

## ОБТИЧАНЕ НА ЗАКРЪГЛЕНИ ОБРАТНИ КОНУСИ СЪС СВРЪХЗВУКОВА СКОРОСТ

Запрян Запрян

При летене с големи свръхзвукови скорости летателните апарати имат като правило закръглени аеродинамични форми. Във връзка с това възниква задачата за определяне на техните аеродинамически характеристики, необходими при пресмятане траекторията на полета, топлопредаването и др.

От математична гледна точка това е една сложна задача, на която в последно време се отделя голямо внимание; разработват се и различни числени методи за нейното решение с използване на електронно-сметачни машини.

При обтичането на тела с отдалечена ударна вълна в полето на течението имаме две области — дозвукова и свръхзвукова. В много случаи в дозвуковата и околосзвуковата област успешно се прилага методът на Теленин [1, 2].

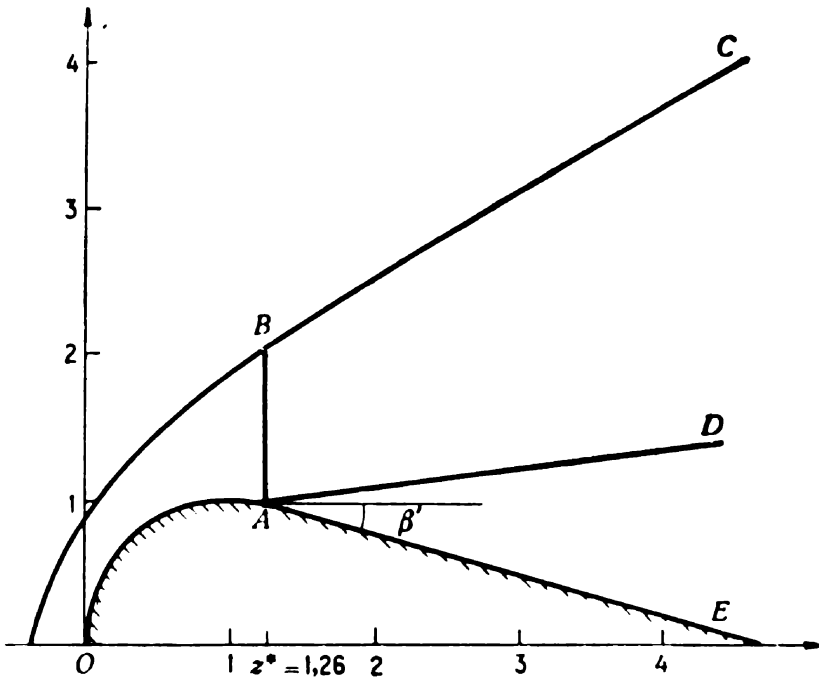
В [5] бе предложен метод за намиране на газодинамическите функции в свръхзвуковата област при обтичане на тела, по чийто контур нямаме прекъсване на кривината. В настоящата статия този метод е разработен и за случая на обтичане на ососиметрични тела, в които имаме прекъсване на кривината. По-специално той е приложен за обтичане на сфера с присъединен конус (вж. фиг. 1).

### § 1. ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ НА ОСОСИМЕТРИЧНОТО СТАЦИОНАРНО ДВИЖЕНИЕ НА ГАЗОВЕТЕ, ХАРАКТЕРИСТИКИ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИ СЪОТНОШЕНИЯ

Неизотропното ососиметрично движение на газовете в меридианната равнина се описва от нелинейната система диференциални уравнения

$$(1,1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (r\varrho u) + \frac{\partial}{\partial r} (r\varrho v) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{w}{2} \right)^2 - v \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{2} \right)^2 + u \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ u \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\varrho x} \right) + v \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\varrho x} \right) &= 0, \end{aligned}$$

където  $z$  и  $r$  са декартови координати, като оста  $Oz$  е насочена по оста на симетрия на течението,  $w^2 = u^2 - v^2$  е скоростта на движение,  $p$  — налягането,  $\rho$  — плътността и  $\kappa$  — показател на адиабатата на Хюгионо.



Фиг. 1

Ако означим с  $\theta$  ъгъла, които сключва скоростта  $\vec{w}$  с оста  $Oz$ , в свръхзвуковата област на течението уравненията на характеристиките и характеристическите съотношения на тази система се записват така:

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_1 = \operatorname{tg}(\theta + \alpha),$$

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_2 = \operatorname{tg}(\theta - \alpha),$$

(1,2)

$$d\theta - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{w} dw = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\kappa - 1} d \ln S - \frac{\sin \theta \sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)} \frac{dr}{r},$$

$$d\theta + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{w} dw = -\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\kappa - 1} d \ln S + \frac{\sin \theta \sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)} \frac{dr}{r}$$

Тук  $S = \frac{p}{\rho \kappa}$  и  $\alpha = \arcsin \frac{w}{a}$

Да въведем променливите

$$\delta = \operatorname{tg} \frac{\theta}{4}, \quad \beta = \sqrt{M^2 - 1} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

тогава от

$$\frac{dr}{dz} = \operatorname{tg}(\theta + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \theta \operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \theta}$$

и

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\alpha \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{4\delta(1 - \delta^2)}{(1 - \delta^2)^2 - 4\delta^2}$$

следва, че уравнението на първото семейство характеристики ще бъде

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\beta \frac{4\delta(1 - \delta^2)}{(1 - \delta^2)^2 - 4\delta^2} + 1}{\beta - \frac{4\delta(1 - \delta^2)}{(1 - \delta^2)^2 - 4\delta^2}} = \frac{\beta A + B}{\beta B - A},$$

където

$$A = \delta(1 - \delta^2), \quad B = \left(\frac{1 - \delta^2}{2}\right)^2$$

Вземайки под внимание направените предположения за течението и равенствата

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\beta}{1 + \beta^2},$$

$$\frac{\sin \theta \sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \theta + 1} = \frac{A}{\beta A + B},$$

първото характеристическо съотношение може да се преобразува във вида

$$\frac{4}{1 + \delta^2} d\delta + \frac{\beta}{\varrho w^2} dp + \frac{A}{r(\beta A + B)} dr = 0.$$

Аналогично се преобразува и уравнението във второто семейство характеристики и съответното му характеристическо съотношение.

