БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

ВЪРХУ НЯКОИ СВОЙСТВА НА ЛИНЕЙНИТЕ ПОВЪРХНИНИ С ОБЩА СТРИКЦИОННА ЛИНИЯ В ЕЛИПТИЧНОТО И ХИПЕРБОЛИЧНОТО ПРОСТРАНСТВО

Стоян Матеев

В тази работа се дават аналози на формулите на Чезаро в елиптичното и хиперболичното пространство и чрез тях се изследват линейните повърхнини с обща стрикционна линия в същите пространства.

Известно е, че тези формули за евклидовото пространство са изведени от Чезаро през 1896 г. Обаче той не дава никакви техни приложения и затова дълго време остават незабелязани.

По-късно (1934 г.) съветският математик Зейлигер [3] извежда формулите на Чезаро посредством теорията на дуалните числа и ги прилага много успешно за изследване и решаване на редица нови проблеми от евклидовата геометрия и по-специално от теорията на линейните повърхнини в евклидовото пространство.

Изследване на тези въпроси в елиптичното пространство има в работите на доста автори, като C. J. van Gruting, H. R. Müller и др. Получени са аналози на редица свойства на линейните повърхнини и по този начин някои класически теореми са пренесени от евклидовото в елиптичното пространство. Изследване в това направление е направено от А. Матеев [2] с помощта на дуални числа и дуални вектори от елиптичен тип, като е получен аналог на формулите на Чезаро и са доказани редица свойства на линейните повърхнини в елиптичното пространство — аналози на резултатите, дадени от Зейлигер [3].

Тук разглеждаме тези въпроси както в елиптичното, така и в хиперболичното пространство, като използваме метода на подвижния репер във вида, даден от Garnier [4], който се оказа еднакво приложим и за двете пространства. Въз основа на този метод получаваме следните резултати:

1. Извеждаме по нов начин формулите на Чезаро в елиптичното пространство.

2. Доказваме по нов начин редица известни теореми за линейните повърхнини в елиптичното пространство.

3. Извеждаме аналог на формулите на Чезаро в хиперболичното пространство.

4. Доказваме аналози на споменатите теореми за линейните повърхнини и в хиперболичното пространство.

5. Теореми 3, 4, 6, 9, 13, 14 и 15 са нови както за хиперболичното, така и за елиптичното пространство.

Доколкото ни е известно, досега няма публикации във връзка с резултатите, посочени в последните три точки. Освен това по този начин до голяма степен се установява и еднаквост на третираните въпроси в елиптичното и хиперболичното пространство.

В работата използваме много често понятията нормирана точка, произведение на 2, 3 и 4 точки и други, а така също и редица известни изводи, свойства и формули. Ето защо в първата част на работата поместваме понятия и изводи за елиптичното и хиперболичното пространство, дадени предимно от Garnier [4], с които по-често си служим, а други, които по-рядко се употребяват, даваме на самото място, където стане нужда.

I. ПРЕДВАРИТЕЛНИ ПОНЯТИЯ И ИЗВОДИ

1. За елиптичното пространство

Под символа $m(x, y, z, t)$ или само m ще разбираме точка в евклидовото пространство, на която проективните координати относно един реален координатен тетраедър са x, y, z, t, от които поне едната е различна от нула.

Ако $m_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $m_2(y_1, y_2, y_3, y_4)$ са две точки и λ_1, λ_2 са скалари, не едновременно нули, то $\lambda_1 m_1+\lambda_2 m_2$ е точката с координати $\lambda_1 x_i+\lambda_2 y_i$, $i=1, 2, 3, 4$.

Абсолют (абсолютна повърхнина), който ще бележим с Ω, е съвкупността от всички точки, чиито проективни координати (относно подходящ координатен тетраедър) удовлетворяват уравнението

$$x^2+y^2+z^2+t^2=0.$$

Под скаларно (вътрешно) произведение на двете точки $m_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $m_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ се разбира изразът

$$m_1 m_2=x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2+t_1 t_2.$$

При това в сила са следните свойства:

$$m_1 m_2=m_2 m_1,$$

$$(\lambda m_1)m_2=m_1(\lambda m_2)=\lambda(m_1 m_2),$$

$$(m_1+m_2)m_3=m_1 m_3+m_2 m_3.$$

Скаларният квадрат на точка $m(x, y, z, t)$ е

$$m^2=x^2+y^2+z^2+t^2.$$

За да бъде той нула, необходимо и достатъчно е точка m да принадлежи на абсолюта Ω.

Ще казваме, че точката m е нормирана, ако координатите ѝ удовлетворяват уравнението

$$x^2+y^2+z^2+t^2=1.$$

В този случай x, y, z, t са нормалните ѝ, или Вайерщрасови координати. Ако точката m е нормирана, ще бъде нормирана и точка $-m$. Нормираните точки m и $-m$ се наричат противоположни.

Съвкупността ε_3 от всички нормирани точки и точките на абсолюта Ω, като две противоположни точки се считат за различни, се нарича елиптично пространство.

Необходимото и достатъчно условие скаларното произведение m_1m_2 да се анулира е m_1 и m_2 да бъдат спрегнати спрямо абсолюта [4]. В такъв случай точките m_1 и m_2 се наричат ортогонални.

Права, която се допира до абсолюта Ω, се нарича изотропна.

Всяка нормирана точка m от произволна неизотропна права g може да се представи с равенството

$$m=\lambda_1m_1+\lambda_2m_2, \qquad \lambda_1^2+\lambda_2^2=1, \tag{1}$$

или с

$$m=m_1\cos\theta+m_2\sin\theta,$$

където m_1, m_2 са две ортогонални нормирани точки, непринадлежащи на абсолюта Ω. В такъв случай правата се означава и със символа (m_1m_2). Тук $\theta\,(0\leqq\theta<\pi)$ е разстоянието от точка m до точка m_1 или пък ъгълът между правите, минаващи през m и m_1, пресичащи се в s, ако точката s е върху спрегнатата права на (m, m_1).

