БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

ВЪРХУ КОЛЕБАНИЯТА НА ДВА ПОСЛЕДОВАТЕЛНО СВЪРЗАНИ ХОМОГЕННИ ПРЪТА В РАВНИНА, КОЯТО СЕ ВЪРТИ С ПРОМЕНЛИВА ЪГЛОВА СКОРОСТ

Спас Манолов, Георги Бояджиев и Божидар Чешанков

В [1] е изследвана следната механична система. Един правоъгълен дясно ориентиран триедър $Oxyz$ се върти с постоянна ъглова скорост ω около вертикалната ос Oz, насочена надолу. В точка A_1, която се намира на оста Oy на разстояние $\overline{OA_1}=R$, е окачен на цилиндрична става тежък хомогенен прът с дължина $\overline{A_1A_2}=2a$ и маса m. Той може да се върти около оста Oy. В точка A_2 от пръта, пак на цилиндрична става, е окачен втори прът със същата дължина и маса, който може да се върти около ос, успоредна на Oy. Доказано е, че при известни условия, които могат да се реализират, за тази механична система съществува невертикално устойчиво релативно равновесно положение.

В настоящата работа ще разгледаме същата механична система, но в случая, когато триедърът $Oxyz$ се върти с променлива ъглова скорост по закона $\omega=\omega_0+\omega_1^*\sin pt$, като предполагаме, че ω_1^* е малко в сравнение с ω_0. Ще докажем съществуването на периодични движения в този случай и ще намерим условията за тяхната устойчивост.

Да означим с θ_1 и θ_2 ъглите на отклонение на прътовете от вертикалната ос Oz. Диференциалните уравнения, които описват движението на двата пръта, се дават съгласно [1] във вида

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{16}{3}\ddot\theta_1+2\cos(\theta_1-\theta_2)\,.\,\ddot\theta_2+2\sin(\theta_1-\theta_2)\,.\,\dot\theta_2^2+3\frac{g}{a}\sin\theta_1\\ &\qquad=\omega^2\left(\frac{16}{3}\sin\theta_1\cos\theta_1+2\cos\theta_1\sin\theta_2\right),\\ &\frac{4}{3}\ddot\theta_2+2\cos(\theta_1-\theta_2)\,.\,\ddot\theta_1-2\sin(\theta_1-\theta_2)\,.\,\dot\theta_1^2+\frac{g}{a}\sin\theta_2\\ &\qquad=\omega^2\left(\frac{4}{3}\sin\theta_2\cos\theta_2+2\sin\theta_1\cos\theta_2\right)\cdot \end{aligned}$$

Да положим

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\theta_\nu=a_\nu+\lambda\psi_\nu,\quad \nu=1,2,\\ &\omega_1^*=\lambda\omega_1, \end{aligned}$$

където λ е малък параметър. За a_1 и a_2, които определят невертикалното равновесно положение на прътовете, получаваме трансцендентната система

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{16}{3}\sin a_1\cos a_1+2\cos a_1\sin a_2=3\frac{g}{a\omega_0^2}\sin a_1\,,\\
&\frac{4}{3}\sin a_2\cos a_2+2\sin a_1\cos a_2=\frac{g}{a\omega_0^2}\sin a_2\,.
\end{aligned}
$$

Като се възползваме от (1), виждаме непосредствено, че ако е изпълнено условието

$$
(4)\qquad \omega_0^2>\frac{3g}{4a}(\sqrt{5}-1)(3-\sqrt{5}),
$$

равновесното положение a_1, a_2 е устойчиво.

След полаганията (2), като вземем под внимание (3), системата (1) приема вида

$$
(5)\qquad a_{\nu1}\ddot\psi_1+a_{\nu2}\ddot\psi_2+c_{\nu1}\psi_1+c_{\nu2}\psi_2=G_\nu\sin pt+\lambda F_\nu\,,\quad \nu=1,\,2,
$$