И така, окончателно получаваме, че върху двете семейства характеристики са в сила уравненията

$$(1,3) \quad \left(\frac{dr}{dz}\right)_{1,2} = \frac{\beta A \pm B}{\beta B \mp A}, \quad \frac{4}{1 + \delta^2} d\delta \pm \frac{\beta}{\varrho w^2} dp \pm \frac{A}{r(\beta A \pm B)} dr = 0.$$

Очевидно върху линиите на тока (които са трето семейство характеристики на системата (1,1)) ще имаме

$$(1,4) \quad \left(\frac{dr}{dz}\right)_0 = \operatorname{tg} \theta = \frac{A}{B}; \quad \frac{dw^2}{2} + \frac{dp}{\varrho} = 0.$$

Тази форма на записване на уравненията е по-удобна при численото решаване, защото не съдържа тригонометрични функции и автоматически превежда всички уравнения в безразмерен вид при положение, че координатите  $z$  и  $r$  са отнесени към някакъв характерен размер на тялото, налягането — към произведението от плътността и квадрата на критическата скорост на обтичащия поток, плътността — към плътността на обтичащия поток, а скоростта — към критическата скорост на обтичащия поток.

При численото решаване на задачата за определяне на функциите  $\delta$ ,  $p$ ,  $\varrho$ ,  $w$ ,  $\beta$  уравненията (1,3) и (1,4) се заменят с уравнения, записани в крайни разлики.

Да дадем на уравнения (1,3) и (1,4) компактният вид

$$(1,5) \quad h_\nu dz + S_\nu dr = 0,$$

$$\sum_{i=1}^2 A_{i\nu} dg_i + B_\nu dr = 0, \quad \nu = 0, 1, 2,$$

където  $dz$ ,  $dr$  и  $dg_i$ ,  $i=1, 2$ , са диференциали в направлението на  $\nu$ -тата характеристика  $(p, q)$ , а  $L_\nu$ ,  $S_\nu$ ,  $A_{i\nu}$  и  $B_\nu$  са коефициенти, зависещи от неизвестните функции  $\delta$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $w$ ,  $\beta$ . Тогава в крайни разлики уравненията (1,5) могат да бъдат записани така:

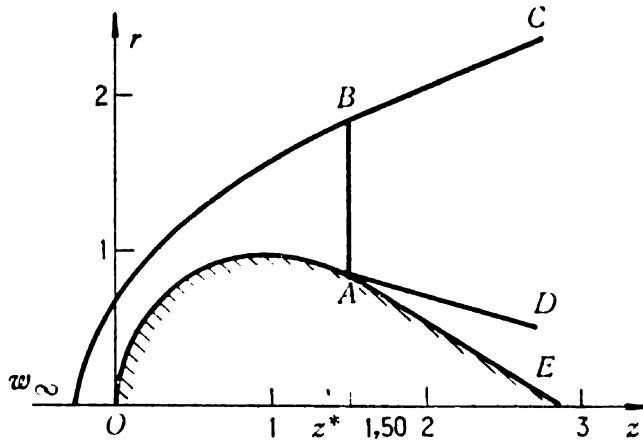
$$\frac{1}{2} (L_\nu^p + L_\nu^q) (z^p - z^q) + \frac{1}{2} (S_\nu^p + S_\nu^q) (r^p - r^q) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (A_{i\nu}^p + A_{i\nu}^q) (g_i^p - g_i^q) + \frac{1}{2} (B_\nu^p + B_\nu^q) (r^p - r^q) = 0.$$

Тук с  $L_\nu^p$ ,  $L_\nu^q$ ,  $S_\nu^p$ ,  $S_\nu^q$ ,  $A_{i\nu}^p$ ,  $A_{i\nu}^q$ ,  $B_\nu^p$  и  $B_\nu^q$  сме означили стойностите на коефициентите на системата (1,5) в две близки точки  $p$  и  $q$  на съответстващата  $\nu$ -та характеристика.

## § 2. СХЕМА ЗА ЧИСЛЕНО РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧАТА ЗА ОБТИЧАНЕ НА ТЕЛА С ПРЕКЪСВАНЕ НА КРИВИНАТА

Нека ни е даден конус със сферическо закръгление, чиято образуваща склучва с оста  $Oz$  ъгъл  $\beta'$  (фиг. 1). Както бе указано в [5], ако повърхнината на обтекаемото тяло при някакво  $z$  се прекъсва, първите произ-



Фиг. 2

водни от газодинамическите функции се прекъсват по продължение на характеристиката, минаваща през точката на прекъсване на кривината на контура. С това гладкостта на полето между ударната вълна и тялото се нарушава и за да можем да търсим приближено решение на системата (1,5) във вид на полиноми

$$f_i = \sum_{j=0}^{s-1} a_{ij} r^j, \quad i=1, 2, 3, 4, 5,$$

трябва пресмятанията да се извършат поотделно в двете области  $CBAD$  и  $DAE$  (вж. фиг. 1). Положението на характеристиката  $AD$ , което зависи от газодинамическите величини, се определя в процеса на решението на задачата.

### А. Определяне на функциите $\delta$ , $p$ , $\varrho$ , $\omega$ , $\beta$ в областта $CBAD$

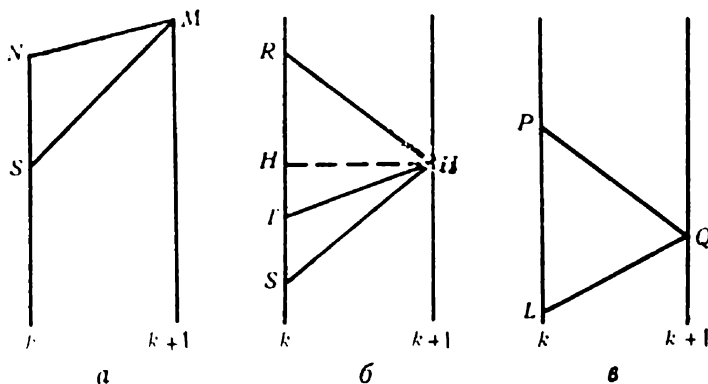
Нека на  $k$ -тия слой  $z=z^k$  параметрите на течението са известни във фиксираните точки  $r=r_j$ ,  $j=0, 1, 2, \dots, s-1$ . За по-рационално извършване на пресмятанията да въведем за всяко фиксирано  $z$  наред с  $r$  новата променлива

$$\xi = \frac{r-r_x}{r_b-r_x}$$

където  $r_b$  е ординатата на ударната вълна, а  $r_x$  — ординатата на характеристиката  $AD$  за дадено  $z$ . Приближеното решение в областта  $CBAD$  ще търсим във вид на апроксимиращи полиноми

$$(2,1) \quad f_i = \sum_{j=0}^{s-1} a_{ij} \xi^j, \quad i=1, 2, 3, 4, 5,$$

коэффициентите на които са функции на  $z$ . Знаейки  $f_i$  във фиксираните точки  $\xi_j$  на слоя  $k$ , можем да намерим коэффициентите  $a_{ij}$ ,  $i=1, 2, \dots, 5$ ,  $j=0, 1, 2, \dots, s-1$ , и по този начин при необходимост можем да получим  $f_i$  във всяка точка от този слой. На фиг. 3 са дадени схематично



Фиг. 3

трите различни случая, възникващи при намирането на параметрите във фиксираните възли  $\xi_j$ ,  $j=0, 1, 2, \dots, s-1$ .