2. За хиперболичното пространство

Тук също се въвежда абсолют Ω като съвкупност от точки, чиито проективни координати, отнесени към съответен реален координатен тетраедър, удовлетворяват уравнението

$$x^2+y^2+z^2-t^2=0.$$

Ако с f означим лявата страна на уравнението на абсолюта Ω, всяка реална точка, координатите на която удовлетворяват неравенството $f<0$, се нарича достъпна точка, а ако координатите ѝ удовлетворяват неравенството $f>0$, нарича се недостъпна точка. Съвкупността от всички достъпни точки образува достъпното пространство, а съвкупността от недостъпните точки образува недостъпното пространство. Всяка реална права, която минава през една достъпна точка, се нарича достъпна права, а права, на която всичките точки са недостъпни, се нарича недостъпна. Права, която минава през недостъпна точка c и се допира до абсолюта Ω, се нарича изотропна. Равнина, чийто полюс относно абсолюта Ω е достъпен, съдържа само недостъпни точки и се нарича недостъпна равнина, а ако полюсът ѝ е недостъпен, тя се нарича достъпна равнина. Ако равнината се допира до абсолюта, нарича се изотропна равнина.

Скаларно (вътрешно) произведение на двете точки $m_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $m_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$, които могат да бъдат достъпни или недостъпни, се нарича изразът

$$m_1m_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-t_1t_2.$$

Скаларният квадрат на точка $m(x, y, z, t)$ е

$$m^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Необходимото и достатъчно условие той да бъде нула е точката m да принадлежи на абсолюта Ω.

Ще казваме, че точка $m(x, y, z, t)$ е нормирана, ако координатите ѝ удовлетворяват уравненията

а) $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1$ — за достъпна точка;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 1$ — за недостъпна точка.

В случая, когато точката е достъпна, t не може да се анулира и може в такъв случай да се приеме $t > 0$.

Съвкупността H_3 от всички нормирани достъпни точки (с $t > 0$) се нарича хиперболично пространство. Така дефинирано, хиперболичното пространство H_3 има аналогични свойства с елиптичното пространство ε_3.

Всяка нормирана точка m от достъпната права g може да се изрази чрез достъпната точка m_1 и ортогоналната ѝ точка m_2 от g с равенството

$$m = m_1 \operatorname{ch} \theta + m_2 \operatorname{sh} \theta \tag{2}$$

или с

$$m = m_1 \operatorname{sh} \theta + m_2 \operatorname{ch} \theta$$

според това, дали тя е достъпна или недостъпна [4].

Ако m е от недостъпната права g, тя се представя чрез двете нормирани ортогонални точки m_1 и m_2 от g с

$$m = m_1 \cos \theta + m_2 \sin \theta, \tag{3}$$

което е идентично с представянето на права в ε_3.

В ε_3 и H_3 се пренасят почти всички понятия от евклидовото пространство, като има и някои особености [4].

3. Произведение на четири и три точки в ε_3 и H_3

Произведението на четирите точки m_j, $j = 1, 2, 3, 4$, с координати a_{jk}, $j, k = 1, 2, 3, 4$, относно един ортогонален тетраедър както в ε_3, така и в H_3 се дава с

$$(m_1, m_2, m_3, m_4) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Ако точките m_j са нормирани и образуват ортогонален тетраедър, при подходяща нареденост се получава

$$(m_1, m_2, m_3, m_4) = 1.$$

Произведението на четири точки не се изменя, ако разменим две от точките помежду им при условие, че се разменят помежду си и останалите две точки.

Произведението на трите точки m_1, m_2 и m_3, което ще бележим с (m_1, m_2, m_3), се дефинира като точка, която с произволна точка m удовлетворява равенството

$$(m_1, m_2, m_3)m=(m_1, m_2, m_3, m).$$

Ако тези четири точки са нормирани и образуват ортогонален тетраедър, то $(m_1, m_2, m_3)m=1$, откъдето следва

$$(m_1, m_2, m_3)=m. \tag{4}$$

Изключение има в H_3 само когато m е достъпна точка. В този случай $(m_1, m_2, m_3)=-m$. В сила са следните правила:

$$\begin{aligned}
&(m_1, m_2, m_3)=(m_2, m_3, m_1)=(m_3, m_1, m_2)=-(m_2, m_1, m_3)\\
&\qquad=-(m_1, m_3, m_2)=-(m_3, m_2, m_1),\\
&(m_1+n_1, m_2, m_3)=(m_1, m_2, m_3)+(n_1, m_2, m_3),\\
&(am_1, m_2, m_3)=a(m_1, m_2, m_3)\quad (a\neq 0 \text{ е скалар}).
\end{aligned} \tag{5}$$

4. Формули на Френе в ε_3 и H_3

Формулите на Френе в ε_3 и в H_3 за една линия l, описана от нормираната точка $m(s)$ (при H_3 — достъпна), където s е дъгата на l и служи за параметър, са

$$\begin{aligned}
&\frac{dt}{ds}=\varkappa n-\gamma m,\\
&\frac{dn}{ds}=\tau b-\varkappa t,\\
&\frac{db}{ds}=-\tau, n,\\
&\frac{dm}{ds}=t.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тук t, n и b са нормирани точки съответно върху допирателната, главната нормала и бинормалата на l в точка m, а $\varkappa$ и τ са кривината и торзията на кривата в тази точка [4]. В ε_3 $\gamma=1$, а в H_3 $\gamma=-1$. Реперът (или тетраедърът) на Френе се означава със символа $\{t, n, b, m\}$.

Ако за кривината $\varkappa$ и торзията τ на дадена линия l съществува зависимост от вида $A\varkappa+B\tau+C=0$, където A, B и C са константи и поне едното от A и B е отлично от нула, линията l се нарича крива на Бертран.