където

$$
a_{11}=\frac{16}{3},\quad a_{22}=\frac{4}{3},\quad a_{21}=a_{12}=2\cos(a_1-a_2),
$$

$$
c_{11}=3\frac{g}{a}\cos a_1-\omega_0^2\left(\frac{16}{3}\cos 2a_1-2\sin a_1\sin a_2\right),
$$

$$
c_{22}=\frac{g}{a}\cos a_2-\omega_0^2\left(\frac{4}{3}\cos 2a_2-2\sin a_1\sin a_2\right),
$$

$$
c_{12}=c_{21}=-2\omega_0^2\cos a_1\cos a_2\,,
$$

$$
G_1=6\frac{\omega_1}{\omega_0}\frac{g}{a}\sin a_1\,,\quad G_2=2\frac{\omega_1}{\omega_0}\frac{g}{a}\sin a_2\,,
$$

$$
\begin{aligned}
F_\nu={}&2\sin(a_\nu-a_{3-\nu})\left[(\psi_\nu-\psi_{3-\nu})\ddot\psi_{3-\nu}-\dot\psi_{3-\nu}^2\right]\\
&+(5-2\nu)\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2\frac{g}{a}\sin a_\nu\sin^2 pt+2\omega_0\omega_1\left[(a_{\nu\nu}\cos 2a_1-2\sin a_1\sin a_2)\psi_\nu\right.\\
&\left.+2\cos a_1\cos a_2\,.\,\psi_{3-\nu}\right]-\omega_0^2\left[(7-3\nu)\sin 2a_\nu\,.\,\psi_\nu^2+2\sin a_\nu\cos a_{3-\nu}\,.\,\psi_1\psi_2\right.\\
&\left.+2\cos a_\nu\sin a_{3-\nu}\,.\,\psi_{3-\nu}^2\right]+\lambda(\cdots)+\cdots,\quad \nu=1,\,2.
\end{aligned}
$$

Ще установим директно, че системата (5) притежава периодични движения с период $2\pi/p$ в околността на невертикалното равновесно положение a_1, a_2. Съществуването на периодични решения на (5) следва и от общата теория за нелинейна неавтономна система диференциални уравнения, след като (5) се приведе в нормален вид.

Пораждащата система

$$
(6)\qquad a_{\nu1}\ddot\psi_1+a_{\nu2}\ddot\psi_2+c_{\nu1}\psi_1+c_{\nu2}\psi_2=G_\nu\sin pt,\quad \nu=1,\,2,
$$

която се получава от (5) при $\lambda=0$, има решение

$$\psi_{\nu 0}=\sum_{k=1}^{2} L_{\nu k}(C_k \cos \varrho_k t + D_k \sin \varrho_k t)+H_\nu \sin pt, \quad \nu=1,2, \tag{7}$$

където C_k, D_k, $k=1,2$, са произволни константи, а L_{1k}, L_{2k} удовлетворяват съответно системите уравнения

$$(c_{\nu 1}-\varrho_k^2 a_{\nu 1})\,L_{1k}+(c_{\nu 2}-\varrho_k^2 a_{\nu 2})\,L_{2k}=0, \quad \nu,\ k=1,2. \tag{8}$$

Величините H_ν, $\nu=1,2$, са

$$H_\nu=\frac{G_\nu(c_{3-\nu,\,3-\nu}-a_{3-\nu,\,3-\nu}p^2)-G_{3-\nu}(c_{12}-a_{12}p^2)}{\Delta_1(p^2-\varrho_1^2)(p^2-\varrho_2^2)}; \quad \Delta_1=a_{11}a_{22}-a_{12}^2, \tag{9}$$

а $\pm i\varrho_1$, $\pm i\varrho_2$ са корени на фундаменталното уравнение

$$\det(c_{\nu k}+\varrho^2 a_{\nu k})=0, \quad \nu,\ k=1,\ 2, \tag{10}$$

като те са чисто имагинерни благодарение на условието (4).

Предполагаме, че ϱ_1, ϱ_2 не са кратни на p, т. е. $\varrho_\nu \neq kp$, $k=1, 2, \ldots$ Тогава единствените периодични решения на (6) с период $2\pi/p$ са

$$\psi_{\nu 0}(t)=H_\nu \sin pt, \quad \nu=1,2, \tag{11}$$

при начални условия

$$\psi_{\nu 0}(0)=0, \quad \dot{\psi}_{\nu 0}(0)=H_\nu p, \quad \nu=1,2. \tag{12}$$

Периодичните решения на системата (5) ще търсим от вида

$$\psi_\nu(t)=\psi_{\nu 0}(t)+A_{\nu 1}(t)\,\beta_1+A_{\nu 2}(t)\,\beta_2+A_{\nu 3}(t)\,\beta_3+A_{\nu 4}(t)\,\beta_4+\lambda(\cdots)+\cdots, \quad \nu=1,\ 2, \tag{13}$$

с видоизменени начални условия

$$\psi_\nu(0)=L_{\nu 1}\beta_1+L_{\nu 2}\beta_2, \quad \dot{\psi}_\nu(0)=H_\nu p+L_{\nu 1}\varrho_1\beta_3+L_{\nu 2}\varrho_2\beta_4, \quad \nu=1,2. \tag{14}$$