а) Точка на ударната вълна —  $\xi=1$  (фиг. 3, а)

Всички параметри в точката  $N$ , лежаща на  $k$ -тия слой, са известни. За да намерим търсените функции в точката  $M$ , лежаща на  $k+1$  вля

слой, използваме известните условия на ударната вълна. В нашия случай те имат вида

$$\delta_M^{k+1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_M^{k+1}}{4}\right), \quad \theta_M^{k+1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_M^{k+1}}{u_M^{k+1}}\right),$$

$$u_M^{k+1} = \lambda_\infty - \tau_M^{k+1} v_M^{k+1}, \quad v_M^{k+1} = \frac{\lambda_\infty \tau_M^{k+1} - (v_n)_M^{k+1} \sqrt{1 + (\tau_M^{k+1})^2}}{1 + (\tau_M^{k+1})^2},$$

$$(v_n)_M^{k+1} = \frac{v_{n\infty}}{\varrho_M^{k+1}}, \quad v_{n\infty} = \frac{\lambda_\infty \tau_M^{k+1}}{\sqrt{1 + (\tau_M^{k+1})^2}};$$

$$p_2 = p_0 \frac{2\kappa M_\infty^2 \sin^2 \sigma - (\kappa - 1)}{\kappa + 1}; \quad \varrho_2 = \frac{(\kappa + 1) M_\infty^2 \sin^2 \sigma}{2 + (\kappa - 1) M_\infty^2 \sin^2 \sigma};$$

$$w_M^{k+1} = \sqrt{(u_M^{k+1})^2 + (v_M^{k+1})^2}, \quad a_M^{k+1} = \sqrt{\kappa \frac{p_M^{k+1}}{\varrho_M^{k+1}}}; \quad \beta = \sqrt{(M^2)_M^{k+1} - 1},$$

където  $\sigma$  е ъгълът на наклона на ударната вълна,

$$\tau = \operatorname{tg} \sigma = \frac{dr}{dz}, \quad \lambda_\infty = \frac{u_\infty}{a_{\kappa p}}, \quad p_0 = \frac{p_\infty}{\varrho_\infty a_{\kappa p}^2}.$$

Положението на точката  $M$  и параметрите в нея се намират чрез така нареченото „престрелване“ относно величината  $\tau$ . При първата престрелка в точката  $M$  се задава  $\tau$ , близко по стойност до  $\tau$  в точката  $N$ ; изчисляват се всички величини по указаните по-горе формули; намират се  $r_M^{k+1}$  и  $r_S^k$ :

$$r_M^{k+1} = r_N^k + \tau' (z_M^{k+1} - z_N^k), \quad \tau' = \frac{1}{2} (\tau_N^k + \tau_M^{k+1});$$

$$r_S^k = r_M^{k+1} - a (z_M^{k+1} - z_S^k), \quad a = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\beta A + B}{\beta B - A} \right)_1 + \left( \frac{\beta A + B}{\beta B - A} \right)_2 \right].$$

След определянето на  $r_S^k$  намираме съответната стойност на  $\xi$  и га-зодинамическите величини в точката  $S$  по интерполационните полиноми и проверяваме удовлетворява ли се характеристическото съотношение

$$(2,2) \quad \varepsilon = A_{11}(\delta_M^{k+1} - \delta_S^k) + A_{21}(p_M^{k+1} - p_S^k) + B_1(r_M^{k+1} - r_S^k) \approx 0,$$

където

$$A_{11} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{4}{1 + \delta^2} \right)_M^{k+1} + \left( \frac{4}{1 + \delta^2} \right)_S^k \right], \quad A_{21} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\beta}{\varrho w^2} \right)_M^{k+1} + \left( \frac{\beta}{\varrho w^2} \right)_S^k \right],$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{A}{r(\beta A + B)} \right]_M^{k+1} + \left[ \frac{A}{r(\beta A + B)} \right]_S^k \right\}.$$

Ако характеристическото съотношение (2,2) не се удовлетворява, т. е.  $|\varepsilon| > \delta$ , където  $\delta$  е зададената точност на пресмятанята, взема се ново  $\tau_M^{k+1}$ , намалено с  $\Delta \tau$ , и се извършва второ пресмятане в същия ред и т. н., докато се получи  $|\varepsilon| < \delta$ .

б) Точка на характеристиката  $AD - \xi = 0$  (фиг. 3, в)

Тъй като по предположение решението на системата (1,5) в точката  $L$  е известно, може да се намери наклонът на характеристиката на първото семейство в тази точка, а следователно и ординатата на точката  $Q$ :

$$r_Q^{k+1} = r_L^k + a \Delta z, \quad a = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\beta A + B}{\beta B - A} \right)_L^k + \left( \frac{\beta A + B}{\beta B - A} \right)_Q^{k+1} \right],$$

където  $\Delta z$  е стъпката, с която пресмятаме. През точката  $Q$  прекарваме назад характеристиката от второто семейство до пресичането ѝ с правата  $z = z^k$  и варираме положението ѝ, докато получим величините  $\delta, \rho, \varrho, \omega, \beta$  в точката  $Q$  с необходимата точност. Формулите, по които се пресмятат газодинамическите функции в точката  $Q$ , ще бъдат дадени в следващата точка в). Нека отбележим, че с оглед на по-нататъшните нужди по този алгоритъм пресмятаме параметрите в две последователни точки, лежащи на характеристиката  $AD$ .