5. Линейни повърхнини в ε_3 и H_3

Една линейна повърхнина S в ε_3 или в H_3 се разглежда като геометрично място на права p, която зависи от един параметър ν. С всяка права p от S се свързва един ортогонален тетраедър $\{t, g, h, m\}$ с нормирани върхове, като точките m и h са централните (стрикционните) точки на p (при H_3 само m е централна точка), а g и t са съотвотно върху централната тангента и централната нормала на повърхнината S в точка m и е изпълнено $(t, g, h, m)=1$.

При това положение каноничните уравнения (уравненията на Френе) на линейната повърхнина са

$$
\begin{aligned}
t' &= cg - ah,\\
g' &= -ct+\gamma bm,\\
h' &= at-\gamma em,\\
m' &= -bg+eh,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

където a, b, c и e са функции на ν, а $\gamma=1$ за ε_3 и $\gamma=-1$ за H_3.

Когато p описва S, точките m и h описват стрикционните линии на повърхнината (при H_3 само m описва единствената стрикционна линия).

Отношението b/a, което ще бележим по-нататък с k, ни дава разпределителния параметър на образуващата p, отнесен за точка m, а в ε_3 отношението a/b е разпределителният параметър на същата образуваща, отнесен за точка h. В ε_3 имаме $|k|=1$, т. е. $b=\varepsilon a$, $\varepsilon=\pm 1$, води до паралели на Клифорд [4].

Взаимни линейни повърхнини са тези, които имат обща нормалия (геометричното място на централните нормали) по общата им линия и равни разпределителни параметри за съответните им образуващи [2].

II. ЛИНЕЙНИ ПОВЪРХНИНИ В ε_3 И H_3 С ОБЩА СТРИКЦИОННА ЛИНИЯ

В следващите разглеждания, когато става дума за ε_3 и за H_3 едновременно, за удобство ще употребяваме символа K_3.

1. Формули на Чезаро в пространството K_3

Разглеждаме следната задача: да се намери линейна повърхнина S от K_3, на която дадена линия l (при H_3 тя се описва от достъпна нормирана точка) с кривина $\varkappa(s)$ и торзия $\tau(s)$, които са непрекъснати функции на дъгата ѝ s, да е стрикционна линия, а дадена функция $k(s)$ да е разпределителен параметър на образуващата на S, като при ε_3 е изпълнено условието $0<|k(s)|\neq 1$.

Нека точка $m(s)$ е от стрикционната линия, за която е отнесен и разпределителният параметър на образуващата. Нека си мислим още, че нормираните точки h, t, g са съответно върху образуващата, централната нормала и централната тангента на образуващата за точка m, отнесени за l. С m_1, h_1, t_1 и g_1 означаваме аналогичните точки на развиваемата линейна повърхнина, образувана от допирателните на линията l и отнесени за нея, като точка m_1 съвпада с точка m. Това означава, че h_1, t_1 и g_1 са нормирани точки съответно върху допирателната, главната нормала и бинормалата на l в точка $m_1=m$. Значи скаларните квадрати на точките m, g, h, t, m_1, g_1, h_1, t_1 са равни на единица с изключение на m, m_1 при H_3, където имаме $m^2=m_1^2=-1$, тъй като точка m е достъпна. При това тетраедрите $\{t, g, h, m\}$ и $\{t_1, g_1, h_1, m_1\}$ са ортогонални.

Точките t, g, h, t_1, g_1 и h_1 лежат в една равнина — полярната равнина на точка m. Ето защо, като имаме пред вид (1), всяка от точките

t, g, h може да се представи като линейна комбинация от трите точки t_1, g_1 и h_1. Така получаваме

$$h=\lambda_1 h_1+\lambda_2 t_1+\lambda_3 g_1, \tag{8}$$

където λ_i, $i=1, 2, 3$, са подходящи реални диференцируеми функции, които подлежат на определяне и между които съществува зависимостта $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2=1$. Съвкупността от правите (m, h) при условие, че функциите λ_1, λ_2, λ_3 са вече известни, ще ни даде търсената повърхнина S. Следователно поставената в началото задача се свежда до намирането на функциите λ_1, λ_2 и λ_3.

За постигане на целта диференцираме двете страни на (8) и като направим съответните замествания съгласно (6) и (7), получаваме

$$at-\gamma em=\lambda_1' h_1+\lambda_2' t_1+\lambda_3' g_1+\lambda_1(\varkappa t_1-\gamma m_1)+\lambda_2(\tau g_1-\varkappa h_1)-\lambda_3\tau t_1, \tag{9}$$

където $\gamma=1$ за ε_3 и $\gamma=-1$ за H_3.

За точката t получаваме

$$t=\mu_1 h_1+\mu_2 t_1+\mu_3 g_1, \quad \sum_{i=1}^{3}\mu_i^2=1. \tag{10}$$

Понеже централната нормала на повърхнината S в коя да е точка от линията l пресича ортогонално допирателната на l в същата точка, то $th_1=0=\mu_1$. Следователно $\mu_1=0$.

Заместваме в (9) m с m_1, t с равното му от (10) и $\mu_1=0$, след това сравняваме коефициентите пред h_1, t_1 и g_1 от двете страни на полученото тъждество. Така идваме до системата

$$\begin{aligned} &\lambda_1=e,\\ &\lambda_1'-\varkappa\lambda_2=0,\\ &\lambda_2'+\varkappa\lambda_1-\tau\lambda_3=a\mu_2,\\ &\lambda_3'+\tau\lambda_2=a\mu_3. \end{aligned} \tag{11}$$

От друга страна, съгласно равенства (7) имаме

$$m'=-bg+eh, \tag{12}$$

като $m'=m_1'=h_1$, $e=\lambda_1$, $h=\lambda_1 h_1+\lambda_2 t_1+\lambda_3 g_1$. Освен това точка g може да се представи като произведение на трите точки t, h и m съгласно (4). Така получаваме $g=(t, h, m)$, или като заместим t, h и m с равните им,

$$g=(\mu_2 t_1+\mu_3 g_1,\ \lambda_1 h_1+\lambda_2 t_1+\lambda_3 g_1,\ m_1).$$

Като имаме пред вид свойствата на скаларното произведение на две точки и равенства (5), за g получаваме

$$g=\lambda_1\mu_2(t_1,\ h_1,\ m_1)+\mu_2\lambda_3(t_1 g_1 m_1)+\lambda_1\mu_3(g_1 h_1 m_1)+\lambda_2\mu_3(g_1 t_1 m_1).$$

