БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

# ВЪРХУ ПЕРИОДИЧНИТЕ РЕШЕНИЯ НА ЕДИН КЛАС ОТ АВТОНОМНИ СИСТЕМИ С МАЛЪК ПАРАМЕТЪР ПРИ НЕЛИНЕЙНОСТ ОТ ДАДЕН ВИД

**Спас Манолов**

1. Да разгледаме нелинейната и автономна система

$$(1.1)\qquad \sum_{s=1}^{n} A_{is}\ddot{\psi}_s=\sum_{s=1}^{n} B_{is}\psi_s+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{2k} f_{ik}(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n,\dot{\psi}_1,\dot{\psi}_2,\ldots,\dot{\psi}_n),$$
$$i=1,2,3,\ldots,n,$$

където $\lambda^2$ е малък параметър, за достатъчно малки стойности на който отбелязаните в (1.1) развития са сходящи. Функциите $f_{ik}(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n,\dot{\psi}_1,\dot{\psi}_2,\ldots\dot{\psi}_n)$ са аналитични и удовлетворяват условията

$$(1.2)\qquad f_{ik}(-\psi_1,-\psi_2,\ldots,-\psi_n,\dot{\psi}_1,\dot{\psi}_2,\ldots,\dot{\psi}_n)=-f_{ik}(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n,\dot{\psi}_1,\dot{\psi}_2,\ldots,\dot{\psi}_n),\ i=1,2,3,\ldots,n;\ k=1,2,3,\ldots$$

В редица работи се изследват механични системи от определен клас, движенията на които се описват от автономни системи диференциални уравнения от вида (1.1) и придружени от условията (1.2). Ще споменем в тази насока една основна работа на Брадистилов [1], както и някои наши работи [2], [3]. [4], [5]. По този повод разгледахме в една предишна работа [6] автономни системи от вида (1.1). Възможно е да се отбележат интересни резултати за системи, чиито десни страни имат свойства, подобни и по-общи от тези, дадени с (1.2). Да посочим в този смисъл съгласно монографията [7] на Cesari няколко от работите [8], [9], [10] на Cesari, Hale и Gambill. В една работа на Красносельский и Перов [11] са получени интересни резултати за системи от определен вид и притежаващи свойствата (1.2). Тази работа е придружена и от една богата библиография в казаната насока. Можем да отбележим накрая, че изследванията в нашата работа [6] разглеждат един специален случай. Особеността на този случай се състои както в подходящия подбор на началните условия, така и в целите стойности на отношението от корените на съответното характеристично уравнение.

Въз основа на едно свойство на системата (1.1), което се дължи на условията (1.2), се доказва следната

Теорема 1. Нека $\psi_i(t)$ е решение на системата (1.1), за което $\psi_i(0)=0$. Ако $\psi_i(q)=0$, $q=\mathrm{const}>0$, то това решение е периодично с период $2q$.

Необходимо е да отбележим, че условието за периодичност от горната теорема е използвано във всяка от работите [1], [3], [4], [5], [6]. Доказателството на теорема 1 може да се направи по следния сравнително прост начин [1], [3]. Дефинират се подходящо подбрани функции $\mu_i(t)$, $i=1, 2, 3, \ldots, n$, в интервала $[0, 2q)$. След това тези функции се продължават периодично надясно с период, равен на $2q$. Освен това се показва, че функциите $\mu_i(t)$ образуват решение на (1.1) при начални условия, еднакви с тези на решението $\psi_i(t)$. От основната теорема на теорията на диференциалните уравнения следва, че $\psi_i(t)=\mu_i(t)$. Да отбележим, че в една работа [12], [13] на Heinbockel и Struble, публикувана неотдавна, е дадено интересно доказателство на една теорема, напълно аналогична с теорема 1.

Да означим с $(1.1_2)$ системата (1.1) в случая, когато $n=2$, а с $(1.1_{20})$ ще бележим системата, получена от $(1.1_2)$ при $\lambda^2=0$. Предполагаме, че характеристичното уравнение

$$(A_{11}\varrho^2-B_{11})(A_{22}\varrho^2-B_{22})-(A_{21}\varrho^2-B_{21})(A_{12}\varrho^2-B_{12})=0 \tag{1.3}$$

на системата $(1.1_{20})$ притежава спрямо $\varrho^2$ два различни отрицателни корена $(-1)k_i^2$, $i=1, 2$, за които отношението $k_1/k_2$ е цяло число $k>1$. Означаваме с $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2})$, $i=1, 2$, кое да е ненулево решение на линейната хомогенна система

$$(A_{j1}k_i^2+B_{j1})\lambda_1+(A_{j2}k_i^2+B_{j2})\lambda_2=0,\ j=1, 2.$$

Нека $\psi_{i0}(t)$ е решение на системата $(1.1_{20})$, което се получава при начални условия

$$\psi_{i0}(0)=0,\ \dot\psi_{i0}(0)=p_i+q_iN.$$

В случая $N$ е параметър, а числата $p_i$ и $q_i$ приемат според това, кой от четирите случая I, II, III или IV се взема пред вид, следните стойности:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}:\ p_i=\lambda_{1i},\ q_i=k\lambda_{2i};\quad \mathrm{II}:\ p_i=\lambda_{2i},\ q_i=k\lambda_{1i};\\ &\mathrm{III}:\ p_i=\lambda_{1i},\ q_i=\frac{1}{k}\lambda_{2i};\ \mathrm{IV}:\ p_i=\lambda_{2i}\ q_i=\frac{1}{k}\lambda_{1i}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

За решението $\psi_{i0}(t)$ се получава

$$\psi_{i0}(t)=r_i\sin kk_2t+s_i\sin k_2t,\ i=1, 2, \tag{1.5}$$

където коефициентите $r_i$, и $s_i$ имат съответно стойностите

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}:\ r_i=\frac{1}{kk_2}\lambda_{1i},\ s_i=\frac{kN}{k_2}\lambda_{2i};\quad \mathrm{II}:\ r_i=\frac{N}{k_2}\lambda_{1i},\ s_i=\frac{1}{k_2}\lambda_{2i};\\ &\mathrm{III}:\ r_i=\frac{1}{kk_2}\lambda_{1i}.\ s_i=\frac{N}{kk_2}\lambda_{2i};\ \mathrm{IV}:\ r_i=\frac{N}{k^2k_2}\lambda_{1i},\ s_i=\frac{1}{k_2}\lambda_{2i}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Нека $P_i(t)$ е тога решение на системата $(1.1_{20})$, което има начални условия $P_i(0)=0$ и $\dot P_i(0)=q_i$. Следователно

$$\mathrm{I, III}:\ P_i(t)=x_{1i}\sin k_2t;\ \mathrm{II, IV}:\ P_i(t)=x_{2i}\sin kk_2t, \tag{1.7}$$

като $x_{1i}=\lambda_{2i}\frac{k}{k_2}$ и $x_{1i}=\lambda_{2i}\frac{1}{kk_2}$ съответно за случаите I и III, а $x_{2i}=\lambda_{1i}\frac{1}{k_2}$ и $x_{2i}=\lambda_{1i}\frac{1}{k^2k_2}$, съответно за случаите II и IV.