в) Вътрешна точка на областта  $CBAD - 0 < \xi_j < 1$  (фиг. 3, б)

Ординатата  $r_j$ , съответстваща на възела  $\xi_j$  от  $k+1$ -вия слой, се определя по формулата

$$r_j^{k+1} = r_x^{k+1} + (r_b^{k+1} - r_x^{k+1}) \xi_j.$$

Полагайки в първото приближение за параметрите на възела  $\xi_j$  на  $k+1$ -вия слой съответните стойности на тези параметри във възела  $\xi_j$  на  $k$ -тия слой, прекарваме назад двете характеристики и линията на тока до пресичането им с правата  $z = z^k$ . Ординатите на пресечните точки  $R, S, T$  намираме по формулите

$$r_S^k = r_M^{k+1} - a \Delta z, \quad a = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\beta A + B}{\beta B - A} \right)_S^k + \left( \frac{\beta A + B}{\beta B - A} \right)_H^{k+1} \right];$$

$$r_R^k = r_M^{k+1} - b \Delta z, \quad b = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\beta A - B}{\beta B + A} \right)_R^k + \left( \frac{\beta A - B}{\beta B + A} \right)_H^{k+1} \right];$$

$$r_T^k = r_M^{k+1} - c \Delta z, \quad c = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{A}{B} \right)_T^k + \left( \frac{A}{B} \right)_H^{k+1} \right].$$

От характеристикческите съотношения (1,5) и  $d\varrho = dp/a^2$  намираме нови стойности на търсените функции в точката  $H$  на  $k+1$ -вия слой:

$$\delta_H^{k+1} = \frac{A_{11}A_{22} \delta_S^k + A_{12}A_{21} \delta_R^k + A_{21}A_{22} (p_S^k - p_R^k) + B_2A_{21} (r_H^{k+1} - r_R^k) + B_1A_{22} (r_T^k - r_H^{k+1})}{A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21}},$$

$$p_H^{k+1} = \frac{A_{12}(\delta_H^{k+1} - \delta_R^k) + A_{22}p_R^k + B_2(r_R^k - r_H^{k+1})}{A_{22}},$$

$$\varrho_H^{k+1} = \varrho_T^k + d(p_H^{k+1} - p_T^k),$$

$$\omega_H^{k+1} = \sqrt{(\omega_T^k)^2 - 2A_{23}(p_H^{k+1} - p_T^k)},$$

$$a_H^{k+1} = \sqrt{\kappa \frac{p_H^{k+1}}{\varrho_H^{k+1}}},$$

$$\beta = \sqrt{(M^2)_H^{k+1} - 1},$$

където

$$A_{11} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{4}{1+\delta^2} \right)_S^k + \left( \frac{4}{1+\delta^2} \right)_H^{k+1} \right], \quad A_{12} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{4}{1+\delta^2} \right)_R^k + \left( \frac{4}{1+\delta^2} \right)_H^{k+1} \right],$$

$$A_{21} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\beta}{\varrho \omega^2} \right)_S^k + \left( \frac{\beta}{\varrho \omega^2} \right)_H^{k+1} \right], \quad A_{22} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\beta}{\varrho \omega^2} \right)_R^k + \left( \frac{\beta}{\varrho \omega^2} \right)_H^{k+1} \right],$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{A}{r(\beta A + B)} \right]_S^k + \left[ \frac{A}{r(\beta A + B)} \right]_H^{k+1} \right\}, \quad B_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{A}{r(\beta A - B)} \right]_R^k + \left[ \frac{A}{r(\beta A - B)} \right]_H^{k+1} \right\},$$

$$d = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{a^2} \right)_T^k + \left( \frac{1}{a^2} \right)_H^{k+1} \right], \quad A_{23} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\varrho} \right)_T^k + \left( \frac{1}{\varrho} \right)_H^{k+1} \right],$$

а  $M_H^{k+1}$  е числото на Мах в точката  $H$ . Стойностите на функциите  $\delta$ ,  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  в точките от  $k$ -тия слой  $S$ ,  $T$ ,  $R$  определяме от интерполационните полиноми (2,1).

След като всичките функции в точката  $H$  са изчислени, прави се следваща итерация по същия алгоритъм и т. н. дотогава, докато се получи

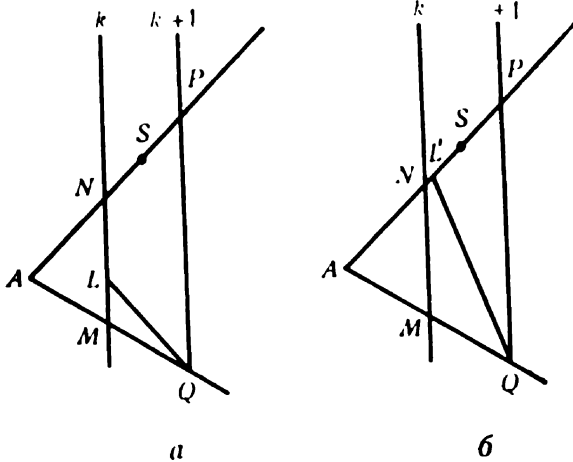
$$f_i^{n+1} - f_i^n < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, 5,$$

където  $f_i^n$  и  $f_i^{n+1}$  са стойностите на търсените функции в  $n$ -тата и  $n+1$ -та итерации, а  $\delta$  е зададената точност.

## Б. Определяне на функциите $\delta$ , $\rho$ , $\omega$ , $\beta$ в областта $DAE$

Най-напред ще отбележим, че и в тази област за всяко фиксирано  $z$  наред с променливата  $r$  въвеждаме новата променлива

$$\xi = \frac{r - r_\tau}{r_x - r_\tau}$$



Фиг. 4

където  $r_x$  е ординатата на характеристиката  $AD$ , а  $r_\tau$  е ординатата на образуващата на конуса при даденото фиксирано значение на  $z$ . Параметрите в точката  $P$ , отговаряща на  $\xi = 1$ , са изчислени. Остава да се разгледат случаите  $\xi = 0$  и  $0 < \xi_j < 1$ .

