БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

НЯКОИ ГЕОМЕТРИЧНИ ТЪЛКУВАНИЯ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ ИНВАРИАНТИ ОТ ВТОРИ РЕД НА ТРИПАРАМЕТРИЧНИТЕ СЪВКУПНОСТИ ОТ ПРАВИ В P_4

Иванка Иванова-Каратопраклиева

В работата [4] е построен каноничен репер на трипараметричните трифокусни съвкупности M_3 от прави в четиримерното комплексно проективно пространство и съответно в реалното, когато и трите фокуса са реални. След подходяща нормировка на върховете на репера за диференциалните форми от първи ред се получават връзките

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} &\omega_1^5=0,\\ &\omega_2^3=0,\\ &\omega_2^5=\omega_1^4+\omega_2^4; \end{aligned}$$

$$\text{(II)}\qquad \begin{array}{cc} \omega_2^1=\omega_1^3, & -\omega_3^5=\delta\omega_1^3+\lambda\omega_1^4, \\ -\omega_5^3=\alpha\omega_1^4+\beta\omega_2^4, & \omega_1^2-\omega_4^5=\lambda\omega_1^3+\mu\omega_1^4+\omega_2^4, \\ -\omega_4^3-\omega_5^3=\beta\omega_1^4+\gamma\omega_2^4; & \omega_1^2=\omega_1^4+\omega_2^4; \\ & \omega_3^4=\nu\omega_1^3+(a-\lambda)\omega_1^4+a\omega_2^4, \\ \multicolumn{2}{c}{-\omega_2^1-\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4=(a-\lambda)\omega_1^3+b\omega_1^4+(\mu+b)\omega_2^4,} \\ \multicolumn{2}{c}{-\omega_1^2-\omega_4^5+\omega_4^4-\omega_5^5+\omega_5^4=a\omega_1^3+(\mu+b)(\omega_1^4+\omega_2^4),} \end{array}$$

където формите ω_1^3, ω_1^4 и ω_2^4 са приети за базисни. От (I) и (II) се вижда, че диференциалната околност от първи ред на произволна права p от M_3 не притежава нито една диференциална инварианта, а диференциалната околност от втори ред се характеризира с девет диференциални инварианти: α, β, γ, δ, λ, μ, ν, a, b. В настоящата работа ще дадем някои геометрични тълкувания на тези инварианти посредством двойни отношения на точки или равнини, свързани с някои забележителни еднопараметрични подсъвкупности на M_3.

Произволно еднопараметрично подмногообразие на M_3 се задава с две линейни връзки между базисните форми, а произволно двупараметрично подмногообразие — с една. Ако разглеждаме базисните форми ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4 като текущи хомогенни точкови координата в проективна двумерна равнина, еднопараметричните подмногообразия ще се изобразяват в точки, а двупараметричните — в прави. Развиваемите еднопараметрични подсъвкупности (подмногообразия)

(1) $$\omega_1^3=0, \quad \omega_1^4=0,$$

(2) $$\omega_1^4=0, \quad \omega_2^4=0,$$

(3) $$\omega_1^3=0, \quad \omega_1^4+\omega_2^4=0,$$

ще се изобразят съответно в точките $B_1(0, 0, 1)$, $B_2(1, 0, 0)$, $B_3(0, 1, -1)$, а двупараметричните подмногообразия

(a) $$\omega_1^4=0,$$

(b) $$\omega_1^3=0,$$

(c) $$\omega_1^4+\omega_2^4=0,$$

които съдържат съответно развиваемите подсъвкупности (1) и (2), (1) и (3), (2) и (3), ще се изобразят в правите B_1B_2, B_1B_3 и B_2B_3. Двупараметричните подмногообразия (a), (b), (c) аналогично на [2] ще наричаме конгруенции. Това са единствените конгруенции, които притежава съвкупността M_3. В общия случай те са нехолономни, т. е. съответните им уравнения не са напълно интегруеми [3].