Равенства (4) и (5) ни дават възможност да напишем равенствата $(t_1 h_1 m_1)=g_1$, $(t_1 g_1 m_1)=-h_1$, $(g_1 h_1 m_1)=-t_1$, $(g_1 t_1 m_1)=h_1$ и като заместим, получаваме

$$(13) \qquad g=(\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2)h_1-\lambda_1\mu_3t_1+\lambda_1\mu_2g_1.$$

По този начин изразихме и точката g като линейна комбинация от трите точки h_1, t_1, g_1.

Заместваме в (12) m', e, h, g със съответните им равни и сравняваме коефициентите пред h_1, t_1, g_1. Така получаваме

$$(14) \qquad \begin{aligned} 1&=\lambda_1^2-b(\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2),\\ 0&=\lambda_1\lambda_2+b\lambda_1\mu_3,\\ 0&=\lambda_1\lambda_3-b\lambda_1\mu_2. \end{aligned}$$

От второто и третото равенство на (14) получаваме

$$(15) \qquad \mu_2=\frac{\lambda_3}{b}, \quad \mu_3=-\frac{\lambda_2}{b}$$

От (11) и (15), като имаме пред вид, че $b/a=k$, получаваме системата диференциални уравнения

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\lambda_1'-\varkappa\lambda_2=0,\\ &\lambda_2'+\varkappa\lambda_1-\left(\frac{1}{k}+\tau\right)\lambda_3=0,\\ &\lambda_3'+\left(\frac{1}{k}+\tau\right)\lambda_2=0, \end{aligned}$$

при която неизвестните функции са λ_1, λ_2, λ_3, като $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2=1$.

Тези формули са аналогични на формулите на Чезаро в ε_3, изведени в [2]. Разлика има само в знака пред $1/k$, което се дължи вероятно на разликата в дефинирането на понятието елиптично пространство. В [2] при дефинирането на ε_3 две противоположни точки се считат за неразлични. В сравнение пък с формулите на Чезаро за евклидовото пространство E_3 от [3] съществена разлика няма.

Всяко частно решение λ_1, λ_2, λ_3 на системата диференциални уравнения (16) ни дава възможност да намерим чрез (8) линейна повърхнина, която удовлетворява поставените в началото условия.

С това може да се счита, че задачата е решена.

Използваният от нас метод на подвижния репер ни даде възможност да решим поставената основна задача за линейните повърхнини с обща стрикционна линия едновременно за елиптичното и хиперболичното пространство. Както се вижда, окончателното ѝ решаване се свежда до интегриране на линейната система хомогенни диференциални уравнения (16) — формулите на Чезаро, както това става и в евклидовото пространство.

2. Приложение на формулите на Чезаро за изследване на свойствата на линейните повърхнини в елиптичното и хиперболичното пространство

С помощта на формулите на Чезаро в K_3 (така ще ги наричаме в по-нататъшните изследвания) ще докажем редица свойства на линейните повърхнини в двете пространства.

Теорема 1. Ако линията l е от K_3 (при H_3 се описва от достъпна точка) и $k(s)$ е непрекъсната функция, като при ε_3 е изпълнено условието $0<|k(s)| \neq 1$, съществуват ∞^2 линейни повърхнини в пространството K_3, на които l е обща стрикционна линия, а образуващите на всяка от тях има за разпределителен параметър, отнесен за точките на l, дадената функция $k(s)$.

Доказателство. В общия интеграл на системата диференциални уравнения (16) ще фигурират три независими интеграционни константи c_1, c_2 и c_3. Обаче като вземем под внимание, че $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 = 1$, ще получим равенство от вида $\Phi(c_1, c_2, c_3) = 0$, откъдето следва, че действително ще има ∞^2 линейни повърхнини, отговарящи на условията на теоремата.

Теорема 2. За всеки две от разглежданите в теорема 1 ∞^2 линейни повърхнини двойките образуващи, които минават през една точка от стрикционната линия l, се пресичат под един и същ ъгъл, който зависи само от взетата двойка линейни повърхнини.

Доказателство. Нека λ_1, λ_2, λ_3 и λ_1^*, λ_2^*, λ_3^* са две произволни системи частни решения на системата (16). Тогава образуващите, които минават през точка m на двете съответни интегрални повърхнини, ще съдържат съответно нормираните и ортогонални на m точки h и h^*, които се изразяват с

$$h = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 t_1 + \lambda_3 g_1, \quad h^* = \lambda_1^* h_1 + \lambda_2^* t_1 + \lambda_3^* g_1.$$

Ако θ е ъгълът между (m, h^*) и (m, h), получаваме

$$\cos\theta = hh^* = \lambda_1\lambda_1^* + \lambda_2\lambda_2^* + \lambda_3\lambda_3^*.$$

Диференцираме двете страни на последното равенство,

$$(hh^*)' = \lambda_1'\lambda_1^* + \lambda_1\lambda_1^{*\prime} + \lambda_2'\lambda_2^* + \lambda_2\lambda_2^{*\prime} + \lambda_3'\lambda_3^* + \lambda_3\lambda_3^{*\prime},$$

и изразяваме условието, че λ_i и λ_i^*, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяват равенства (16). Получаваме

$$(hh^*)' = \varkappa\lambda_2\lambda_1^* + \lambda_1\varkappa\lambda_2^* + \left[-\varkappa\lambda_1 + \left(\frac{1}{k} + \tau\right)\lambda_3\right]\lambda_2^*$$
$$+ \lambda_2\left[-\varkappa\lambda_1^* + \left(\frac{1}{k} + \tau\right)\lambda_3^*\right] - \left(\frac{1}{k} + \tau\right)\lambda_2\lambda_3^* - \left(\frac{1}{k} + \tau\right)\lambda_2^*\lambda_3 \quad 0,$$

откъдето следва

$$\cos\theta = hh^* = \text{const}, \quad \theta = \text{const}.$$

С това теоремата е доказана. Друго доказателство за H_3 е дадено в [5].