а) Точка на тялото —  $\xi = 0$  (Фиг. 4)

Нека уравнението на образуващата на конуса има вида  $r = f(z)$ . Тъй като линията, определена от това уравнение, трябва да бъде линия на тока, величината  $\delta$  в точката  $Q$  се намира веднага по формулата

$$\delta_Q^{k+1} = \operatorname{tg} \left[ \frac{\arctg f(z_Q^{k+1})}{4} \right]$$



За да определим останалите величини  $p_Q^{k+1}$ ,  $e_Q^{k+1}$ ,  $w_Q^{k+1}$ ,  $\beta_Q^{k+1}$ , определяме положението на точката  $L$ , като решим съвместно уравнението на втората характеристика и уравнението на правата  $MN$ . Получаваме

$$r_L^k = r_Q^{k+1} - b(r_Q^{k+1} - r_L^k),$$

където

$$b = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\beta A - B}{\beta B + A} \right)_L^k + \left( \frac{\beta A - B}{\beta B + A} \right)_Q^{k+1} \right].$$

Ако се окаже, че  $r_L^k \leq r_N^k$  (фиг. 4, а), от интерполационния полином на  $k$ -тия слой в областта  $DAE$  получаваме

$$f_i^L = \sum_{j=0}^{s-1} a_{ij} \xi_L^j.$$

Ако  $r_L^k > r_N^k$  (фиг. 4, б), първоначално намираме координатите на точката  $L'$ , като решаваме съвместно уравнението на втората характеристика и уравнението

$$r = \alpha_1 z^2 + \beta_1 z + \gamma_1,$$

където

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{r_N - 2r_S + r_P}{2(\Delta z)^2}, \\ \beta_1 &= \frac{-r_N(z_S + z_P) + 2r_S(z_N + z_P) - r_P(z_N + z_S)}{2(\Delta z)^2}, \\ \gamma_1 &= \frac{r_N z_S z_P - 2r_S z_N z_P + r_P z_N z_S}{2(\Delta z)^2}, \end{aligned}$$

даващо приближено уравнението на характеристиката  $AD$  между точките  $N$  и  $P$ . След това, използвайки стойностите на  $\delta$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $w$ ,  $\beta$  в точките  $N$ ,  $S$ ,  $P$ , намираме параметрите в точката  $L'$  по формулата

$$f_i^{L'} = \sum_{j=0}^2 a'_{ij} z^j, \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

От второто характеристическо съотношение намираме налягането в точката  $Q$  по формулата

$$p_Q^{k+1} = \frac{A_{12}(\delta_Q^{k+1} - \delta_{L'}^k) + A_{22} p_{L'}^k - B_2(r_Q^{k+1} - r_{L'}^k)}{A_{22}}.$$

Като вземем пред вид, че образуващата на тялото е линия на тока, за плътността  $\rho_Q^{k+1}$ , скоростта  $w_Q^{k+1}$  и променливата  $\beta_Q^{k+1}$  получаваме формулите

$$\begin{aligned} e_Q^{k+1} &= e_M^k + d(p_Q^{k+1} - p_M^k), \\ w_Q^{k+1} &= \sqrt{(w^2)_M^k - \alpha A_{23}(p_Q^{k+1} - p_M^k)}, \end{aligned}$$

$$\alpha_Q^{k+1} = \sqrt{\kappa \frac{p_Q^{k+1}}{\varrho_Q^{k+1}}}$$

$$\beta_Q^{k+1} = \sqrt{(M^2)_Q^{k+1} - 1},$$

където

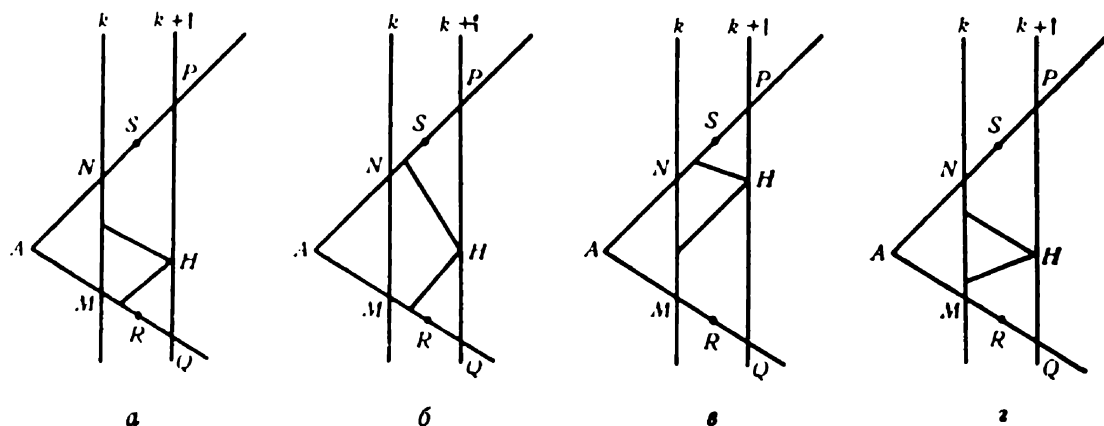
$$d = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{a^2} \right)_M^k + \left( \frac{1}{a^2} \right)_Q^{k+1} \right], \quad A_{23} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\varrho} \right)_M^k + \left( \frac{1}{\varrho} \right)_Q^{k+1} \right].$$

И тук, както при пресмятането на параметрите на характеристиката  $AD$  по този алгоритъм пресмятаме параметрите последователно в две точки, лежащи на образуващата на тялото.

б) Вътрешна точка на областта  $DAE$  —  $0 < \xi_j < 1$  (фиг. 5)

Съгласно с теорията на хиперболическите системи частни диференциални уравнения и обтичането на телата със свърхзвукова скорост при намирането на функциите  $\delta$ ,  $p$ ,  $\varrho$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  във фиксирани междинни точки на  $k+1$ -вия слой  $QP$  могат да се явят четири конфигурации (фиг. 5,  $a$ ,  $b$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{z}$ ). Ако при решаването на уравнението на първата характеристика с уравнението на правата  $MN$  се получава ордината  $r < r_M$ , то е налице един от двата случая:  $a$  или  $b$ . За да определим точно кой от тях е в сила, решаваме съвместно уравнението на втората характеристика и уравнението на правата  $MN$ . Ако се получи  $r < r_N$ , то налице е случаят  $a$ , а ако се получи  $r > r_N$ , налице е случаят  $b$ . Аналогично се установява кога е налице случаят  $\bar{b}$  и кога — случаят  $\bar{z}$ . Очевидно линията на тока минаваща през  $H$ , пресича или отсечката  $MN$ , или дъгата  $NP$ .

При определянето на газодинамическите функции в точката  $H$  и в четирите случая постъпваме почти аналогично както определянето на  $\delta$ ,  $p$ ,  $\varrho$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  във вътрешните точки на областта  $CBAD$ . Известна разлика има само в това, откъде се взема информацията за точката  $H$  — само



Фиг. 5

от  $k$ -тия слой, както е в областта  $CBAD$ , или от характеристиката  $AD$ , тялото и  $k$ -тия слой, както е в областта  $DAE$ .