Ще означаваме за краткост първата, втората и третата фокални хиперповърхнини на M_3 съответно с (A_1), (A_2), (A_1+A_2). Да потърсим уравненията на техните асимптотични линии. Според построения каноничен репер в [4] допирателната хиперравнина към хиперповърхнината (A_1) е $A_1A_2A_3A_4$, т. е.

(4) $$dA_1=\omega_1^1A_1+\omega_1^2A_2+\omega_1^3A_3+\omega_1^4A_4.$$

Ако една линия върху хиперповърхнината (A_1) е асимптотична, то за нея е изпълнено $(A_1A_2A_3A_4d^2A_1)=0$ [1], откъдето, като вземем пред вид (I) и (II), получаваме

(5) $$-\delta(\omega_1^3)^2+(2-\mu)(\omega_1^4)^2+(\omega_2^4)^2-2\lambda\omega_1^3\omega_1^4+2\omega_1^4\omega_2^4=0.$$

Обратно, ако една линия удовлетворява (5), то за нея $(A_1A_2A_3A_4d^2A_1)=0$, т. е. тя е асимптотична. По същия начин за уравненията на асимптотичните линии върху хиперповърхнините (A_2) и (A_1+A_2) получаваме съответно

(6) $$(\omega_1^3)^2-a(\omega_1^4)^2-\gamma(\omega_2^4)^2-2\beta\omega_1^4\omega_2^4=0,$$

(7) $$(\delta+\nu)(\omega_1^3)^2+2a\omega_1^3\omega_1^4+(b+\mu+2)(\omega_1^4)^2+(1+\mu+b)(\omega_2^4)^2+2a\omega_1^3\omega_2^4$$
$$+2(1+\mu+b)\omega_1^4\omega_2^4=0.$$

В проективната равнина уравненията (5), (6) и (7) представят криви от втора степен. Произволна еднопараметрична подсъвкупност на M_3 сече фокалните хиперповърхнини в линии, които имат уравненията на еднопараметричната подсъвкупност. Следователно образите на тези три линии в проективната равнина ще съвпадат с образа на еднопараметричната подсъвкупност, която ги поражда. Една асимптотична линия върху коя да е фокална хиперповърхнина ще се изобрази в онази точка от съответната крива в проективната равнина, в която се изобразява пораждащата я еднопараметрична съвкупност. Две линии върху хиперповърхнината (A_1) са спрегнати, ако за тях се анулира полярната форма

$$(5') \qquad -\delta\omega_1^3\overline{\omega}_1^3+(2-\mu)\omega_1^4\overline{\omega}_1^4+\omega_2^4\overline{\omega}_2^4-\lambda(\omega_1^3\overline{\omega}_1^4+\omega_1^4\overline{\omega}_1^3)+\omega_1^4\overline{\omega}_2^4+\omega_2^4\overline{\omega}_1^4=0$$

на (5), т. е. ако съответните им точки в проективната равнина са спрегнати относно кривата (5). В този случай за пораждащите ги еднопараметрични подсъвкупности ще казваме, че са спрегнати спрямо хиперповърхнината (A_1). Очевидно на дадена линия (еднопараметрична съвкупност) съответствуват ∞^1 линии (еднопараметрични подсъвкупности), спрегнати с нея, а на две — точно една. Спрегнатите еднопараметрични подсъвкупности спрямо хиперповърхнината (A_1) на дадена еднопараметрична подсъвкупност L принадлежат на едно, в общия случай, нехолономно, двупараметрично подмногообразие на M_3, което ще наричаме спрегнато на L спрямо хиперповърхнината (A_1). От (5′) се вижда, че върху хиперповърхнината (A_1) първата главна линия е спрегната и с втората, и с третата главна линия, т. е. развиваемата подсъвкупност (1) е спрегната спрямо хиперповърхнината (A_1) с нехолономната конгруенция (c). От (5′) се вижда също, че втората и третата развиваеми еднопараметрични подсъвкупности са тогава и само тогава спрегнати спрямо хиперповърхнината (A_1), когато $\lambda=0$. Лесно се проверява, че в този случай конгруенцията (c) е холономна, т. е. уравнението (c) е напълно интегруемо. Очевидно в този случай $\triangle B_1B_2B_3$ е полярен за кривата (5).