От (10), понеже $\mu_1 = 0$, следва, че точката t, която е от централната нормала на повърхнината в точка m, е обязателно от правата $(t_1 g_1)$. Тя е точно определена при фиксирано m и заедно с точка m определят една фиксирана равнина в K_3. Това ни дава възможност да формулираме следната

Теорема 3. Образуващите на нормалиите по стрикционната линия l на споменатите в теорема 1 ∞^2 линейни повърхнини, които минават през фиксирана точка m от l, принадлежат на снопа прави с център в m и лежащ в равнината, определена от главната нормала и бинормалата на l в същата точка.

Трансформираме уравненията на система (16), като правим смяната

$$\lambda_1 = \cos\psi, \quad \lambda_2 = \sin\psi\cos\varphi, \quad \lambda_3 = \sin\psi\sin\varphi, \tag{17}$$

и получаваме

$$\begin{aligned} &\psi' + \varkappa\cos\varphi = 0, \\ &\varphi' - \varkappa\operatorname{ctg}\psi\sin\varphi + \tau + \frac{1}{k} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

От друга страна, имаме $\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2=1$. Заместваме $\mu_1=0$, $\mu_2=\lambda_3/b$, $\mu_3=-\lambda_2/b$ и получаваме

$$\frac{\lambda_2^2+\lambda_3^2}{b^2}=1.$$

От последното равенство и от (17) следва

$$\frac{\sin^2\psi}{b^2}=1,$$

откъдето

$$b=\varepsilon\sin\psi, \quad \varepsilon=\pm 1.$$

Избираме $\varepsilon=-1$ (може и $\varepsilon=1$) и за μ_2 и μ_3 получаваме

$$\mu_2=-\sin\varphi, \quad \mu_3=\cos\varphi. \tag{19}$$

Така точките h, t и g, съответствуващи на коя да е от разглежданите ∞^2 линейни повърхнини, чрез (8), (10), (13) и (19) се представят в следния вид:

$$\begin{aligned} h &= \cos\psi\,.\,h_1+\sin\psi\cos\varphi\,.\,t_1+\sin\psi\sin\varphi\,.\,g_1, \\ t &= -\sin\varphi\,.\,t_1+\cos\varphi\,.\,g_1, \\ g &= \sin\psi\,.\,h_1-\cos\psi\cos\varphi\,.\,t_1-\cos\psi\sin\varphi\,.\,g_1. \end{aligned} \tag{20}$$

От първото равенство на (20) следва непосредствено

$$hh_1=\cos\psi,$$

което показва, че ψ е ъгълът, под който стрикционната линия l пресича образуващите на линейната повърхнина S.

Доказва се, че с подходяща трансформация уравненията (18) се превръщат в едно еквивалентно на тях уравнение от типа на Riccati [3]. Следователно общото решение на (18), или все едно на (16), в общия случай не може да бъде намерено с помощта на квадратури. Ето защо ние ще разгледаме само частните случаи, когато дадената линия l е не само стрикционна, но и геодезична, асимптотична или пък линия на кривината на повърхнината S.

Теорема 4. Ако в K_3 линията l е стрикционна на линейната повърхнина S, то необходимото и достатъчно условие тя да бъде и геодезична линия на S е да пресича всички образуващи на S под един и същ ъгъл. (Аналог на теоремата на Bonnet [3].)

Доказателство. Използваме свойството, че необходимото и достатъчно условие една линия l върху повърхнината S да е геодезична е оскулачната ѝ равнина в произволна нейна точка (на l) да е перпендикулярна на допирателната в тази точка [3]. Това е все едно бинормалата на l в произволна нейна точка да е перпендикулярна на централната нормала на S в същата точка.

Да приемем, че l е геодезична линия. Тогава ще имаме

$$t \cdot g_1 = 0. \tag{21}$$

Но от второто равенство на (20) следва непосредствено, че

$$t \cdot g_1 = \cos\varphi, \tag{22}$$

т. е. φ е точно ъгълът между централната нормала на повърхнината S и бинормалата на l в същата точка. От (21) и (22) следва, че $\cos\varphi = 0$, откъдето

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots$$

За определеност да вземем $\varphi = \pi/2$. От първото равенство на (18) получаваме $\psi = \psi_0$ (const).

Обратно, ако $\psi = \mathrm{const}$, от първото равенство на (18) следва $\cos\varphi = 0$, което заедно с (22) дава $t \cdot g_1 = 0$. Това показва, че l е и геодезична линия на повърхнината S.

С това теоремата е доказана.

Теорема 5. В K_3 съществуват ∞^1 линейни повърхнини, за които дадената линия l е не само стрикционна, но и геодезична. Образуващите p на тези повърхнини и централните им тангенти принадлежат на снопа прави с център в точката m и лежащ в равнината, определена от допирателната и бинормалата на l в точка m.

Доказателство. Приемаме, че l е геодезична линия на повърхнината S. Съгласно теорема 4 ъгъл ψ ще бъде постоянен и системата (18) ни дава уравнението

$$\frac{1}{k} + \tau - \varkappa \operatorname{ctg} \psi_0 = 0, \tag{23}$$

а формулите (20) се превръщат в следните:

$$\begin{aligned} h &= \cos\psi_0 \cdot h_1 + \sin\psi_0 \cdot g_1, \\ t &= -t_1, \\ g &= \sin\psi_0 \cdot h_1 - \cos\psi_0 \cdot g_1. \end{aligned} \tag{24}$$

Тук фигурира само една интеграционна константа ψ_0, което показва, че действително линейните повърхнини са ∞^1, за които дадената линия l е стрикционна и геодезична.