В случая  $a$  (фиг. 5) за определянето на параметрите в пресечните точки на втората характеристика и линията на тока с отсечката  $MN$  из-

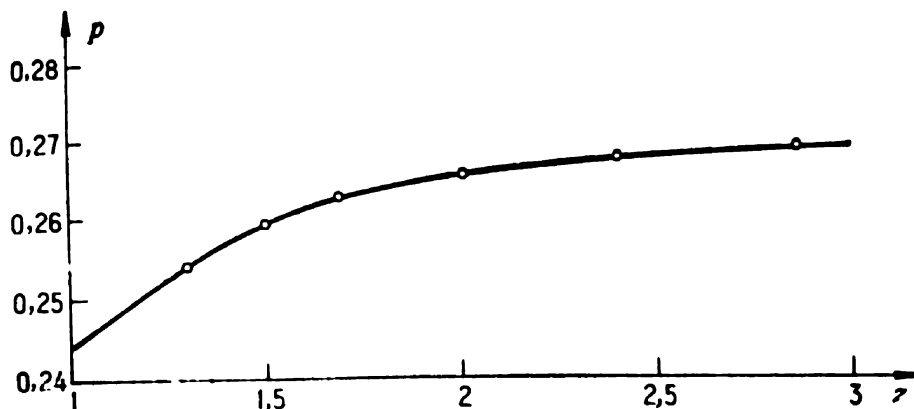
ползваме интерполационните полиноми (2,1) на  $k$ -тия слой, а за определяне параметрите в пресечната точка на първата характеристика с уравнението на конуса използваме стойностите на газодинамическите величини в точките  $M, R, Q$ .

От математична гледна точка разликата при намирането на функциите  $\delta, p, \varrho, \omega, \beta$  в областите  $CBAD$  и  $DAE$  е, че в първата област се решава смесената задача на Коши, а във втората задачата на Гурса.

Ще отбележим също как се пресмята първото приближение при определянето на  $\delta, p, \varrho, \omega, \beta$  в първия слой на точките от областта  $DAE$ . През фиксирани точки на първия слой прекарваме успоредни на образуващата на конуса, до пресичането им с линията, определена от точката на спрягане на конуса и сферата и първите две точки на характеристиката  $AD$ . Параметрите в тези пресечни точки вземаме за първо приближение в съответните точки на първия слой.

### § 3. ПРОВЕДЕНИ РАЗЧЕТИ. РЕЗУЛТАТИ

По изложената схема бе съставена програма за електронно-изчислителна машина „Стрела“ и проведени редица разчети. Получените резултати от обтичането на закръглен цилиндър (закръглен конус с наклон  $\beta' = 0^\circ$ ) при  $M_\infty = 3$  са сравнени с резултатите, получени в този случай по обикновения метод на характеристиките [6]. На фиг. 6 е изобразено разпределението на налягането на цилиндъра, получено по описания по-горе метод, като с кръгчета са нанесени резултатите за разпределянето на налягането по тялото, дадени в [6]. Направеното сравнение показва, че максималната разлика за налягането по тялото е от порядъка на 0,5%. Това говори, че изложеният метод осигурява висока точност на пресмятане. Нещо повече, чрез него се удава да бъдат проведени разчети за обтичане на закръглени конуси с отрицателен наклон на образуващата (обратни



Фиг. 6

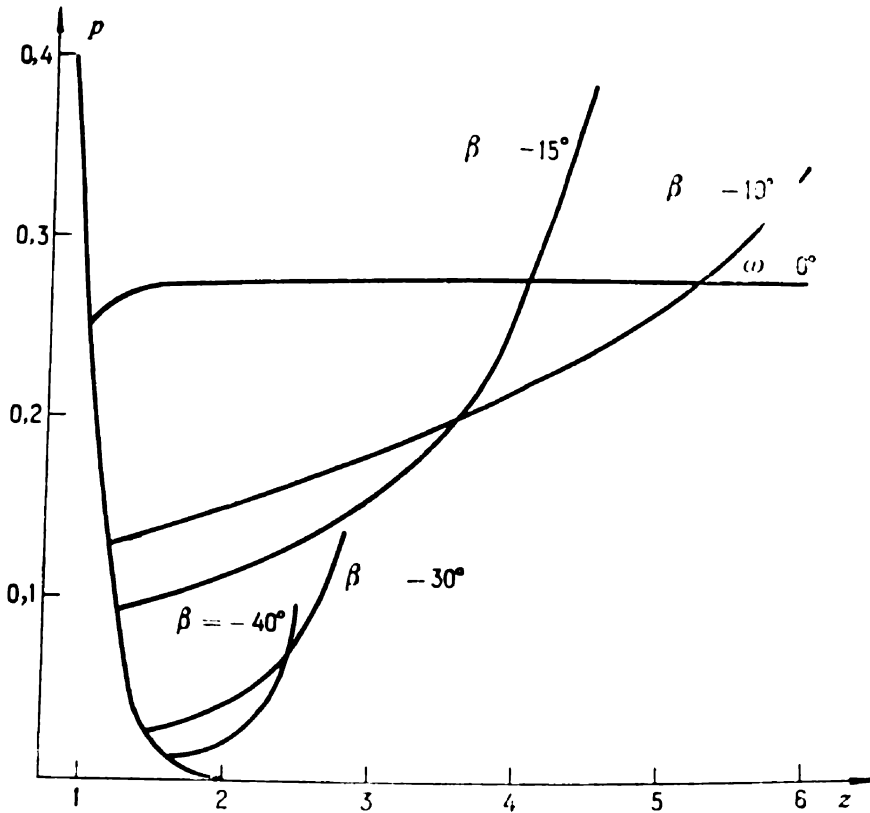
конуси), за който случай при другите известни методи се срещат големи затруднения.

С цел да се проверят възможностите на метода в изследване поведението на газодинамическите функции при обтичането на обратни конуси със свръхзвукова скорост бяха проведени разчети при

$$M_{\infty} = 3, \quad \beta' = 0, -10, -15, -40^{\circ};$$

$$M_{\infty} = 20, \quad \beta' = -10, -20, -30, -40^{\circ}.$$

На фиг. 1 е изобразено положението на ударната вълна и характеристиката  $AD$  при  $M_{\infty} = 3$  и  $\beta' = -15^{\circ}$ .