От друга страна, да означим с $Q_i(t)$, $i=1,2$, това решение на линейната нехомогенна система

$$A_{i1}\ddot{Q}_1+A_{i2}\ddot{Q}_2=B_{i1}Q_1+B_{i2}Q_2+f_{i1}(\psi_{10}(t),\ \psi_{20}(t),\ \dot{\psi}_{10}(t),\ \dot{\psi}_{20}(t)), \tag{1.8}$$

което се получава при начални условия $Q_i(0)=\dot{Q}_i(0)=0$.

Освен това $R_i(t)$ е решението на системата

$$\begin{aligned}A_{i1}\ddot{R}_1\quad A_{i2}\ddot{R}_2=B_{i1}R_1+B_{i2}R_2&+\frac{\partial f_{i1}(\psi_{10},\ \psi_{20},\ \dot{\psi}_{10},\ \dot{\psi}_{20})}{\partial\psi_1}\cdot P_1(t)\\ &+\frac{\partial f_{i1}(\psi_{10},\ \psi_{20},\ \dot{\psi}_{10},\ \dot{\psi}_{20})}{\partial\psi_2}\cdot P_2(t)+\frac{\partial f_{i1}(\psi_{10},\ \psi_{20},\ \dot{\psi}_{10},\ \dot{\psi}_{20})}{\partial\dot{\psi}_1}\cdot\dot{P}_1(t)\\ &+\frac{\partial f_{i1}(\psi_{10},\ \psi_{20},\ \dot{\psi}_{10},\ \dot{\psi}_{20})}{\partial\dot{\psi}_2}\cdot\dot{P}_2(t),\ i=1,\ 2,\end{aligned} \tag{1.9}$$

което е получено с начални условия $R_i(0)=\dot{R}_i(0)=0$. Един от резултатите, доказани в [6], се формулира със следната

Теорема 2. Нека параметърът $N$ удовлетворява уравнението

$$(\varepsilon r_1k-s_1)Q_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-(\varepsilon r_2k-s_2)Q_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=0 \tag{1.10}$$

и неравенствата

$$\begin{aligned}&\text{I, III}:\ (\varepsilon r_1k-s_1)R_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-(\varepsilon r_2k-s_2)R_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)+x_{12}Q_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-x_{11}Q_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\neq0,\\ &\text{II, IV}:\ (\varepsilon r_1k-s_1)R_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-(\varepsilon r_2k-s_2)R_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)+\varepsilon x_{21}kQ_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\\ &\qquad\qquad-\varepsilon x_{22}kQ_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\neq0,\end{aligned} \tag{1.11}$$

където $\varepsilon=\pm1$ според това, дали цялото число $k>1$ е четно или нечетно. Възможно е тогава да се намерят такива достатъчно малки функции $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ на малкия параметър $\lambda^2$, че решението $\psi_i(t)$ на системата ($1.1_2$) с начални условия $\psi_i(0)=0$ и $\dot{\psi}_i(0)=p_i+q_i\,(N+\beta(\lambda^2))$ да бъде периодично с периода $\frac{2}{k_2}\,(\pi+\delta(\lambda^2))$.

Ще отбележим, че при доказателството на теорема 2 се използват някои разглеждания от една работа [14] на Брадистилов.

Същността на изследванията в [6] се състои в построяването на периодичните решения, съществуването на които се осигурява от теорема 2, и на техните периоди. Необходимо е да отбележим, че при тези построения се използва за разлика от обичайните разглеждания в тази насока единствено условието за периодичност от теорема 1. То прочее поражда и условията (1.10) и (1.11) от теорема 2. Резултатът от изследванията върху казаните по-горе построявания се изразява в една сравнително обща форма чрез следващата

Теорема 3. *Условията* (1.10) и (1.11) са достатъчни, за да бъдат напълно определени

а) коефициентите $a_1, a_2, a_3, \ldots$ от развитието на съответния период $\frac{2\pi}{k_2}(1+a_1\lambda^2+a_2\lambda^4+\cdots)$ и

б) функциите $\Psi_{i,m}(\tau)$, с които се намира посредством формулата

$$\psi_i(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{i,m}\left(\frac{t}{1+a_1\lambda^2+a_2\lambda^4+\cdots}\right)\lambda^{2m} \tag{1.12}$$

търсенето периодично решение $\psi_i(t)$ на системата $(1.1_2)$.

Както виждаме, основна роля при изследванията от [6] играят условията (1.10) и (1.11) за параметъра $N$, който участвува в началните условия от теорема 2. Ето защо представлява интерес едно изследване за възможностите за реализиране на условията (1.10) и (1.11) при някои класи от функциите $f_{ik}$. Тези функции участвуват в системите (1.1) и $(1.1_2)$. Този именно въпрос е обект на изследване в настоящата работа.

**2.** Да предположим, че функциите $f_{ik}$ са линейни, т. е.

$$f_{ik}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)=a^1_{ik}\psi_1+a^2_{ik}\psi_2+a^3_{ik}\dot{\psi}_1+a^4_{ik}\dot{\psi}_2+a^5_{ik}.$$

След като изразим условието (1.2), ще получим $a^3_{ik}=a^4_{ik}=a^5_{ik}=0$.

Като въведем и по-простите означения $a^1_{ik}=a_{ik}$ и $a^2_{ik}=b_{ik}$, намираме окончателно

$$f_{ik}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)=a_{ik}\psi_1+b_{ik}\psi_2,\quad i=1, 2;\ k=1, 2, 3, \ldots$$

При този избор на функциите $f_{ik}$ системата $(1.1_2)$ е в същност линейна с малък параметър и следователно тя може да се третира директно. За пълнота обаче ще приложим общите разглеждания и при този по-прост случай.