Системата (5) ще има периодични решения с период $2\pi/p$, ако са изпълнени равенствата

$$\psi_\nu\left(\frac{2\pi}{p}\right)-\psi_\nu(0)=0, \quad \dot{\psi}_\nu\left(\frac{2\pi}{p}\right)-\dot{\psi}_\nu(0)=0, \quad \nu=1,\ 2. \tag{15}$$

Функциите A_{1k}, A_{2k}, $k=1,2,3,4$, се получават като решения на системите диференциални уравнения

$$a_{\nu 1}\ddot{A}_{1k}+a_{\nu 2}\ddot{A}_{2k}+c_{\nu 1}A_{1k}+c_{\nu 2}A_{2k}=0, \quad \nu=1,\ 2, \tag{16}$$

до които достигаме, след като заместим интегралите (13) в (5) и приравним коефициентите пред β_k.

Като отчетем началните условия (14), за A_{1k}, A_{2k} намираме изразите

$$A_{\nu k}=L_{\nu k}\cos \varrho_k t, \quad k=1,2; \quad A_{\nu k}=L_{\nu,k-2}\sin \varrho_{k-2} t, \quad k=3,4. \tag{17}$$

След заместване на тези стойности в (13) развитията на уравнения (15) приемат вида

$$
(18)\qquad \begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2} L_{\nu k}(\cos n_k - 1)\beta_k + \sum_{k=1}^{2} L_{\nu k}\sin n_k\,.\,\beta_{2+k} + \lambda(\cdots) = 0,\\
&-\sum_{k=1}^{2} L_{\nu k}\varrho_k \sin n_k\,.\,\beta_k + \sum_{k=1}^{2} L_{\nu k}\varrho_k(\cos n_k - 1)\beta_{2+k} + \lambda(\cdots) = 0,
\end{aligned}
$$

където сме положили $n_k = \frac{2\pi\varrho_k}{p}$, $k = 1, 2$.

Функционалната детерминанта на системата (18) при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \lambda = 0$ с точност до един отличен от нула множител е

$$
(19)\qquad \Phi = \sin^2\frac{n_1}{2}\sin^2\frac{n_2}{2}
$$

и е отлична от нула съгласно направеното предположение, че ϱ_1 и ϱ_2 не са кратни на p.

Това показва, че съществува фамилия периодични движения на (5) с период $2\pi/p$, която при $\lambda = 0$ се обръща в решението (11) на пораждащата система.

Интегралите $\psi_\nu(t)$ на системата (5) са аналитични функции на λ, поради което можем да ги търсим във вида

$$
(20)\qquad \psi_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k \psi_{\nu,k}(t), \quad \nu = 1, 2,
$$

където $\psi_{\nu,k}(t)$ са периодични функции на t с период $2\pi/p$.

След съответни пресмятания намираме

$$
(21)\qquad \psi_\nu(t) = H_\nu \sin pt + \lambda(H_{\nu 0}^{(1)} + H_{\nu 2}^{(1)}\cos 2pt) + \cdots, \quad \nu = 1, 2,
$$

при което

$$
H_{\nu 0}^{(1)} = \frac{G_{\nu 0}^{(1)} c_{3-\nu,3-\nu} - G_{3-\nu}^{(1)} c_{\nu,3-\nu}}{\Delta_2},
$$

$$
H_{\nu 2}^{(1)} = \frac{G_{\nu 2}^{(1)}(c_{3-\nu,3-\nu} - 4a_{3-\nu,3-\nu}p^2) - G_{\nu 2}^{(1)}(c_{12} - 4a_{12}p^2)}{\Delta_1(4p^2 - \varrho_1^2)(4p^2 - \varrho_2^2)}.
$$