От първото и третото равенство на (24) следва, че в този случай точките h и g са от правата $(h_1 g_1)$, което показва, че образуващите (mh) и централните тангенти (mg) принадлежат на снопа прави с център в точка m, лежащ в равнината на допирателната и бинормалата на стрикционната линия в точка m.

Теорема 6. Всяка двойка от споменатите в теорема 5 ∞^1 линейни повърхнини, за които l е стрикционна и геодезична линия на S, са взаимни.

Доказателство. Съгласно теорема 5 образуващите и централните тангенти на линейните повърхнини, за които l е стрикционна и геодезична линия, минаващи през точка m, лежат в равнината, определена от допирателната и бинормалата в същата точка. Това показва, че всички тези ∞^1 линейни повърхнини имат обща нормалия по общата им стрикционна линия l. От друга страна, съгласно основната задача, която си поставихме, всички тези линейни повърхнини имат един и същ разпределителен параметър на образуващите им, които минават през произволна точка m от l.

Това показва, че действително всеки две от линейните повърхнини са взаимни съгласно [1].

Теорема 7. Развиваемата повърхнина, образувана от допирателните на l, която е стрикционна и геодезична линия на S, а така също и линейната повърхнина, образувана от бинормалите на l, принадлежат на съвкупността линейни повърхнини от теорема 5, а разпределителният параметър $k(s)$, който отговаря на произволна точка от l, за втората линейна повърхнина е равен на реципрочната стойност на торзията ѝ в същата точка с обратен знак.

Доказателство. От уравнения (24) и при $\psi_0=0$ и при $\psi_0=\pi/2$ получаваме съответно

а) $h=h_1, \quad t=-t_1, \quad g=-g_1$;
б) $h=g_1, \quad t=-t_1, \quad g=h_1$.

От първите равенства на а) и б) е ясно, че получените интегрални повърхнини са същите, които се образуват съответно от допирателната (mh_1) и бинормалата (mg_1) на линията l.

От равенство (23) при $\psi_0=\pi/2$ получаваме $k=-1/\tau$.

С това теоремата е доказана.

Теорема 8. В случай, че стрикционната линия l на линейната повърхнина S от K_3 е и геодезична, необходимото и достатъчно условие разпределителният параметър $k(s)$, съответствуващ на точките на l, да е постоянен е l да е линия на Бертран, като $B \neq 0$.

Доказателство. Нека приемем, че $k(s)$ е постоянна величина, различна от нула. Понеже стрикционната линия l е и геодезична, ще бъде в сила равенство (23), което е от вида

$$A\varkappa+B\tau+C=0, \quad B\neq 0, \tag{25}$$

следователно линията l е крива на Бертран.

Обратно, нека допуснем, че линията l, която е стрикционна и геодезична, е линия на Бертран, т. е. съществува зависимост от вида (25). Като сравним (23) и (25), получаваме

$$k(s)=\frac{B}{C}, \quad \operatorname{ctg}\psi_0=-\frac{A}{B}$$

Ясно е, че $k(s)=\mathrm{const}$ и има само една линейна повърхнина с исканото свойство, на която съответствуващите ѝ $k(s)$ и ψ_0 се определят еднозначно от горните формули.

Теорема 9. Едно достатъчно условие разпределителният параметър $k(s)$, съответстващ на точките на l, която приемаме да бъде стрикционна и геодезична линия на повърхнината S от K_3, да е постоянен е кривината $\varkappa$ и торзията τ на l да са постоянни, т. е. l да е обикновена витлова линия в K_3.

Доказателство. От равенство (23) при $\varkappa \operatorname{ctg} \psi_0 - \tau \neq 0$ за разпределителния параметър получаваме

$$k(s) = \frac{1}{\varkappa \operatorname{ctg} \psi_0 - \tau},$$

откъдето следва непосредствено, че при $\varkappa$ и τ постоянни $k(s)$ също ще бъде постоянно.

Понеже ψ_0 е произволна (интеграционна) константа, следва, че има ∞^1 линейни повърхнини, за които стрикционната линия l, на която $\varkappa$ и τ са постоянни, е геодезична.

Теорема 10. В пространството K_3 съществуват ∞^1 линейни повърхнини, за които дадената линия l е не само стрикционна, но и асимптотична. Образуващите (m, h) и централните тангенти (m, g) на тези линейни повърхнини лежат в оскулачната равнина на l в точка m.

Доказателство. Използваме свойството, че за да бъде линията l асимптотична, достатъчно е оскулачната ѝ равнина в коя да е нейна точка да е допирателна на линейната повърхнина S. Това значи, че $t = \varepsilon g_1$, $\varepsilon = \pm 1$. За определеност нека вземем $\varepsilon = 1$, т. е. $t = g_1$. В такъв случай от второто уравнение на (20) следва $\cos \varphi = 1$, откъдето получаваме $\varphi = 0$, а от (18) следва

$$\psi = \psi_0 - \int_0^s \varkappa ds, \quad \tau = -\frac{1}{k}. \tag{26}$$

При $\varphi = 0$ формулите (25) стават

$$\begin{aligned} h &= \cos \psi . h_1 + \sin \psi . t_1, \\ t &= g_1, \\ g &= \sin \psi . h_1 - \cos \psi . t_1. \end{aligned} \tag{27}$$

От (26) и (27) става ясно, че линейните повърхнини с обща стрикционна линия, която да бъде същевременно и асимптотична, са ∞^1. Втората част на теоремата се доказва аналогично на втората част на теорема 5.

Теорема 11. В K_3 съществуват ∞^2 линейни повърхнини, за които дадената линия l е стрикционна и линия на кривината на тези повърхнини.