Подобни разглеждания за втората фокална хиперповърхнина (A_2) показват, че втората главна линия е спрегната с първата и третата главна линия. Следователно развиваемата еднопараметрична подсъвкупност (2) е спрегната спрямо хиперповърхнината (A_2) с нехолономната конгруенция (b). Първата и третата развиваеми еднопараметрични подсъвкупности са спрегнати спрямо хиперповърхнина (A_2) тогава и само тогава, когато $\beta=\gamma$. В този случай се оказва, че конгруенцията (b) е холономна, а $\triangle B_1B_2B_3$ е полярен за кривата (6).

И накрая върху третата фокална хиперповърхнина (A_1+A_2) третата главна линия е спрегната и с първата, и с втората главна линия, а първата и втората са спрегнати тогава и само тогава, когато $a=0$. В този случай конгуренцията (a) е холономна и в проективната равнина $\triangle B_1B_2B_3$ е полярен за кривата (7).

Следователно, ако за трипараметричната съвкупност M_3 са изпълнени условията

$$(8) \qquad \lambda=0, \quad \beta=\gamma, \quad a=0,$$

то: 1) всяка една от развиваемите еднопараметрични подсъвкупности е спрегната спрямо трите фокални хиперповърхнини с конгруенцията, съдържаща останалите две развиваеми еднопараметрични подсъвкупности, а в проективната равнина $\triangle B_1B_2B_3$ е полярен за всяка от кривите (5), (6) и (7); 2) всяка от конгуренциите (a), (b), (c) е холономна.

Ако някоя от квадратичните форми (5), (6), (7) има ранг две, т. е.

(9) $\delta(\mu - 1) - \lambda^2 = 0$ за (5),

(10) $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$ за (6),

(11) $(1 + \mu + b)(\delta + \nu) - a^2 = 0$ за (7),

то съответната ѝ крива от втора степен се разпада на две различни прави с една особена точка. На тази особена точка съответствува върху съответната хиперповърхнина особена линия, която е спрегната с всяка друга линия.

От квадратичните форми (5), (6), (7) се вижда, че: 1) първата главна линия върху хиперповърхнината (A_1) не е асимптотична, а втората и третата са асимптотични тогава и само тогава, когато съответно $\delta = 0$ и $1 - \mu = 0$; 2) втората главна линия върху хиперповърхнината (A_2) не е асимптотична, а първата и втората са асимптотични тогава и само тогава, когато съответно $\gamma = 0$, $\alpha + \gamma - 2\beta = 0$; 3) третата главна линия върху хиперповърхнината $(A_1 + A_2)$ не е асимптотична, а първата и втората са асимптотични тогава и само тогава, когато съответно $1 + \mu + b = 0$ и $\delta + \nu = 0$.

В общия случай кои да е две от кривите (5), (6) и (7) имат наймного четири общи точки и един общ поляреи триъгълник. Следователно в общия случай за кои да е две фокални хиперповърхнини съществуват четири еднопараметрични подсъвкупности, които ги секат в асимптотични линии, и три еднопараметрични подсъвкупности, всеки две от които са спрегнати относно тези две фокални хиперповърхнини. Освен това всяка от правите B_iB_j, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$ има по две пресечни точки с всяка от кривите (5), (6) и (7). Всичко ще има 18 такива точки, на които в M_3 съответствуват еднопараметрични подсъвкупности, пораждащи асимптотични линии върху една или друга фокална хиперповърхнина. На всяка права B_iB_j съответствува спрямо кривите (5), (6) и (7) по един полюс, единият от които е B_k, $k \neq i, j$. По този начин в M_3 се получават още 6 забележителни еднопараметрични посъвкупности. Може да се отбележат и други забележителни еднопартметрични и двупараметрични подмногообразия на съвкупността M_3, но ние няма да се спираме върху това.