Системата (1.8) приема вида

$$A_{i1}\ddot{Q}_1+A_{i2}\ddot{Q}_2=B_{i1}Q_1+B_{i2}Q_2+a_{i1}(r_1\sin kk_2t+s_1\sin k_2t)$$
$$+b_{i1}(r_2\sin kk_2t+s_2\sin k_2t).$$

Следователно функциите $Q_i(t)$ имат вида

$$Q_i(t)=\frac{\lambda_{1i}}{kk_2\Delta D}\int_0^t[(A_{11}\lambda_{21}+A_{12}\lambda_{22})f_{21}(u)-(A_{21}\lambda_{21}+A_{22}\lambda_{22})f_{11}(u)] \tag{2.1}$$
$$\times\sin kk_2(u-t)\,du+\frac{\lambda_{2i}}{k_2\Delta D}\int_0^t[(A_{21}\lambda_{11}+A_{22}\lambda_{12})f_{11}(u)$$
$$-(A_{11}\lambda_{11}+A_{12}\lambda_{12})f_{21}(u)]\sin k_2(u-t)\,du,$$

където $f_{i1}(u)=a_{i1}(r_1\sin kk_2u+s_1\sin k_2u)+b_{i1}(r_2\sin kk_2u+s_2\sin k_2u)$.

Тук са направени полаганията $\Delta=\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21}$ и $D=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}$. След преобразуване в (2.1) получаваме

$$(2.2)\qquad Q_i(t)=\frac{\lambda_{1i}}{kk_2\Delta D}\int_0^t (L_1\sin kk_2u+L_2\sin k_2u)\sin kk_2(u-t)\,du$$

$$+\frac{\lambda_{2i}}{k_2\Delta D}\int_0^t (L_3\sin kk_2u+L_4\sin k_2u)\sin k_2(u-t)\,du,$$

където са въведени означенията

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} L_1&=(r_1a_{21}+r_2b_{21})(A_{11}\lambda_{21}+A_{12}\lambda_{22})-(r_1a_{11}+r_2b_{11})(A_{21}\lambda_{21}+A_{22}\lambda_{22}),\\ L_2&=(s_1a_{21}+s_2b_{21})(A_{11}\lambda_{21}+A_{12}\lambda_{22})-(s_1a_{11}+s_2b_{11})(A_{21}\lambda_{21}+A_{22}\lambda_{22}),\\ L_3&=(r_1a_{11}+r_2b_{11})(A_{21}\lambda_{11}+A_{22}\lambda_{12})-(r_1a_{21}+r_2b_{21})(A_{11}\lambda_{11}+A_{12}\lambda_{12}),\\ L_4&=(s_1a_{11}+s_2b_{11})(A_{21}\lambda_{11}+A_{22}\lambda_{12})-(s_1a_{21}+s_2b_{21})(A_{11}\lambda_{11}+A_{12}\lambda_{12}).\end{aligned}$$

Като се замести в (2.2) $t$ с $\pi/k_2$, се получава

$$Q_i(t)=\frac{\varepsilon\lambda_{1i}L_1}{kk_2\Delta D}\int_0^{\pi/k_2}\sin^2 kk_2u\,du-\frac{\lambda_{2i}L_4}{k_2\Delta D}\int_0^{\pi/k_2}\sin^2 k_2u\,du$$

$$+\left(\frac{\varepsilon\lambda_{1i}L_2}{kk_2\Delta D}-\frac{\lambda_{2i}L_3}{k_2\Delta D}\right)\int_0^{\pi/k_2}\sin kk_2u\sin k_2u\,du.$$

След някои изчисления последното равенство приема вида

$$(2.4)\qquad Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=\frac{\pi}{2kk_2^2\Delta D}(\varepsilon\lambda_{1i}L_1-k\lambda_{2i}L_4).$$

Като се върнем към означенията (2.3) и вземем пред вид (2.4), за уравнението (1.10) от теорема 2 намираме

$$(2.5)\qquad \begin{aligned}&[\lambda_{12}(kr_1-\varepsilon s_1)-\lambda_{11}(kr_2-\varepsilon s_2)][(a_{21}r_1+b_{21}r_2)(A_{11}\lambda_{21}+A_{12}\lambda_{22})\\ &-(a_{11}r_1+b_{11}r_2)(A_{21}\lambda_{21}+A_{22}\lambda_{22})]-k[\lambda_{22}(\varepsilon kr_1-s_1)-\lambda_{21}(\varepsilon kr_2-s_2)]\\ &\times[(a_{11}s_1+b_{11}s_2)(A_{21}\lambda_{11}+A_{22}\lambda_{12})-(a_{21}s_1+b_{21}s_2)(A_{11}\lambda_{11}+A_{12}\lambda_{12})]=0.\end{aligned}$$

Ще разгледаме подробно уравнението (2.5) в случая I, при който, както е известно от (1.6), $r_i=\frac{1}{kk_2}\lambda_{1i}$ и $s_i=\frac{kN}{k_2}\lambda_{2i}$. По аналогичен начин могат да бъдат разгледани и останалите три случая. При случая I след преработване (2.5) се преобразува в

$$(2.6)\qquad \begin{aligned}&[\lambda_{11}\lambda_{21}(1+k^2)(a_{21}A_{11}-a_{11}A_{21})+\lambda_{12}\lambda_{22}(1+k^2)(b_{21}A_{12}-b_{11}A_{22})\\ &+(\lambda_{11}\lambda_{22}+k^2\lambda_{12}\lambda_{21})(a_{21}A_{12}-a_{11}A_{22})+(k^2\lambda_{11}\lambda_{22}+\lambda_{12}\lambda_{21})(b_{21}A_{11}-b_{11}A_{21})]N=0.\end{aligned}$$

Предстои да разгледаме в случая I и условието (1.11) от теорема 2. За системата (1.9) се получава

$$A_{i1}\ddot{R}_1 + A_{i2}\ddot{R}_2 = B_{i1}R_1 + B_{i2}R_2 + (a_{i1}x_{11} + b_{i1}x_{12})\sin k_2 t.$$