Доказателство. Използваме свойството, че за да бъде линията l линия на кривината, трябва нормалията на линейната повърхнина S по l да е развиваема. За да бъде пък развиваема нормалията, която е геометрично място на централната нормала (m, t) на S, необходимо и достатъчно е тя да се пресича с безкрайно близката ѝ образуваща $(m + dm, t + dt)$. Това означава, че ще бъде изпълнено равенството

$$(m, t, dm, dt) = 0,$$

или

$$(m, t, m', t') = 0. \tag{28}$$

Заместваме в (28) m с m_1, $m'=m_1'$ с h_1, а t — съгласно второто равенство на (20). Диференцираме същото равенство и като имаме пред вид и равенства (6), за t' получаваме

$$t' = -(\varphi'+\tau)\cos\varphi\,.\,t_1-(\varphi'+\tau)\sin\varphi\,.\,g_1+\varkappa\sin\varphi\,.\,h_1. \tag{29}$$

Тогава (28) става

$$(m_1,\ -\sin\varphi\, t_1+\cos\varphi\, g_1,\ h_1,\ -(\varphi'+\tau)(\cos\varphi\, t_1+\sin\varphi\, g_1)+\varkappa\sin\varphi\, h_1)=0$$

и като извършим уножението и вземем пред вид, че $(m_1,\ t_1,\ h_1,\ g_1)=1$, а $(m_1,\ g_1,\ h_1,\ t_1)=-1$, намираме

$$\varphi'+\tau=0. \tag{30}$$

От (18) и (30) получаваме равенствата

$$\psi=\psi_0-\int_0^s \varkappa\cos\varphi ds,\quad \varphi=\varphi_0-\int_0^s \tau ds,$$

от които е ясно, че ще има действително ∞^2 линейни повърхнини с исканото свойство.

От (29) и (30) следва $t'=\varkappa\sin\varphi\,.\,h_1$, което показва, че ръбът на измятането на развиваемата повърхнина, която се описва от $(m,\ t)$, е геометрично място на точка t, когато точка m описва l. От второто равенство на (18) и (30) получаваме

$$\varkappa\sin\varphi-\frac{\operatorname{tg}\psi}{k}=0, \tag{31}$$

което е необходимо и достатъчно условие l да е не само стрикционна, но и линия на кривината на S.

Т е о р е м а 12. Ако в K_3 линията l е стрикционна и геодезична на линейната повърхнина S, то необходимото и достатъчно условие тя да бъде и линия на кривината на S е да бъде равнинна.

Доказателство. Да предположим най-напред, че l е стрикционна и геодезична. От това следва, че $\varphi=\text{const}$.

Ако приемем, че тя е и линия на кривината на S, то от (30) ще получим $\tau=0$, което показва, че l е равнинна линия.

Обратно, ако l е равнинна линия, следва $\tau=0$, а от това, че е стрикционна и геодезична, следва $\varphi=\text{const}\,(\varphi'=0)$. Значи $\tau+\varphi'=0$. Тогава за произведението на четирите точки m, t, m', t', като имаме пред вид и (29), получаваме

$$(m,\ t,\ m',\ t')=(m_1,\ -\sin\varphi t_1+\cos\varphi g_1,\ h_1,\ \varkappa\sin\varphi\, h_1)=0,$$

което показва, че нормалията на S по l е развиваема, т. е. l е линия на кривината.

В K_3, когато правата $(m,\ h)$ описва повърхнината S, правата (mg) описва друга линейна повърхнина S_g, която се нарича спрегната на S [3]. За да бъдат валидни каноничните уравнения (7) за повърхнината S_g, трябва да вземем за придружаващ тетраедър тетраедъра $\{t,\ -h,\ g,\ m\}$ съгласно [4]. Така получаваме каноничните уравнения на повърхнината S_g

$$(32)\qquad \begin{aligned} t' &= -c_g h - a_g . g, \\ h' &= c_g t - \gamma b_g . m, \\ g' &= a_g t - \gamma e_g . m, \\ m' &= b_g h + e_g . g \end{aligned}$$

($\gamma=1$ при ε_3 и $\gamma=-1$ при H_3).

Сравняваме коефициентите в съответните равенства на (7) и (32) и получаваме за двойката спрегнати повърхнини S, S_g следните връзки:

$$(33)\qquad a_g=-c, \quad c_g=a, \quad b_g=e, \quad e_g=-b.$$

Повърхнините S и S_g имат l за обща стрикционна линия [4]. За повърхнината S_g правата (m, h) е централна тангента в точката ѝ m, а (m, t) е централната ѝ нормала. Като имаме пред вид това, можем да формулираме следната

Теорема 13. В K_3 спрегнатите линейни повърхнини S и S_g имат едната си стрикционна линия обща и обща нормалия по тази линия.

Теорема 14. Ъглите, под които общата стрикционна линия l на двете спрегнати линейни повърхнини S и S_g пресича съответните им образуващи, се различават с $\pi/2$ или се допълват до $\pi/2$.

Доказателство. С ψ_g означаваме ъгъла, под който стрикционната линия пресича образуващата (m, g) на линейната повърхнина S. По познатия вече начин получаваме

$$\cos\psi_g=e_g=-b=\sin\psi$$

или

$$\cos\psi_g-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=0,$$

откъдето следва непосредствено, че $\psi-\psi_g=\pi/2$ или $\psi+\psi_g=\pi/2$.

С това теоремата е доказана.

Следствие. Ако общата стрикционна линия l на S и S_g е и геодезична линия на S, тя ще бъде геодезична линия и на S_g и обратно.

Теорема 15. Ако l е не само стрикционна, но и геодезична линия на повърхнините S и S_g в K_3, то разпределителният параметър k_g на образуващите на S_g за точките на l се дава с

$$(34)\qquad k_g=-\frac{\cos\psi_0}{\varkappa\sin\psi_0+\tau\cos\psi_0},$$

където ψ_0 е постоянна величина.