Фиг. 7

Характеристиката  $AD$ , излизаща от точката на допиране на образуващата на конуса и сферата, разделя свръхзвуковото поле на течението между ударната вълна и тялото на две характерни области: област  $CBAD$  на влияние на сферата и област  $DAE$  на влияние на коническата повърхнина.

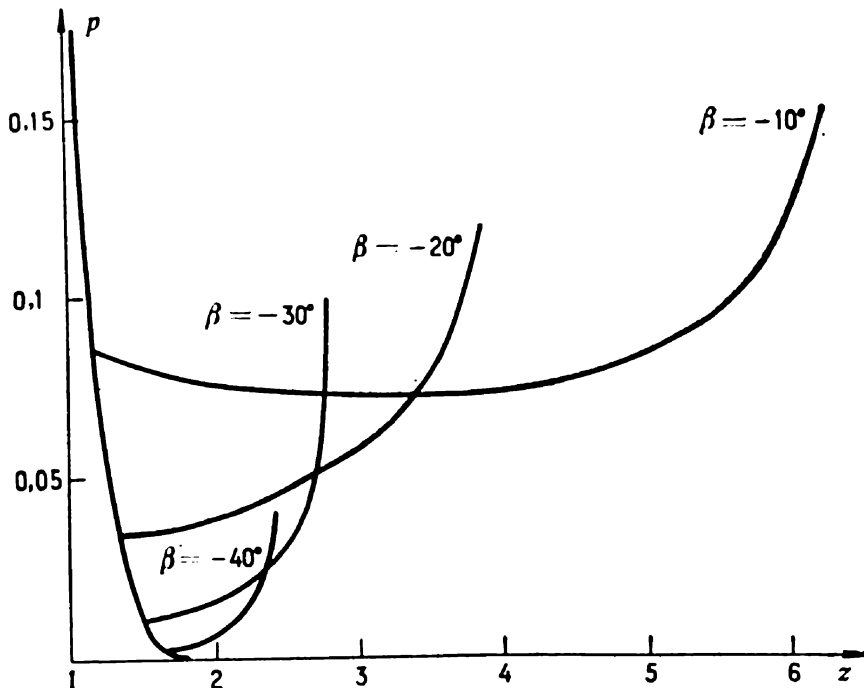
Тъй като характеристиката  $AD$  при обтичането на обратни конуси не пресича ударната вълна, показаното положение на ударната вълна на фиг. 1 е в сила за всички проведени разчети при  $M_{\infty} = 3$ .

На фиг. 2 е изобразено положението на ударната вълна при  $M_{\infty} = 20$  и всички  $\beta'$ , при които характеристиката  $AD$  не пресича ударната вълна. Положението на характеристиката  $AD$ , изобразено на тази фигура, отговаря на  $\beta' = -30^{\circ}$ .

Прави впечатление голямата разлика в отдалечаването на ударната вълна от тялото при  $M_{\infty} = 3$  и  $M_{\infty} = 20$ . При по-голямата стойност на  $M_{\infty}$  ударната вълна, както и трябва да бъде по физически съображения, е по-близо до тялото.

Заслужава да се отбележи фактът, че при  $\beta' = 0, -10, -15^\circ$  накло-  
нът на характеристиката  $AD$  е положителен, докато при  $\beta' = -20, -30,$   
 $-40^\circ$  той е отрицателен.

На фиг. 7 е изобразено разпределението на налягането при  $M_\infty = 3$   
по сферата, започвайки от  $z = 0,845$ , и отделящите се от нея конуси с



Фиг. 8

$\beta' = 0, -10, -15, -30, -40^\circ$ . При  $\beta' = 0$  и  $M_\infty = 3$  налягането на тялото  
отначало расте, а след това остава почти постоянно; при останалите  
ъгли то расте непрекъснато, като градиентът му се увеличава особено  
силно при приближаването към края на тялото.

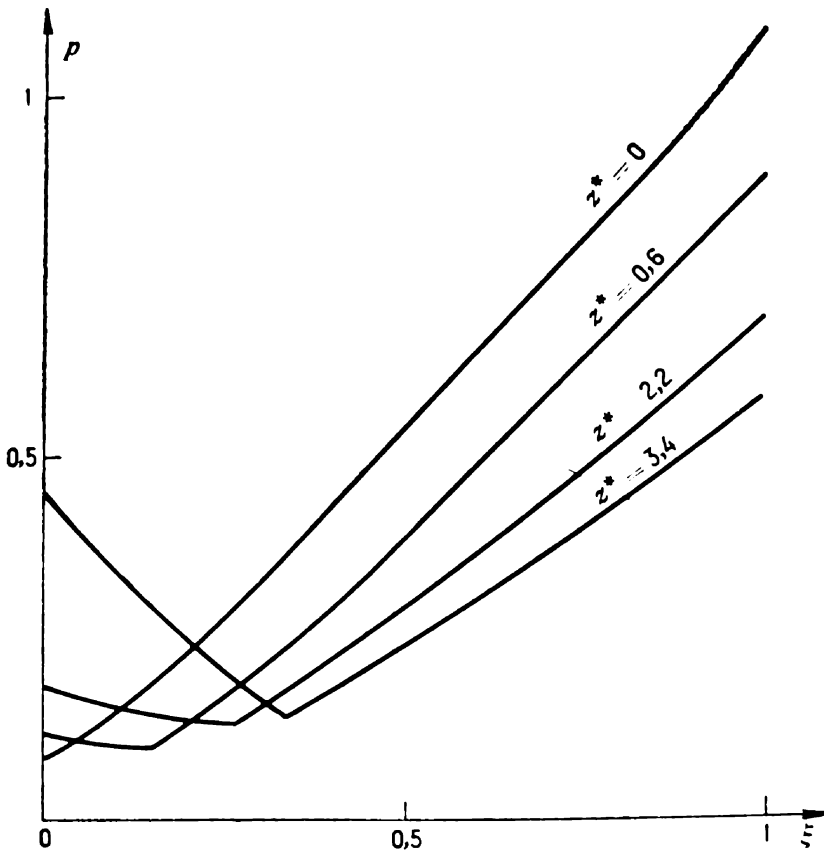
При  $M_\infty = 20$  разпределението на налягането по конуса (фиг. 8) има  
по-друг характер. При  $\beta' = -10^\circ$  то отначало намалява, дълго се задържа  
почти постоянно и след това започва да расте, а при останалите ъгли  
( $-20, -30, -40^\circ$ ) то отначало расте бавно, а при приближаване края  
на тялото започва да расте бързо.

