат и n-те производни на $q_\varkappa$.

По-нататък процедурата е същата, както това бе сторено по-горе.

Но с това ние добиваме един удобен и важен критерий за предпочитане на едно пред друго обобщено Лагранжово уравнение (20), т. е. до прибягване до точно определено n в (20) в зависимост от това, кой е най-високият ред на производната на $q_\varkappa$ в Φ_ϱ, считана нелинейна относно обобщеното ускорение от съответния ред, или, с други думи, относно производната на $q_\varkappa$ от ред, с единица по-нисък от реда n.

Например, ако връзката (73) е нелинейна само относно обобщените скорости (което в практиката е най-често срещаният случай), само тогава ще прибегнем до уравненията на Ценов (12), (65), тъй като чрез диференциране на съответния вид на Φ_ϱ спрямо t един път връзката ще стане линейна относно q_ϱ и вече е изгодно да се използват точно уравненията на Ценов, тъй както при линейни спрямо обобщените скорости връзки се използват уравненията на Нилзен. Ако пък връзката Φ_ϱ зависи нелинейно и от обобщените ускорения q_ϱ (случай също срещан в практиката), сега ще се прибегне към уравненията (21) и съответния им Апелов и Ценов вид, в които вече ще фигурират вторите ускорения $\dddot{q}_\varrho$, и т. н.

С тази важна забележка се осмислят направените обобщения и от гледна точка на прилагането им в теорията на нехолономните механични системи, което е едно ценно тяхно качество. С тяхна помощ и с помощта на горния критерий всеки проблем на аналитичната динамика, даже такъв, в който появата на обобщени ускорения от по-висок ред би била допустима, намира своето решение.

Накрая нека направим следната забележка.

Известно е, че единствено с помощта на принципа на Гаус, но не и с този на Даламбер се доказва, че произхождащите от тези принципи уравнения на динамиката определят действително истинското движение на дадена механична система. Zermello [11] е показал даже, че това е така и тогава, когато във връзката Φ е в сила и знакът неравенство.

При нашите разглеждания в края на този параграф стои открит пък въпросът за доказателството, че намерените решения, отнасящи се до нехолономните материални системи, действително съвпадат с ония решения, които следват от уравненията на Лагранж от първи род, до които води също така всеки един от въведените вариационни принципи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долапчиев, Бл. Принципът на Jourdain и уравненията на Nielsen. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **59** (1966), 71—84.
2. Nielsen, J. Vorlesungen über elementare Mechanik (übersetzt von W. Fenchel). Springer-Verlag. Berlin, 193 5.
3. Jourdain, Ph. Note on en analogue of Gauss' principle. Quarterly Journal of pure and applied mathematics, 1909.
4. Tzenoff, I. Nouvelles formes des équations différentielles du mouvement des systèmes matériels holonomes et nonholonomes. XIIIth Intern. Astronautical Congress, Varna, 1962; Об одной новой форме уравнений аналитической динамики, ДАН СССР, **89** (1953), № 1, 21—24.
5. Wassmuth, A. Studien über Jourdain's Prinzip der Mechanik. Sitzungsberichte der Akad. d. Wiss., Wien, 1919.
6. Mangeron, D & S. Deleanu. Sur une classe d'équations de la Mécanique analytique au sens de I. Tzenoff. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **15** (1962), No. 1,9—12.
7. Appell, P. Compt. rend., **129**, 1899.
8. Rašcovič, D. A contribution to the physical Reality of the second acceleration (Jerk). ZAMM, GAMM-Tagung, 1965.
9. Leitinger, R. Über Jourdain's Prinzip der Mechanik und dessen Zusammenhang mit dem verallgemeinerten Prinzip der kleinsten Wirkung. Sitzungsberichte der Akad. d Wiss., Wien, 1913.
10. Nordheim L. Die Prinzipe der Dynamik. Handb. d. Physik, **5**, 1927.
11. Zermello, E. Göttinger Nachrichten, 1899.

Постъпила на 12. VIII. 1965 г.

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ НИЛЬСЕНА — ЦЕНОВА

Благовест Долапчиев

Резюме

Вначале доказывается тождество (3), (15), с помощью которого уравнениям для реономно-голономных механических систем дается обобщенная форма (20). Эту форму мы назвали „обобщенные уравнения Лагранжа“, с одной стороны потому, что они происходят из уравнений Лагранжа второго рода, а с другой потому, что для $n=1$ они приводят к уравнениям Нильсена (11), которые не что иное как преобразованные уравнения Лагранжа.