Възможно е следователно да се намери решението $R_i(t)$, а от него и $R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$. След съответните изчисления се установява, че

$$R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = -\frac{\pi\lambda_{2i}}{2k_2^2 \Delta D}\,[(A_{21}\lambda_{11} + A_{22}\lambda_{12})(a_{11}x_{11} + b_{11}x_{12}) \tag{2.7}$$
$$-(A_{11}\lambda_{11} + A_{12}\lambda_{12})(a_{21}x_{11} + b_{21}x_{12})].$$

След като се пресметнат от (2.4) и (2.7) стойностите на $Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ и $R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$, условието (1.11) се обръща в

$$\lambda_{11}\lambda_{21}(1+k^2)(a_{21}A_{11} - a_{11}A_{21}) + \lambda_{12}\lambda_{22}(1+k^2)(b_{21}A_{12} - b_{11}A_{22}) \tag{2.8}$$
$$+(\lambda_{11}\lambda_{22} + k^2\lambda_{12}\lambda_{21})(a_{21}A_{12} - a_{11}A_{22}) + (k^2\lambda_{11}\lambda_{22} + \lambda_{12}\lambda_{21})(b_{21}A_{11} - b_{11}A_{21}) \neq 0.$$

От (2.8) следва, че единственото решение на (2.6) е $N=0$.

Като вземем пред вид системата от т. 1, която определяше двойката $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2})$, $i=1, 2$, намираме лесно

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= -(A_{12}k^2k_2^2 + B_{12})h_1, \quad \lambda_{12} = (A_{11}k^2k_2^2 + B_{11})h_1;\\ \lambda_{21} &= -(A_{12}k_2^2 + B_{12})h_2, \quad \lambda_{22} = (A_{11}k_2^2 + B_{11})h_2,\end{aligned} \tag{2.9}$$

където $h_1$ и $h_2$ са ненулеви множители. От друга страна, заместваме в характеристичното уравнение (1.3) $\varrho^2$ последователно с $(-1)k_1^2 = -k^2k_2^2$ и $k_2^2$, а след това изваждаме получените две равенства. Така добиваме

$$k_2^2 = \frac{A_{12}B_{21} + A_{21}B_{12} - A_{11}B_{22} - A_{22}B_{11}}{(1+k^2)(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}. \tag{2.10}$$

Сега вместо да изваждаме казаните по-горе две равенства, умножаваме второто от тях с $(-k^2)$ и полученото прибавяме към първото равенство. Намираме по този начин релацията

$$k_2^4 = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}}{k^2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}. \tag{2.11}$$

Като се използват (2.11), (2.10) и (2.9), условието (2.8) приема след известна преработка вида (2.12).

Преди да формулираме окончателния резултат, ще въведем означението $(1.1_{21})$ (за системата $(1.1_2)$ в случая, когато условията (1.2) са удовлетворени поради избора

$$f_{ik}(\psi_1, \psi_2, \psi_1', \psi_2') = a_{ik}\psi_1 + b_{ik}\psi_2', \quad i=1, 2; \ k=1, 2, 3, \ldots$$

**Теорема 4.** Ако са удовлетворени условията

$$\begin{aligned} &A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11} \neq 0,\\ &[(A_{11}B_{22} - A_{21}B_{12})(1+k^4) + 2(A_{12}B_{21} - A_{22}B_{11})k^4](a_{21}A_{12} - a_{11}A_{22})\\ &+[(A_{12}B_{21} - A_{22}B_{11})(1+k^4) + 2(A_{11}B_{22} - A_{21}B_{12})k^2](b_{21}A_{11} - b_{11}A_{21})\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$+(1+k^2)^2[(A_{22}B_{12}-A_{12}B_{22})(a_{21}A_{11}-a_{11}A_{21})+(A_{21}B_{11}$$
$$-A_{11}B_{21})(b_{21}A_{12}-b_{11}A_{22})]\neq 0,$$

то е възможно определянето на $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ като достатъчно малки функции на $\lambda^2$, така че решението $\psi_i(t)$ на системата $(1.1_{21})$, получено при начални условия

$$\psi_i(0)=0 \text{ и } \dot{\psi}_i(0)=\lambda_{1i}+k\lambda_{2i}\beta(\lambda^2)),$$

да бъде периодично с период $\frac{2}{k_2}(\pi+\delta(\lambda^2))$.

Да отбележим, че можем да намерим последователните приближения на периодичното решение $\psi_i(t)$ и на неговия период. Достатъчно е за тази цел да приложим теорема 3, като използваме подробно разглежданията в тази насока от нашата работа [6].

3. Да разгледаме по-сложния случай, когато $f_{ik}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$ е многочлен от втора степен. Тогава

$$f_{ik}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)=a_{ik}^{11}\psi_1^2+a_{ik}^{22}\psi_2^2+a_{ik}^{33}\dot{\psi}_1^2+a_{ik}^{44}\dot{\psi}_2^2+a_{ik}^{12}\psi_1\psi_2+a_{ik}^{13}\psi_1\dot{\psi}_1$$
$$+a_{ik}^{14}\psi_1\dot{\psi}_2+a_{ik}^{23}\psi_2\dot{\psi}_1+a_{ik}^{24}\psi_2\dot{\psi}_2+a_{ik}^{34}\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2+a_{ik}^{15}\psi_1+a_{ik}^{25}\psi_2+a_{ik}^{35}\dot{\psi}_1+a_{ik}^{45}\dot{\psi}_2+a_{ik}^{55}.$$

Като вземем пред вид условията (1.2), намираме

$$a_{ik}^{11}=a_{ik}^{22}=a_{ik}^{33}=a_{ik}^{44}=a_{ik}^{12}=a_{ik}^{34}=a_{ik}^{35}=a_{ik}^{45}=a_{ik}^{55}=0.$$

Въвеждаме и по-простите означения $a_{ik}^{13}=a_{ik}$, $a_{ik}^{14}=b_{ik}$, $a_{ik}^{23}=c_{ik}$, $a_{ik}^{24}=d_{ik}$, $a_{ik}^{15}=e_{ik}$, $a_{ik}^{25}=g_{ik}$. Следователно

$$f_{ik}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)=a_{ik}\psi_1\dot{\psi}_1+b_{ik}\psi_1\dot{\psi}_2+c_{ik}\psi_2\dot{\psi}_1+d_{ik}\psi_2\dot{\psi}_2+e_{ik}\psi_1+g_{ik}\psi_2, \tag{3.1}$$
$$i=1, 2;\ k=1, 2, 3, \ldots$$