Съвкупността от тангентите към асимптотичните линии върху фокалната хиперповърхнина (A_1) ще наричаме асимптотичен конус A_1. Аналогично ще имаме асимптотичен конус A_2 и асимптотичен конус $A_1 + A_2$. Хармонично спрегнатата точка $A_1 - A_2$ на третия фокус $A_1 + A_2$ спрямо другите два фокуса A_1 и A_2 ще опише една хиперповърхнина, която за краткост ще означаваме $(A_1 - A_2)$. Развиваемите еднопараметрични подсъвкупности (1), (2) и (3) я секат в три линии. От

(12) $$d(A_1 - A_2) = \Gamma(A_1 - A_2) + \omega_1^3(-2A_2 + A_3) + \omega_1^4(3A_1 + A_4 - A_5) + \omega_2^4(2A_1 - A_4 - A_5)$$

се вижда: 1) подсъвкупността (1) сече хиперповърхнината $(A_1 - A_2)$ в линия, чиято допирателна в точката $A_1 - A_2$ сече правите $A_1A_4 + A_5$ и $A_2A_4 + A_5$ съответно в точките

(13) $$M_1 = 2A_1 - (A_4 + A_5), \quad M_2 = 2A_2 - (A_4 + A_5);$$

2) подсъвкупността (2) сече хиперповърхнината (A_1-A_2) в линия, чиято допирателна в точката A_1-A_2 пресича правите A_1A_3 и A_2A_3 съответно в точките

(14) $$N_1=-2A_1+A_3,\quad N_2=-2A_2+A_3,$$

и 3) подсъвкупността (3) сече хиперповърхнината (A_1-A_2) в линия, чиято допирателна в точката A_1-A_2 пресича правите A_1A_4 и A_2A_4 съответно в точките

(15) $$P_1=A_1+2A_4,\quad P_2=A_2+2A_4.$$

От (4) се вижда, че правата A_2A_3 пробожда асимптотичния конус A_1 в точките, които лежат върху допирателните на онези асимптотични линии върху хиперповърхнината (A_1), за които $\omega_1^4=0$. От (5) получаваме, че тези асимптотични линии $L_{1,2}$ имат уравнения

(16) $$\begin{aligned}\omega_1^4&=0,\\ \omega_2^4&=\pm\sqrt{\delta}\,\omega_1^3,\end{aligned}$$

а прободните точки са

(17) $$Q_{1,2}=\pm\sqrt{\delta}\,A_2+A_3.$$

Очевидно (16) са уравнения на онези еднопараметрични подсъвкупности, принадлежащи на конгруенцията (a), които секат хиперповърхнината (A_1) в асимптотични линии. Образите им в проективната равнина са пресечните точки на правата B_1B_2 с кривата (5). Ако за съвкупността $M_3\delta$ е нула, то B_1B_2 ще се допира до кривата (5) в точката B_2 и единствената еднопараметрична подсъвкупност, принадлежаща на (a), която ще сече хиперповърхнината (A_1) в асимптотични линии, ще бъде (2). В този случай правата A_2A_3 ще се допира до асимптотичния конус A_1 в точката A_3. Разглеждаме двойното отношение $D_1=(A_2A_3N_1Q_2)$. От (14) и (17) получаваме $D_1=\sqrt{\delta}/2$, откъдето

(18) $$\delta=4D_1^2.$$

Съвкупностите

$$L_{3,4}:\quad\begin{aligned}\omega_1^3&=0,\\ \omega_2^4&=(-1\pm\sqrt{\mu-1})\omega_1^4\end{aligned}$$

пресичат хиперповърхнината (A_1) в онези асимптотични линии, в чиито допирателни правата A_2A_4 пробожда асимптотичния конус (A_1). Прободните точки са