На фиг. 9 е изобразено в няколко сечения  $z^* = \text{const}$  ( $z^* = z - z_A$ ) при  
 $M_\infty = 3$  и  $\beta' = -15^\circ$  разпределението на налягането по  $\xi$ , където норми-  
ровката

$$\xi = \frac{r - r_T}{r_B - r_T}$$

се отнася за цялата област между ударната вълна и тялото. Както се  
вижда, производната на налягането  $p$  по променливата  $\xi$  сменя знака си  
на характеристиката  $AD$ . Областта на смяната в знака на градиента на  
разпределението на налягането съответствува на мястото на пресичането  
на характеристиката  $AD$  с равнината  $z^* = \text{const}$ . Равнината  $z = 0$  минава  
по окръжността, в която повърхнината на конуса се допира до сферата.

Проведените изследвания за стъпката  $l_z$  и броя на итерациите, с които може да се водят успешно пресмятанията, показват, че добри резултати се получават при  $l_z = 0,03, 0,04$  и две-три итерации за всяка точка. И в двете области бяха използвани по 8 точки ( $s=8$ ), като точката на характеристиката  $AD$  се повтаря.



Фиг. 9

Освен сравняването на получените данни с известното решение за закръглен цилиндър като контрол за правилността и точността на получените резултати бе използван както прекият метод (заместване на намерените стойности на функциите  $\delta, p, \varrho, \omega, \beta$  в някои от изходните уравнения и проверяване с каква точност се удовлетворяват те), така и косвеният (проверяване постоянството на ентропията на тялото).

За започването на разчетите по описаната по-горе схема е необходимо да се знае в определен брой точки разпределението на функциите  $\delta, p, \varrho, \omega, \beta$  и положението на ударната вълна на началната равнина  $z^*=0$  по сферата. Затова, използвайки данните, получени в трансзвуковата област от [3, 4], бяха проведени предварителни разчети по метода в [5] по сферата в свръхзвуковата област до достигане до сеченията  $z^* = 0$ .

Авторът изказва сърдечна благодарност на Г. Ф. Теленин за вниманието към настоящата работа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Теленин, Г. Ф., Г. П. Тиняков. Метод расчета пространственного обтекания тел с отошедшей ударной волной. Доклады АН СССР, 154 (1964), № 5.
2. Гилинский, С. М., Г. Ф. Теленин, Г. П. Тиняков. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1964.
3. Гилинский, С. М., Г. Ф. Теленин. Сверхзвуковос обтекание тел различной формы с отошедшей ударной волной. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1964.
4. Гилинский, С. М., М. Г. Лебедев. Исследование обтекания плоских и осесимметричных тел различной формы с отошедшей ударной волной. Известия АН СССР, Механика, № 1, 1965.
5. Запрянов, З. Д., В. Б. Миносцев. Метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Известия АН СССР, Механика и машиностроение, № 5, 1964.
6. Чушкин, П. И., Н. П. Шулина. Таблицы сверхзвукового течения около затупленных конусов. ВЦ АН СССР, 1961.
7. Sauer, R. Differenzenverfahren für hyperbolische Anfangswertprobleme bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen mit Hilfe von Nebencharakteristiken. Numerische Mathematik, 5 (1963), Nr. 1.

Поступила на 17. I, 1966 г.

## ОБТЕКАНИЕ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ ЗАКРУГЛЕННЫХ ОБРАТНЫХ КОНУСОВ

Запрян Запрянов

### Резюме

В работе обобщается предложенный в [5] метод решения задачи двумерного сверхзвукового обтекания гладких тел с использованием аналитической аппроксимации газодинамических функций отдельных слоев в случае, когда поверхность обтекаемого тела имеет разрыв кривизны.

Нарушение гладкости обтекаемого тела ведет к нарушению гладкости параметров в области между ударной волной и телом. Схема метода в этом более общем случае дается для случая обтекания конусов с сферическим или эллипсоидальным лобовым закруглением. Распределение газодинамических функций имеет два участка: первый, соответствующий лобовому (сферическому или эллипсоидальному) закруглению, и второй, соответствующий прямолинейной части контура (конуса).

Приближенное решение ищется в виде многочлена Лагранжа

$$f_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(z) \xi^j, \quad i = 1, 2, \dots, 5,$$

причем на каждой прямой  $z = \text{const}$  для каждой области строим отдельные многочлены и границу между двумя областями находим в процессе решения задачи.

Сравнение некоторых результатов с результатами, полученными П. И. Чушкиным [6] методом характеристик, дает хорошее совпадение.

Кроме того, в работе приводятся и некоторые результаты, полученные при обтекании обратных конусов со сферическим лобовым закруглением при  $M = 3$  ( $\beta' = 0^\circ, -10^\circ, -15^\circ, -30^\circ, -40^\circ$ ) и  $M_\infty = 20$  ( $\beta' = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ$ ).

## FLOW MOVEMENT AROUND ROUNDED INVERSE CONES AT SUPERSONIC SPEED

Zapryan Zapryanov

### *Summary*

The paper gives a generalisation of the method proposed in [5] for the solution of the problem of the twodimensional supersonic flow movement around smooth bodies by using the analytical approximation of the gas-dynamic functions of the separate layers, in the case when the surface of the respective body shows a discontinuity of the curvature.

A discontinuity in the smoothness of the body subject to flow movement around it leads to a discontinuity in the smoothness of the parameters in the region between the shock wave and the body. An outline of the method in this more general case has been given for cones of spherical or ellipsoidal front rounding. The distribution of the gas-dynamic functions consists of two sections, a first one corresponding to the front (spherical or ellipsoidal) rounding and a second one corresponding to the rectilinear part of the contour (the cone).

The approximate solution is sought in the form of a Lagrangean polynomial

$$f_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(z)\xi^j, \quad i = 1, 2, \dots, 5,$$

separate polynomials being constructed on each straight line  $z = \text{const}$  for each region; the boundary between the two regions is found in the process of solving the problem.

The comparison carried out between our results and those obtained by P. I. Chushkin [6] after the method of characteristics shows a fair degree of coincidence.

Furthermore the paper contains some of the results obtained at flow movement around inverse cones with spherical front rounding at  $M_\infty = 3$  ( $\beta' = 0^\circ, -10^\circ, -15^\circ, -30^\circ, -40^\circ$ ) and  $M_\infty = 20$  ( $\beta' = -10^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -40^\circ$ ).