Функциите $Q_i(t)$ отново се определят чрез (2.1), но в случая функциите $f_{i1}(u)$ имат вида

$$\begin{aligned} f_{i1}(u)=\ & kk_2(a_{i1}r_1^2+b_{i1}r_1r_2+c_{i1}r_2r_1+d_{i1}r_2^2)\sin kk_2u\cos kk_2u \\ & +k_2(a_{i1}r_1s_1+b_{i1}r_1s_2+c_{i1}r_2s_1+d_{i1}r_2s_2)\sin kk_2u\cos k_2u \\ & +kk_2(a_{i1}r_1s_1+b_{i1}s_1r_2+c_{i1}s_2r_1+d_{i1}s_2r_2)\cos kk_2u\sin k_2u \\ & +k_2(a_{i1}s_1^2+b_{i1}s_1s_2+c_{i1}s_2s_1+d_{i1}s_2^2)\sin k_2u\cos k_2u \\ & +(e_{i1}r_1+g_{i1}r_2)\sin kk_2u+(e_{i1}s_1+g_{i1}s_2)\sin k_2u. \end{aligned} \tag{3.2}$$

След определянето на $\dot{Q}_i(t)$ е възможно намирането и на $Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$. Чрез преобразуване се получава

$$\begin{aligned} Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=\frac{\varepsilon\pi\lambda_{1i}}{2kk_2^2\Delta D}\ & [(A_{11}\lambda_{21}+A_{12}\lambda_{22})(e_{21}r_1+g_{21}r_2) \\ & -(A_{21}\lambda_{21}+A_{22}\lambda_{22})(e_{11}r_1+g_{11}r_2)] \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\frac{\pi\lambda_{2i}}{2k_2^2\Delta D}[(A_{21}\lambda_{11}+A_{22}\lambda_{12})(e_{11}s_1+g_{11}s_2)-(A_{11}\lambda_{11}+A_{12}\lambda_{12})(e_{21}s_1+g_{21}s_2)],$$

когато $k$ е цяло число $\geq 3$, и

$$Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=\frac{\pi\lambda_{1i}}{8k_2^2\Delta D}\{(A_{11}\lambda_{21}+A_{12}\lambda_{22})[2(e_{21}r_1+g_{21}r_2)$$
$$+k_2(a_{21}s_1^2+b_{21}s_1s_2+c_{21}s_2s_1+d_{21}s_2^2)]$$
$$-(A_{21}\lambda_{21}+A_{22}\lambda_{22})[2(e_{11}r_1+g_{11}r_2)+k_2(a_{11}s_1^2+b_{11}s_1s_2+c_{11}s_2s_1+d_{11}s_2^2)]\}$$
$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{4k_2^2\Delta D}\{(A_{21}\lambda_{11}+A_{22}\lambda_{12})[2(e_{11}s_1+g_{11}s_2)-2k_2(a_{11}r_1s_1+b_{11}s_1r_2+c_{11}s_2r_1+d_{11}s_2r_2)$$
$$+k_2(a_{11}r_1s_1+b_{11}r_1s_2+c_{11}r_2s_1+d_{11}s_2r_2)]-(A_{11}\lambda_{11}+A_{12}\lambda_{12})[2(e_{21}s_1+g_{21}s_2)$$
$$-2k_2(a_{21}r_1s_1+b_{21}s_1r_2+c_{21}s_2r_1+d_{21}s_2r_2)+k_2(a_{21}r_1s_1+b_{21}r_1s_2+c_{21}r_2s_1+d_{21}s_2r_2)]\}, \tag{3.4}$$

когато $k=2$. При намирането на (3.3) и (3.4) са използвани формулите

$$\int_0^{\pi/k_2}\sin^2 kk_2u\cos kk_2u\,.\,du=\int_0^{\pi/k_2}\sin^2 kk_2u\cos k_2u\,.\,du=\int_0^{\pi/k_2}\sin^2 k_2u\cos k_2u\,.\,du$$
$$=\int_0^{\pi/k_2}\sin kk_2u\sin k_2u\,.\,du=\int_0^{\pi/k_2}\sin kk_2u\cos kk_2u\sin k_2u\,.\,du=0,$$

$$\int_0^{\pi/k_2}\sin^2 kk_2u\,.\,du=\int_0^{\pi/k_2}\sin^2 k_2u\,.\,du=\frac{\pi}{2k_2}, \tag{3.5}$$

$$\int_0^{\pi/k_2}\sin kk_2u\sin k_2u\cos k_2u\,.\,du=-\int_0^{\pi/k_2}\sin^2 k_2u\cos kk_2u\,.\,du=\begin{cases}0 & (k>2 \text{ цяло}),\\ \frac{\pi}{4k_2} & (k=2).\end{cases}$$

Функциите $R_i(t)$ се определят също така чрез формула, аналогична на тази от (2.1), като ролята на функциите $f_{i,1}(u)$ ще се изпълнява съгласно вида на системата (1.9) от функциите

$$\bar{f}_{i,1}(u)=kk_2(x_{11}r_1a_{i1}+x_{11}r_2b_{i1}+x_{12}r_1c_{i1}+x_{12}r_2d_{i1})\cos kk_2u\sin k_2u$$
$$+k_2(2s_1x_{11}a_{i1}+s_2x_{11}b_{i1}+s_1x_{12}b_{i1}+s_1x_{12}c_{i1}+s_2x_{11}c_{i1}+2s_2x_{12}d_{i1})\cos k_2u\sin k_2u$$
$$+k_2(x_{11}r_1a_{i1}+x_{11}r_2c_{i1}+x_{12}r_1b_{i1}+x_{12}r_2d_{i1})\sin kk_2u\cos k_2u$$
$$+(e_{i1}x_{11}+g_{i1}x_{12})\sin k_2u \tag{3.6}$$

за случаите I и III и от функциите

$$f_{i,1}(u)=kk_2(2x_{21}r_1a_{i1}+x_{21}r_2b_{i1}+x_{22}r_1b_{i1}+x_{22}r_1c_{i1}+x_{21}r_2c_{i1}$$
$$+2x_{22}r_2d_{i2})\cos kk_2u\sin kk_2u+k_2(s_1x_{21}a_{i1}+s_2x_{21}b_{i1} \tag{3.7}$$

$$+s_1x_{22}c_{i1}+s_2x_{22}d_{i1})\cos k_2u\sin kk_2u+kk_2(s_1x_{21}a_{i1}+s_1x_{22}b_{i1}$$
$$+s_2x_{21}c_{i1}+s_2x_{22}d_{i1})\sin k_2u\cos kk_2u+(e_{i1}x_{21}+g_{i1}x_{22})\sin kk_2u$$