(19) $$Q_{3,4}=\pm\sqrt{\mu-1}\,A_2+A_4.$$

Очевидно, ако $\mu=1$, то A_2A_4 ще се допира до асимптотичния конус A_1 в точката A_4, съвкупностите $L_{3,4}$ ще съвпадат с (3), а правата B_1B_3 ще се допира до кривата (5) в точката B_3. От (15) и (19) получаваме

$$D_2=(A_2A_4P_2Q_3)=2\sqrt{\mu-1},$$

откъдето

$$\mu=1+\frac{D_2^2}{4} \tag{20}$$

От равенството

$$dA_3=\omega_1^3A_1+\omega_2^2A_2+\omega_2^4A_4+(\omega_1^4+\omega_2^4)A_5 \tag{21}$$

и от (6) намираме прободните точки

$$Q_{5,6}=\pm\sqrt{a+\gamma-2\beta}A_1-A_4 \tag{22}$$

на A_1A_4 с асимптотичния конус A_2. Те лежат на допирателните към асимптотичните линии, породени от еднопараметричните подсъвкупности

$$L_{5,6}:\quad \begin{aligned}&\omega_1^4+\omega_2^4=0,\\ &\omega_1^3=\pm\sqrt{a+\gamma}-2\beta\omega_1^4.\end{aligned}$$

Ако $a+\gamma-2\beta=0$, то A_1A_4 ще се допира до асимптотичния конус A_2 в точката A_4, съвкупностите $L_{5,6}$ ще съвпадат с (3) и това ще бъде единствената еднопараметрична подсъвкупност на конгруенцията (с), която сече хиперповърхнината (A_2) в асимптотична линия, и правата B_2B_3 ще се допира до кривата (6) в точката B_3. От (15) и (22) намираме

$$D_3=(A_1A_4P_1Q_5)=-2\sqrt{a+\gamma-2\beta}. \tag{23}$$

Аналогично намираме прободните точки

$$Q_{7,8}=\pm\sqrt{\gamma}A_1+A_4+A_5 \tag{24}$$

на правата $A_1A_4+A_5$ с асимптотичния конус A_2. Те лежат върху допирателните на онези асимптотични линии върху хиперповърхнината (A_2), които се пораждат от еднопараметричните подсъвкупности

$$L_{7,8}:\quad \begin{aligned}&\omega_1^4=0,\\ &\omega_1^3=\pm\sqrt{\gamma}\omega_2^4.\end{aligned}$$

От уравненията на $L_{7,8}$ е ясно, че те принадлежат на конгруенцията (а). Очевидно, ако $\gamma=0$, то $L_{7,8}$ ще съвпадат с (1), правата $A_1A_4+A_5$ ще се допира до конуса A_2 в A_4+A_5, а B_1B_2 ще се допира до кривата (6) в точката B_1. Разглеждаме двойното отношение $D_4=(A_1A_4+A_5M_1Q_8)$. От (13) и (24) намираме, че $D_4=\sqrt{\gamma}/2$, откъдето получаваме

$$\gamma=4D_4^2. \tag{25}$$

Да направим подобни изследвания и за асимптотичния конус A_1+A_2. От

$$d(A_1+A_2)=\Gamma_1(A_1+A_2)+\omega_1^4A_1+\omega_1^3A_3+(\omega_1^4+\omega_2^4)(A_4+A_5) \tag{26}$$

и (7) намираме, че правата $A_1A_4+A_5$ пробожда асимптотичния конус A_1+A_2 в точките

(27) $$Q_{9,10}=A_1\pm\frac{\sqrt{-1-\mu-b}}{1+\mu+b}(A_4+A_5).$$

Те лежат върху допирателните на асимптотичните линии, породени от подсъвкупностите

$$L_{9,10}:\quad \begin{aligned} &\omega_1^3=0,\\ &\omega_2^4=-1\pm\frac{\sqrt{-1-\mu-b}}{1+\mu+b}\,\omega_1^4 \end{aligned}$$

на конгруенцията (b). Ако $1+\mu+b=0$, то $A_1A_4+A_5$ ще се допира до конуса A_1+A_2 в точката A_4+A_5, подсъвкупностите $L_{9,10}$ ще съвпадат с (3) и B_1B_3 ще се допира до (7) в B_3. От равенствата (13) и (27) намираме