Тук сме означили

$$
\Delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}^2,
$$

$$
\begin{aligned}
G_{\nu 0}^{(1)} = {} & \sin(a_\nu - a_{3-\nu})[(H_{3-\nu} - H_\nu)H_{3-\nu}p^2 - H_{3-\nu}^2 p^2] + (5 - 2\nu)\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 \frac{g}{2a}\sin a_\nu\\
& + \omega_0\omega_1[(a_{\nu\nu}\cos 2a_\nu - 2\sin a_1 \sin a_2)H_\nu + 2\cos a_1 \cos a_2\,.\,H_{3-\nu}]\\
& - \frac{1}{2}\omega_0^2[(7 - 3\nu)\sin 2a_\nu\,.\,H_\nu^2 + 2\sin a_\nu \cos a_{3-\nu}\,.\,H_1 H_2 + \cos a_\nu \sin a_{3-\nu}\,.\,H_{3-\nu}^2],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{\nu,3-\nu}^{(1)} = {} & \sin(a_\nu - a_{3-\nu})[(H_\nu - H_{3-\nu})H_{3-\nu}p^2 - H_{3-\nu}^2 p^2] - (5 - 2\nu)\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 \frac{g}{2a}\sin a_\nu\\
& - \omega_0\omega_1[(a_{\nu\nu}\cos 2a_\nu - 2\sin a_1 \sin a_2)H_\nu + 2\cos a_1 \cos a_2\,.\,H_{3-\nu}]\\
& + \frac{1}{2}\omega_0^2[(7 - 3\nu)\sin 2a_\nu\,.\,H_\nu^2 + 2\sin a_\nu \cos a_{3-\nu}\,.\,H_1 H_2 + \cos a_\nu \sin a_{3-\nu}\,.\,H_{3-\nu}^2].
\end{aligned}
$$

Да се спрем на въпроса за устойчивостта на периодичните решения на (21). Тук ще използваме някои резултати от [2].

Системата във вариации на (5) е

$$a_{\nu 1}\ddot{y}_1+a_{\nu 2}\ddot{y}_2+c_{\nu 1}y_1+c_{\nu 2}y_2=\lambda F_\nu^*,\quad \nu=1,2, \tag{22}$$

където

$$F_\nu^*=2\sin(a_\nu-a_{3-\nu})[(\psi_\nu-\psi_{3-\nu})\ddot{y}_{3-\nu}+\ddot{\psi}_{3-\nu}(y_\nu-y_{3-\nu})-2\dot{\psi}_{3-\nu}\dot{y}_{3-\nu}]$$
$$+2\omega_0\omega_1\sin pt\,[(a_{\nu\nu}\cos 2a_1-2\sin a_1\sin a_2)y_\nu+2\cos a_1\cos a_2\,.\,y_{3-\nu}]$$
$$-2\omega_0^2[(7-3\nu)\sin 2a_\nu\,.\,\psi_\nu y_\nu+\sin a_\nu\cos a_{3-\nu}(\psi_1 y_2+\psi_2 y_1)$$
$$+\cos a_\nu\sin a_{3-\nu}\,.\,\psi_{3-\nu}y_{3-\nu}].$$

Търсим фундаментална система интеграли на (22) от вида

$$y_{\nu k}(t)=y_{\nu k}^{(0)}+\lambda y_{\nu k}^{(1)}+\cdots\quad k=1,2,3,4, \tag{23}$$

при начални условия

$$y_{1k}(0)=1,\quad y_{2k}(0)=v_k,\quad \dot{y}_{1k}(0)=\dot{y}_{2k}(0)=0,\quad k=1,2;$$
$$y_{1k}(0)=y_{2k}(0)=0,\quad \dot{y}_{1k}(0)=\varrho_{k-2},\quad \dot{y}_{2k}(0)=v_{k-2}\varrho_{k-2},\quad k=3,4,$$

където

$$v_k=\frac{L_{2k}}{L_{1k}}=-\frac{c_{11}-\varrho_k^2a_{11}}{c_{12}-\varrho_k^2a_{12}}=-\frac{c_{21}-\varrho_k^2a_{21}}{c_{22}-\varrho_k^2a_{22}},\quad k=1,2.$$

Тези интеграли ни дават възможност по аналогичен начин както в [2] да намерим характеристичното уравнение на системата (5), което е едно алгебрично уравнение от четвърта степен. От [3] е известно, че ако корените му лежат във вътрешността на единичния кръг ($|z|=1$), периодичните движения са асимптотично устойчиви. Условията за това са

$$\begin{aligned}&4(\cos n_1-\cos n_2)^4-\sin^4 n_1\sin^4 n_2>0,\\ &\delta_1N_1-\gamma N_2>0,\\ &\delta_2N_1-\gamma N_2<0.\end{aligned} \tag{25}$$

Тук

$$\delta_{1,2}=2(\cos n_1-\cos n_2)^2\pm\sqrt{4(\cos n_1-\cos n_2)^4-\sin^4 n_1\sin^4 n_2}\qquad(\delta_1<\delta_2),$$
$$\gamma=(1-\cos n_1)(1-\cos n_2)(1+\cos n_1)^2,$$
$$N_\nu=\frac{n_{3-\nu}\sin^2 n_\nu\,.\,(Q_\nu\pi+R_\nu n_\nu)}{2\Delta_1\varrho_1\varrho_2(v_1-v_2)(n_\nu^2-\pi^2)},\quad \nu=1,2,$$