за случаите II и IV. Следователно за $R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)$ се получава при случаите I и III формулата

$$R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=\frac{-\pi\lambda_{2i}}{2k_2^2\,\Delta D}\,[(A_{21}\lambda_{11}+A_{22}\lambda_{12})(e_{11}x_{11}+g_{11}x_{12})$$
$$-(A_{11}\lambda_{11}+A_{12}\lambda_{12})(e_{21}x_{11}+g_{21}x_{12})],$$

когато цялото число $k\geqq 3$, и формулата

$$(3.8)\qquad R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=\frac{\pi\lambda_{1i}}{8k_2\,\Delta D}\,[(A_{11}\lambda_{21}+A_{12}\lambda_{22})(2s_1x_{11}a_{21}+s_2x_{11}b_{21}+s_1x_{12}b_{21}+s_1x_{12}c_{21}$$
$$+s_2x_{11}c_{21}+2s_2x_{12}d_{21})-(A_{21}\lambda_{21}+A_{22}\lambda_{22})(2s_1x_{11}a_{11}+s_2x_{11}b_{11}+s_1x_{12}b_{11}$$
$$+s_1x_{12}c_{11}+s_2x_{11}c_{11}+2s_2x_{12}d_{11})]$$
$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{4k_2\Delta D}\,\{(A_{21}\lambda_{11}+A_{22}\lambda_{12})[b_{11}(x_{12}r_1-2x_{11}r_2)+c_{11}(x_{11}r_2-2x_{12}r_1)$$
$$-x_{11}r_1a_{11}-x_{12}r_2d_{11}]-(A_{11}\lambda_{11}+A_{12}\lambda_{12})[b_{21}(x_{12}r_1-2x_{11}r_2)+c_{21}(x_{11}r_2-2x_{12}r_1)$$
$$-x_{11}r_1a_{21}-x_{12}r_2d_{21}]+\frac{2}{k_2}(A_{21}\lambda_{11}+A_{22}\lambda_{12})(e_{11}x_{11}+g_{11}x_{12})$$
$$-\frac{2}{k_2}(A_{11}\lambda_{11}+A_{12}\lambda_{12})(e_{21}x_{11}+g_{21}x_{12})\}$$

при специалния случай, когато цялото число $k$ е равно на 2. По аналогичен път установяваме за случаите II и IV формулата

$$(3.9)\qquad R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=\frac{\varepsilon\pi\lambda_{1i}}{2kk_2^2\,\Delta D}\,[(A_{11}\lambda_{21}+A_{12}\lambda_{22})(e_{21}x_{21}+g_{21}x_{22})$$
$$-(A_{21}\lambda_{21}+A_{22}\lambda_{22})(e_{11}x_{21}+g_{11}x_{22})],$$

когато цялото число $k\geqq 3$, и

$$(3.10)\qquad R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=\frac{\pi\lambda_{1i}}{4k_2^2\,\Delta D}\,[(A_{11}\lambda_{21}+A_{12}\lambda_{22})(e_{21}x_{21}+g_{21}x_{22})$$
$$-(A_{21}\lambda_{21}+A_{22}\lambda_{22})(e_{11}x_{21}+g_{11}x_{22})]$$
$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{4k_2\Delta D}\,\{(A_{21}\lambda_{11}+A_{22}\lambda_{12})[b_{11}(s_2x_{21}-2s_1x_{22})+c_{11}(s_1x_{22}-2s_2x_{21})$$
$$-s_1x_{21}a_{11}-s_2x_{22}d_{11}]-(A_{11}\lambda_{11}+A_{12}\lambda_{12})[b_{21}(s_2x_{21}-2s_1x_{22})$$
$$+c_{21}(s_1x_{22}-2s_2x_{21})-s_1x_{21}a_{21}-s_2x_{22}d_{21}]\},$$

когато цялото число $k$ е равно на 2. Най-напред ще разгледаме по-специалния случай, при който $k=2$. При него уравнението (1.10) съгласно (3.4) приема вида

$$(3.11)\quad [(2r_1-s_1)\lambda_{12}-(2r_2-s_2)\lambda_{11}]\{(A_{11}\lambda_{21}+A_{12}\lambda_{22})[2(e_{21}r_1+g_{21}r_2)+k_2(a_{21}s_1^2$$
$$-b_{21}s_1s_2+c_{21}s_2s_1-d_{21}s_2^2)]-(A_{21}\lambda_{21}+A_{22}\lambda_{22})[2(e_{11}r_1+g_{11}r_2)+k_2(a_{11}s_1^2$$
$$-b_{11}s_1s_2+c_{11}s_2s_1+d_{11}s_2^2)]\}+2[(2r_2-s_2)\lambda_{21}-(2r_1-s_1)\lambda_{22}]\{(A_{21}\lambda_{11}$$
$$-A_{22}\lambda_{12})[2(e_{11}s_1+g_{11}s_2)-k_2(a_{11}r_1s_1+b_{11}r_1s_2-c_{11}r_2s_1-d_{11}s_2r_2)-2k_2(a_{11}r_1s_1$$
$$-b_{11}s_1r_2-c_{11}s_2r_1-d_{11}s_2r_2)]-(A_{11}\lambda_{11}+A_{12}\lambda_{12})[2(e_{21}s_1+g_{21}s_2)+k_2(a_{21}r_1s_1$$
$$+b_{21}r_1s_2-c_{21}r_2s_1+d_{21}s_2r_2)-2k_2(a_{21}r_1s_1+b_{21}s_1r_2+c_{21}s_2r_1+d_{21}s_2r_2)]\}=0.$$