(28) $$D_5=(A_1A_4+A_5M_1Q_9)=-\frac{1}{2}\sqrt{-1-\mu-b},$$

откъдето, като използваме (20), за диференциалната инварианта b получаваме израза

(29) $$b=-2-\frac{1}{2}D_2^2-4D_5^2.$$

Накрая за прободните точки $Q_{11,22}$ на A_1A_3 с асимптотичния конус A_2 намираме

(30) $$Q_{11,12}=\pm\sqrt{\delta+\nu}\,A_1+A_3,$$

откъдето се вижда, че ако $\delta+\nu=0$, то A_1A_3 ще се допира до конуса A_2 в точката A_3, а съответните еднопараметрични подсъвкупности

$$L_{11,12}:\quad \begin{aligned} &\omega_1^4+\omega_2^4=0,\\ &\omega_1^4=\pm\sqrt{\delta+\nu}\,\omega_1^3 \end{aligned}$$

ще съвпадат с (2). В този случай правата B_2B_3 ще се допира до кривата (7) в B_2. От (14) и (30) пресмятаме двойното отношение

(31) $$D_6=(A_1A_3N_1Q_{11})=-\frac{\sqrt{\delta+\nu}}{2}$$

Като вземем пред вид (18), за диференциалната инварианта ν от равенството (31) получаваме

(32) $$\nu=4D_6^2-4D_1^2.$$

Еднопараметричната подсъвкупност

$$L_{13}:\quad \begin{aligned} &\omega_1^3=0,\\ &\beta\omega_1^4+\gamma\omega_2^4=0 \end{aligned}$$

пресича хиперповърхнината (A_2) в спрегнатата линия на първата и втората главна линия. Допирателната в точката A_1 към пресечната линия на L_{13} с хиперповърхнината (A_1) пресича правата A_2A_4 в точката

(33) $$Q_{13} = \frac{\gamma-\beta}{\gamma} A_2 + A_4.$$

От равенствата (15) и (33) намираме

(34) $$D_7 = (A_2 A_4 P_2 Q_{13}) = \frac{2(\gamma-\beta)}{\gamma},$$

откъдето като вземем пред вид израза за γ от (25), получаваме

(35) $$\beta = 2D_4^2(2-D_7).$$

С помощта на (23), (25) и (35) намираме за диференциалната инварианта a следното геометрично тълкуване:

(36) $$a = \frac{D_3^2}{4} + 4D_4^2(1-D_7).$$

Еднопараметричната подсъвкупност

$$L_{14} \quad \begin{array}{l} \omega_1^4 + \omega_2^4 = 0, \\ \delta\omega_1^3 + \lambda\omega_1^4 = 0 \end{array}$$

пресича фокалната хиперповърхнина (A_1) в спрегнатата линия на първата и втората главна линия, т. е. L_{14} е спрегната на конгруенцията (b) спрямо хиперповърхнината (A_1). L_{14} пресича хиперповърхнината (A_1+A_2) в линия, чиято допирателна в точката A_1+A_2 пресича правата A_1A_3 в точката

$$Q_{14} = -\frac{\delta}{\lambda} A_1 + A_3.$$

От двойното отношение $D_8 = (A_1 A_3 N_1 Q_{14}) = \frac{\delta}{2\lambda}$ и (18) намираме

(37) $$\lambda = \frac{2D_1^2}{D_8}.$$

Накрая да разгледаме спрегнатата съвкупност

$$L_{15}: \quad \begin{array}{l} \omega_1^4 = 0, \\ \omega_2^4 = -\dfrac{\delta+\nu}{a}\omega_1^3 \end{array}$$

на конгруенцията (c) относно хиперповърхнината (A_1+A_2). Допирателната в точката A_1 към пресечната линия на L_{15} с хиперповърхнината (A_1) пресича правата A_2A_3 в точката $Q_{15} = -\frac{\delta+\nu}{a} A_2 + A_3$. От двойното отношение $D_9 = (A_2 A_3 N_2 Q_{15}) = \frac{\delta+\nu}{2a}$ и (31) намираме