Доказателство. От каноничните уравнения (32) на линейната повърхнина S_g и съответствията (31) между коефициентите за разпределителния параметър k_g получаваме

$$(35)\qquad k_g=\frac{b_g}{a_g}=-\frac{e}{c}$$

От друга страна, понеже допускаме, че l е и геодезична линия на S, ще бъдат в сила равенства (24). Диференцираме първото от тях и като имаме пред вид равенства (6) и (7) и това, че $m=m_1$, $t=-t_1$, чрез сравняване коефициентите пред m_1 и t_1 получаваме

$$(36)\qquad \begin{aligned} a &= \tau \sin\psi_0 - \varkappa \cos\psi_0, \\ e &= \cos\psi_0. \end{aligned}$$

По същия начин, като диференцираме второто равенство на [24] и сравним съответните коефициенти, получаваме

$$(37)\qquad \begin{aligned} b &= -\sin\psi_0, \\ c &= \varkappa \sin\psi_0 + \tau \cos\psi_0. \end{aligned}$$

От равенство (35), второто равенство на (36) и второто равенство на (37) получаваме равенство (34).

С това теоремата е доказана.

Следствие. В случай, че l е линия на Бертран или $\varkappa$ и τ са постоянни величини, разпределителният параметър k_g ще бъде постоянен. Обратно, ако разпределителният параметър k_g на S_g е постоянен, стрикционната линия l ще бъде линия на Бертран. От това, че k_g е постоянен, обаче не следва, че $\varkappa$ и τ са постоянни.

Посочените свойства в следствието са аналогични на свойствата, доказани в теореми 8 и 9 за повърхнината S.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матеев, А. Н. Върху диференциалната геометрия на линейните повърхнини в елиптичното пространство. Год. на Соф. унив., **44** (1948), кн. 1, 235—308.
2. Матеев, А. Н. Върху някои въпроси на диференциалната геометрия на кривите и линейните повърхнини в елиптичното пространство. Год. на Соф. унив., Природо-мат. фак., **46** (1950), кн. 1, 73—115.
3. Зейлингер, Д. Н. Комплексная линейчатая геометрия. Ленинград — Москва, 1934.
4. Garnier, R.. Cours de cinématique. Géométrie et cinématique cayleyennes, tome III. Paris, 1951.
5. Салаева, Б. Г. Линейчатые поверхности пространства Лобачевского. Ученые записки Азерб. Гос. ун-та, № 4, 1960.

Постъпила на 2. IV. 1966 г.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ОБЩЕЙ СТРИКЦИОННОЙ ЛИНИЕЙ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВАХ

Стоян Матеев

Резюме

В этой работе доказываются свойства линейчатых поверхностей с общей стрикционной линией и одним и тем же распределительным параметром их образующих в эллиптическом пространстве ε_3 и в гиперболическом пространстве H_3. С этой целью применяется метод подвижного репера в виде, данном Garnier в [4].

В первой части даются известные понятия, формулы и выводы о ε_3 и H_3, которые употребляются при дальнейшем исследовании. Используются произведения 2, 3 и 4 точек, канонические уравнения (7) линейчатой поверхности, формулы Френе (6) в пространстве ε_3 и H_3 и др., преимущественно данные Гарние [4].

Во второй части поставлена основная задача: найти в ε_3 и в H_3 линейчатую поверхность S, для которой линия l с данной кривизной $\varkappa(s)$ и кручением $\tau(s)$ была стрикционной и данная функция $k(s)$ была распределительным параметром образующей.

Задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений (16) — аналог формул Cesàro в евклидовом пространстве. С помощью формул (16) доказываются ряд свойств линейчатых поверхностей в ε_3 и в H_3. Некоторые из них, как известно, доказаны только в ε_3 А. Матеевым [2]. Здесь они заново доказаны для обоих пространств. Остальные — новые в обоих пространствах.

Часть полученных результатов в ε_3 и H_3 аналогичны результатам данным Зейлигером для евклидового пространства в его книге [3].

Последние три теоремы относятся к линейчатой поверхности S_g, сопряженной поверхности S, которая описывается центральной касательной S в точке m, когда последняя описывает l.

SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DES SURFACES RÉGLÉES DANS L'ESPACE ELLIPTIQUE OU L'ESPACE HYPERBOLIQUE QUI POSSÈDENT UNE LIGNE DE STRICTION COMMUNE

Stojan Mateev

Résumé

Dans ce travail on démontre des propriétés des surfaces réglées avec la ligne de striction commune et le même paramètre de distribution de leurs génératrices dans l'espace elliptique ε_3 et l'espace hyperbolique H_3.

Dans la recherche on emploie la méthode du repère mobile, telle que l'a donnée René Garnier [4].

Dans la première partie sont données des notions connues, des formules et des déductions dans ε_3 et H_3 qu'on utilise après. On se sert du produit de 2, 3 et 4 points, des équations canoniques (7) de la surface réglée, des formules de Frenet (6) dans ε_3 et H_3 etc.

Dans la seconde partie on résout comme problème fondamental le suivant: dans ε_3 et H_3 on doit trouver la surface réglée S, pour laquelle une ligne l, avec la courbure $\varkappa(s)$ et la torsion $\tau(s)$, soit une ligne de striction et la fonction donnée $k(s)$ soit le paramètre de distribution de la génératrice.

Le problème mène à la résolution du système des équations différentielles (16), analogues aux formules de Cesàro dans l'espace euclidien. Moyennant ce système on démontre une série de propriétés des surfaces réglées

dans ε_3 et H_3. Une partie de ces propriétés n'est démontré que dans ε_3 par A. Mathéev [2]. Dans ce travail on les démontre en même temps pour les deux espaces. Les autres sont nouvelles pour les deux espaces. Une partie des résultats acquis dans ε_3 et H_3 est analogue aux résultats, donnés par Seiliger dans l'espace euclidien [3].

Les trois derniers théorèmes concernent la surface réglée S_g, conjugée à la S, et décrite par la tangente centrale au point m, quand celui-ci décrit la ligne l.