Както знаем вече, полученото уравнение (3.11) представлява едно уравнение спрямо параметъра $N$, който взима участие в началните условия на периодичното решение. Ще разгледаме по-подробно (3.11) в случая I. Аналогични са разглежданията и за случая III. След като извършим полаганията

$$a_i=A_{i1}\lambda_{21}+A_{i2}\lambda_{22},\quad b_i=A_{i1}\lambda_{11}+A_{i2}\lambda_{12},$$
$$c_i=a_{i1}\lambda_{21}^2-b_{i1}\lambda_{21}\lambda_{22}+c_{i1}\lambda_{21}\lambda_{22}+d_{i1}\lambda_{22}^2,$$
$$(3.12)\qquad d_i=b_{i1}(\lambda_{11}\lambda_{22}-2\lambda_{12}\lambda_{21})+c_{i1}(\lambda_{12}\lambda_{21}-2\lambda_{11}\lambda_{22})-a_{i1}\lambda_{11}\lambda_{21}-d_{i1}\lambda_{12}\lambda_{22},$$
$$e_i=e_{i1}\lambda_{11}+g_{i1}\lambda_{12},\quad g_i=e_{i1}\lambda_{21}+g_{i1}\lambda_{22},$$

получаваме вместо (3.11) уравнението

$$(3.13)\qquad 4(a_1c_2-a_2c_1)N^3+[a_1e_2-a_2e_1+4(b_1g_2-b_2g_1)+b_1d_2-b_2d_1]N=0.$$

Като използваме (3.4) и (3.8), за условието (1.11) намираме неравенството $12(a_1c_2-a_2c_1)N^2+(a_1e_2-a_2e_1)+4(b_1g_2-b_2g_1)+(b_1d_2-b_2d_1)\neq 0$. Необходимо е следователно $N$ да бъде прост корен на уравнението (3.13). Като имаме пред вид това, можем да намерим някои условия за коефициентите на уравнението (3.13). Преди да формулираме окончателни резултати, ще въведем означението $(1.1_{22})$ за системата $(1.1_2)$ в случая, когато условията (1.2) са удовлетворени поради избора

$$f_{ik}(\psi'_1,\psi'_2,\psi_1,\psi_2)=a_{ik}\psi_1\psi'_1+b_{ik}\psi'_1\psi'_2+c_{ik}\psi_2\psi'_1+d_{ik}\psi'_2\psi'_2+e_{ik}\psi'_1+g_{ik}\psi'_2,$$
$$i=1,2\,;\ k=1,2,3,.$$

който бе направен още с равенствата (3.1)

Теорема 5. Нека е изпълнено условието

$$(3.14)\qquad (a_1e_2-a_2e_1)+4(b_1g_2-b_2g_1)+(b_1d_2-b_2d_1)\neq 0,$$

където $a_i$, $b_i$, $d_i$, $e_i$ и $g_i$ се определят от (3.12). Възможно е тогава да се определят функциите $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ така, че решението $\psi_i(t)$ на системата $(1.1_{22})$ с начални условия $\psi_i(0)=0$ и $\dot\psi_i(0)=\lambda_{1i}+2\lambda_{2i}\beta(\lambda^2)$ да бъде периодично с период $\frac{2}{k_2}(\pi+\delta(\lambda^2))$.

Горната теорема отговаря на корена $N=0$ на уравнението (3.13). На другите два корена на това уравнение съответствува следващата

Теорема 6. Нека е удовлетворено неравенството

$$(3.15)\qquad (a_1c_2-a_2c_1)[a_1e_2-a_2e_1+4(b_1g_2-b_2g_1)+b_1d_2-b_2d_1]<0,$$

в което $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$, $e_i$ и $g_i$, $i=1,2$, се получават от равенствата (3.12). Съществуват тогава достатъчно малки функции $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ на малкия параметър $\lambda^2$ такива, че решението $\psi_i(t)$ на системата $(1.1_{22})$ с начални условия $\psi_i(0)=0$ и

$$\dot{\psi}_i(0)=\lambda_{1i}+2\lambda_{2i}\beta(\lambda^2)\pm\lambda_{2i}\sqrt{[a_2e_1-a_1e_2+4(b_2g_1-b_1g_2)+b_2d_1-b_1d_2](a_1c_2-a_2c_1)}$$

е периодично с период $\frac{2}{k_2}(\pi+\delta(\lambda^2))$.

Да отбележим, че указаните в горните теореми периодични решения и техните периоди могат да бъдат намерени с желано приближение. Необходимо е за тази цел да бъде приложена теорема 3, като се използват разглежданията от § 3 на [6]. Резултати, аналогични на тези от теореми 5 и 6, могат да бъдат формулирани, както това вече бе отбелязано, и за случая III, като все още $k=2$.

Предстои да разискваме по-непосредствено случая II, като имаме пред вид специалния случай $k=2$. Сега след известна преработка основното уравнение (3.11) за $N$ приема вида

$$(3.16)\quad 4(b_1d_2-b_2d_1)N^2+2[4(b_1g_2-b_2g_1)+(a_1e_2-a_2e_1)]N+(a_1c_2-a_2c_1)=0.$$

И тук непосредствена проверка ни убеждава чрез използване на (3.10) и (3.4), че условието (1.11) води до извода за еднократност на евентуалните реални корени на уравнението (3.16). Ще предполагаме, че това уравнение притежава два различни реални корена. Това налага някои зависимости в коефициентите на (3.16). Като имаме пред вид казаното дотук, можем да формулираме и следващата

Теорема 7. Нека параметрите $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$, $e_i$ и $g_i$, $i=1,2$, от (3.12) удовлетворяват условията $b_1d_2-b_2d_1\neq 0$ и

$$(3.17)\qquad [(a_1e_2-a_2e_1)+4(b_1g_2-b_2g_1)]^2>4(b_1d_2-b_2d_1)(a_1c_2-a_2c_1).$$

В този случай могат да бъдат определени $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ по такъв начин, че решението $\psi_i(t)$ на системата $(1.1_{22})$ при начални условия $\psi_i(0)=0$ и

$$\dot{\psi}_i(0)=\lambda_{2i}+2\lambda_{1i}\beta(\lambda^2)+2\lambda_{1i}N_{1,2},$$

където

$$(3.18)\qquad N_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{[(a_1e_2-a_2e_1)+4(b_1g_2-b_2g_1)]^2-4(b_1d_2-b_2d_1)(a_1c_2-a_2c_1)}}{4(b_1d_2-b_2d_1)}$$

$$+\frac{4(b_2g_1-b_1g_2)+(a_2e_1-a_1e_2)}{4(b_1d_2-b_2d_1)},$$

да бъде периодично с период $\frac{2}{k_2}(\pi+\delta(\lambda^2))$.