(38) $$a = \frac{2D_6^2}{D_9}.$$

Изразите (18), (20), (25), (29), (32), (35), (36), (37) и (38) дават геометрични тълкувания на диференциалните инварианти от втори ред на съвкупността M_3. Разбира се, биха могли да се намерят и други геометрични тълкувания на същите инварианти. Например да разгледаме подсъвкупността

$$L_{16}:\quad \begin{aligned} &\omega_1^4+\omega_2^4=0,\\ &(\mu-1)\omega_1^4+\lambda\omega_1^3=0, \end{aligned}$$

която е спрегната относно (A_1) на конгруенцията (b). Нека η_1 и η_2 са допирателните равнини към L_{14} и L_{16} в точката A_1, а ξ_2 и ξ_3 са допирателните равнини кък развиваемите подсъвкупности (2) и (3). Прободните точки на η_1 и η_2 с A_3A_4 са съответно

$$(39)\qquad \begin{aligned} &Q'_{14}=-\frac{\lambda}{\delta}A_3+A_4,\\ &Q_{16}=\frac{1-\mu}{\lambda}A_3+A_4. \end{aligned}$$

Тогава $D=(\xi_2\xi_3\eta_1\eta_2)=(A_3A_4Q'_{14}Q_{16})=\frac{(-1+\mu)\delta}{\lambda^2}$, откъдето, като използваме (18) и (20), получаваме следното ново геометрично тълкуване за диференциалната инварианта λ:

$$(40)\qquad \lambda=\frac{D_1D_2}{D}.$$

По подобен начин може да се намерят и други геометрични тълкувания.

Ако потърсим прободните точки $Q_{17,18}$ на правата A_3A_4 с асимптотичния конус A_1, ще получим

$$(41)\qquad Q_{17,18}=\frac{\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\delta\mu+\delta}}{\delta}A_3-A_4,$$

откъдето следва, че ако квадратичната форма (5) има ранг две, т. е. изпълнено е (9), правата A_3A_4 се явява допирателна към асимптотичния конус A_1. Аналогично се показва, че ако са изпълнени (10) и (11), правите A_4A_5 и $A_3A_4+A_5$ се явяват допирателни съответно към асимптотичните конуси A_2 и A_1+A_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan, E. Oeuvres complètes, partie III, v. 1.
2. Карапетян, С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (I). Известия АН АССР, 15 (1962), № 2.
3. Щербаков, Р. Н. О методе репеража подмногообразий. Труды Том. гос. ун-та, 168 (1963), в. 3.
4. Иванова-Каратопраклиева, Ив. Каноничен репер на трипараметричните съвкупности от прави в четиримерното проективно пространство. Известия на Мат. инст. на БАН, 9 (1966), 275—294.

Постъпила на 24. 12. 1965 г.

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЛКОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СОВОКУПНОСТЕЙ ПРЯМЫХ В P_4

Иванка Иванова-Каратопраклиева

Резюме

В работе формулами (18), (20), (25), (29), (32), (35), (36), (37), (38) и (40) даются геометрические толкования дифференциальных инвариантов второго порядка трехпараметрических совокупностей M_3 прямых в P_4. Использованы некоторые специальные однопараметрические семейства совокупности M_3, находящиеся в существенной связи с асимптотическими линиями фокальных гиперповерхностей.

CERTAIN GEOMETRICAL INTERPRETATIONS OF THE SECOND-ORDER DIFFERENTIAL INVARIANTS OF THE THREE-PARAMETRICAL SETS OF STRAIGHT LINES IN P_4

Ivanka Ivanova-Karatopraklieva

Summary

Using the formulae (18), (20), (25), (29), (32), (35), (36), (37), (38), and (40), geometrical interpretations have been given of the second-order differential invariants of the three-parametrical sets M_3 of straight lines in P_4. Use has been made of certain remarkable one-parametrical subsets of M_3 which are in a substantial relation with the asymptotic lines of the focal hypersurfaces.