К той же форме (20) можно прийти, если пользоваться „обобщенным принципом Даламбера — Лагранжа“ (30). Таким образом существует следующее сопоставление: принципу Даламбера соответствуют уравнения Лагранжа второго рода; принципу Журдена — уравнения Нильсена; принципу Гаусса — уравнения Ценова (12) и т. д.; обобщенному принципу Даламбера — обобщенные уравнения Лагранжа. По способу, предложенному Ценовым, обобщенной форме (20) дается представление Аппелля (58) (57), где, однако, фигурирует не энергия ускорения, а кинетическая энергия в комбинации с функцией, получаемой из кинетической энергии, если предположить обобщенные скорости фиксированными. Именно эта форма обобщенных уравнений Аппелля позволяет рассматривать и неголономные механические системы. При помощи преобразования Аппелля его уравнений в стационарную форму и применения этого преобразования к форме (58) в виде (64), дается решение проблемы неголономных механических систем и устанавливается критерий обращения к тем или другим уравнениям, или к одному или другому индексу n уравнений (20). Этот критерий формулируется так: если неинтегрируемые дифференциальные связи линейны относительно обобщенных скоростей, используются уравнения Нильсена. Если связи нелинейны относительно скоростей, они линеаризируются однократным дифференцированием относительно времени, чем становятся линейными относительно ускорений; тогда используются уравнения Ценова. Если связи нелинейны относительно обобщенных ускорений, их линеаризирование приводит к третьим производным обобщенных координат, в результате чего становится необходимым прибегать к форме (21) и т. д. Это важное свойство, которым обладают обобщенные уравнения Лагранжа, и систематический подбор, к которому они приводят в теории уравнений аналитической динамики, оправдывают их введение, несмотря на то, что появление ускорений более высокого порядка имеет только теоретическое значение. Указанный критерий, связанный с законом приложенных сил, действующих на механическую систему, дает возможность точного выбора уравнений, решающих конкретную неголономную проблему.

VERALLGEMEINERUNG DER NIELSEN-TZENOFF'SCHEN GLEICHUNGEN

Blagowest Dolaptschiew

Zusammenfassung

Es wird zunächst eine Identität (3), (15) bewiesen, mit deren Hilfe den Bewegungsgleichungen eines rheonom-holonomen mechanischen Systems eine verallgemeinerte Form (20) gegeben wird. Diese Form nannten wir „verallgemeinerte Gleichungen von Lagrange", einerseits darum, weil sie aus den Gleichungen von Lagrange zweiter Art entstanden sind, andererseits, da sie für $n=1$ zu den Nielsenschen Gleichungen (11) zurückführen, die eine Umformung der Gleichungen von Lagrange darstellen.

Zu derselben Form (20) kann man auch gelangen, wenn man das „verallgemeinerte Prinzip von d'Alembert" (30) benutzt. Es existiert nämlich folgende Zuordnung: dem Prinzip von d'Alembert entsprechen die Gleichungen von Lagrange zweiter Art; dem Prinzip von Jourdain entsprechen die Gleichungen von Nielsen (11); dem Prinzip von Gauss entsprechen die Gleichungen von Tzenoff (12) usw., dem verallgemeinerten Prinzip von d'Alembert entsprechen die verallgemeinerten Gleichungen von Lagrange. Nach einem Verfahren von Tzenoff erhält man aus der verallgemeinerten Form (20) die Appell'sche Darstellung (58) mit (57), worin jedoch nicht die Energie der Beschleunigun gen, sondern wieder die kinetische Energie auftritt. Dabei gestatten die verallgemeinerten Gleichungen (58) die Behandlung auch der nichtholonomen materiellen Systeme. Durch das Appell'sche Extremisieren der Gleichungen (58) in (64) erhält man nach einem Verfahren von Tzenoff die Lösung auch des nichtholonomen Problems und zwar so, dass man ein Kriterium aufstellt, nämlich: man benutzt die einen oder die anderen von den verallgemeinerten Gleichungen (20), (58) (von einem genau ausgewählten Index n) in Abhängigkeit davon, welche die kinematischen Charakteristiken der Bindungsfunktion sind. Z. B., bei linearen nicht differenzierbaren Bindungen nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten benutzt man die Form von Nielsen; wenn sie nicht linear sind, oder wenn sie linear sind nach den verallgemeinerten Beschleunigungen, benutzt man die Form von Tzenoff; wenn sie aber nicht linear nach den Beschleunigungen sind, benutzt man die Form (21), usw.

Die leztere wichtige Eigenschaft, welche die verallgemeinerten Gleichungen kennzeichnet und die systematische Übersicht, welche damit gewonnen wird, rechtfertigt ihre Einführung in die analytische Mechanik, obwohl die betrachtete Erweiterung der Verallgemeinerungen einen mehr theoretischen Wert hat.