при което сме означили

$$Q_\nu=(a_{21}+v_{3-\nu}a_{22})\Big\{2\sin(a_1-a_2)[(H_1-H_2)v_\nu\varrho_\nu^2+H_2p^2(1-v_\nu)]$$
$$-2\omega_0\omega_1\left[\frac{16}{3}\cos 2a_1-2\sin a_1\sin a_2+2\cos a_1\cos a_2\,.\,v_\nu\right]$$
$$+2\omega_0^2[4\sin 2a_1\,.\,H_1+\sin a_1\cos a_2\,.\,(H_1v_\nu+H_2)+\cos a_1\sin a_2\,.\,H_2v_\nu]\Big\}$$

$$
-(a_{11}+v_{3-\nu}\,a_{12})\Big\{2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\left[(H_1-H_2)\varrho_\nu^2+H_1 p^2(1-v_\nu)\right]
$$

$$
-2\omega_0\omega_1\left[\left(\frac{4}{3}\cos 2\alpha_2-2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\right)v_\nu+2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\right]
$$

$$
+2\omega_0^2\left[\sin 2\alpha_2\,.\,H_2v_\nu+\cos\alpha_1\sin\alpha_2(H_1v_\nu+H_2)+\sin\alpha_1\cos\alpha_2\,.\,H_1\right]\Big\},
$$

$$
R_\nu=4\sin(\alpha_1-\alpha_2)\,.\,p\varrho_\nu\left[H_1(a_{11}+v_{3-\nu}\,a_{12})+H_2v_\nu(a_{21}+v_{3-\nu}\,a_{22})\right],\quad \nu=1,2.
$$

От горните изрази се вижда, че N_2 се получава от N_1, като заместим n_2 с n_1 и обратно и Q_1, R_1 с Q_2, R_2, а Q_2 и R_2 се получават от Q_1 и R_1, като заместим ν_1 с ν_2, ϱ_1 с ϱ_2 и обратно.

Неравенствата (25) ни дават условията за устойчивост на периодичните движения на разглежданата система от два последователно свързани пръта около невертикалното устойчиво равновесно положение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Манолов, Сп. Особен случай на съществуване на малки периодични движения на две въртящи се махала и невертикални малки периодични движения. Год. на ИСИ, 9 (1957), кн. 1, 3–28.
2. Брадистилов, Г. Д., Г. Н. Бояджиев, Б. И. Чешанков. Периодични движения и устойчивост на двойно физично махало, разположено в равнина, която се върти с променлива ъглова скорост. Год. на ВТУЗ, Математика, 1, (1965), кн. 1, 33–44.
3. Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.

Постъпила на 26. IV. 1966 г.

КОЛЕБАНИЯ ДВУХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СВЯЗАННЫХ ОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ В ПЛОСКОСТИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ С ПЕРЕМЕННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Спас Манолов, Георги Бояджиев и Божидар Чешанков

Резюме

Рассматривается вопрос о существовании периодических движений и их устойчивости двух последовательно связанных однородных стержней в плоскости, которая вращается с переменной угловой скоростью вида $\omega=\omega_0+\omega_1^*\sin pt$ (где $\omega_0=\mathrm{const}$, а ω_1^* предполагается малой относительно ω_0), в окрестности невертикального устойчивого равновесия.

Доказывается существование периодических движений с периодом $2\pi/p$ и находятся условия (25) их устойчивости.

UBER DIE SCHWINGUNGEN VON ZWEI NACHEINANDER ZUSAMMENGEBUNDENEN HOMOGENEN STANGEN IN EINER SICH MIT VERÄNDERLICHER WINKELGESCHWINDIGKEIT DREHENDEN EBENE

Spas Manolov, Georgi Bojadžiev, Božidar Češankov

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das Problem der Existenz von periodischen Bewegungen und deren Stabilität in der Umgebung der nichtvertikalen Lage des stabilen Gleichgewichtes von zwei nacheinander gekoppelten homogenen Stangen betrachtet. Sie befinden sich in einer Ebene, die sich mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit von der Form $\omega=\omega_0+\omega_1^* \sin pt$ dreht, wo $\omega_0=\text{const}$, und ω_1^* klein anzunehmen ist im Vergleich mit ω_0.

Man beweist die Existenz von periodischen Bewegungen mit einer Periode $2\pi/p$ und man findet die Bedingungen (25) für deren Stabilität.