Аналогичен резултат може да бъде установен, като отново $k=2$, и за случай IV. И тук е възможно да се направи бележка относно конструкцията на периодичното решение $\psi_i(t)$ и на неговия период. Както бе изтъкнато вече, тази конструкция се извършва чрез едно конкретно прилагане на теорема 3 съгласно изводите от последния параграф на [6].

Остават да се разгледат по-общите случаи, когато цялото число $k$ е по-голямо от 2. И за четирите случая I, II, III и IV намираме, като използваме формулите (3.3), уравнението

$$[(a_1e_2-a_2e_1)+k^2(b_1g_2-b_2g_1)]N=0, \tag{3.19}$$

което изразява в случая условието (1.10). Изискването (1.11) показва, че $N=0$ е единственият реален корен на уравнението (3.19). Тогава в сила е и следната

Теорема 8. Нека е изпълнено условието

$$(a_1e_2-a_2e_1)+k^2(b_1g_2-b_2g_1)\neq 0, \tag{3.20}$$

в което $(i=1, 2)$

$$\begin{aligned} a_i&=A_{i1}\lambda_{21}+A_{i2}\lambda_{22}, \quad b_i=A_{i1}\lambda_{11}+A_{i2}\lambda_{12},\\ e_i&=e_{i1}\lambda_{11}+g_{i1}\lambda_{12}, \quad g_i=e_{i1}\lambda_{21}+g_{i1}\lambda_{22}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Съществуват тогава достатъчно малки по абсолютна стойност функции $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ на малкия параметър $\lambda^2$ такива, че решението $\psi_i(t)$ на системата $(1.1_{22})$ при кое да е от началните условия

$$\text{а) } \psi_i(0)=0,\ \dot{\psi}_i(0)=\lambda_{1i}+k\lambda_{2i}\beta(\lambda^2);$$

$$\text{б) } \psi_i(0)=0,\ \dot{\psi}_i(0)=\lambda_{2i}+k\lambda_{1i}\beta(\lambda^2);$$

$$\text{в) } \psi_i(0)=0,\ \dot{\psi}_i(0)=\lambda_{1i}+\frac{1}{k}\lambda_{2i}\beta(\lambda^2);$$

$$\text{г) } \psi_i(0)=0,\ \dot{\psi}_i(0)=\lambda_{2i}+\frac{1}{k}\lambda_{1i}\beta(\lambda^2).$$

е периодично с период $\frac{2}{k_2}(\pi+\delta(\lambda^2))$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Bradistilov, G. Über periodische und asymptotische Lösungen beim $n$-fachen Pendel in der Ebene. Math. Ann., **116** (1938), 181—203.
2. Манолов, С. Върху съществуването на малки периодични движения на една механична конфигурация. Год. на Соф. унив., Природо-мат. фак., **46** (1950), кн. 1, 377—384.
3. Манолов, С. Върху съществуването на малки периодични движения около положение на релативно стабилно равновесие на цилиндрично свързани махала, подложени на равномерна ротация. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **48** (1954), кн. 1, 1—16.
4. Манолов, С. О существовании малых периодических движений вокруг положения относительного устойчивого равновесия одной механической системы. П. М. М., **19** (1955), 493—499.
5. Манолов, С. Особый случай существования малых периодических движений двух маятников, подверженных равномерному вращению. П. М. М., **22** (1958), 139—142.
6. Манолов, С. Върху съществуването и построяването на периодични решения на една класа от нелинейни автономни системи от диференциални уравнения. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **57** (1964), 265—280.
7. Cesari, L. Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. Berlin, Springer, 1959.

8. Cesari, L., J. K. Hale. A new sufficient condition for periodic solutions of weakly nonlinear differential systems. Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 757—764.
9. Hale, J. K., Periodic solutions of nonlinear systems of differential equations. Riv. Mat. Univ Parma, 5 (1954), 281—311.
10. Gambill, R. A., J. K. Hale. Subharmonic and ultraharmonic solutions for weakly nonlinear systems. J. Rational Mech. Anal., 5 (1956), 353—398.
11. Красносельский, М. А., А. И. Перов. О некоторых признаках существования периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев, 2, (1961), 202—211.
12. Heinbockel, J. H., R. A. Struble. Periodic solutions for differential systems with symmetries. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 13 (1965), № 2, 425—440.
13. Хайнбокел, Дж., Р. А. Страбл. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, обладающих симметрией. Механика (Периодический сборник переводов иностранных статей), 17 (1966), № 1, 3—17.
14. Брадистилов, Г. Върху периодични движения на двойно махало, лежащо във вертикална равнина при кратни корени на характеристичното уравнение. Год. на Маш.-електр. инст., 2 (1956), кн. 1, 1—13.
15. Малкин, И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва, 1956.

*Постъпила на 21. IX. 1966 г.*

# О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ДАННОГО ВИДА

Спас Манолов

*Резюме*

Рассматривается класс нелинейных автономных систем с малым параметром, правые части которых обладают данным свойством асимметрии. К подобным системам приводятся некоторые механические задачи, рассматривавшиеся в работах Г. Брадистилова, Сп. Манолова, Г. Бояджиева и др. Результаты, касающиеся указанных систем, даны в некоторых исследованиях Л. Чезари, Дж. К. Хейла и Р. А. Гэмбилла, М. А. Красносельского и А. И. Перова, Дж. Х. Хайнбокела и Р. А. Страбла и др. Специального исследования требует особый случай, характеризующийся введением подходящего целого числа $k \geqq 2$. Этот случай исследован автором в одной из предшествующих работ, где найдены условия, обеспечивающие существование периодических решений и в особом случае. В той же самой работе строились соответствующие периодические решения. Для этого было использовано одно свойство рассматриваемых систем, а также подходящие начальные условия. В представленной здесь работе эти результаты исследуются в случаях, когда нелинейности осуществляются при помощи совокупности полиномов данного вида. Получены соотношения между параметрами этой совокупности и элементами начальных систем, которые оказываются достаточными как для существования определен-

ного типа периодических решений, так и для построения этих решений и их периодов. Теоремы, установленные для специального случая $k=2$, представляют и самостоятельный интерес.

# SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES AUTONOMES AVEC UN PETIT PARAMÈTRE ET NONLINÉAIRES D'UNE FORME DONNÉE

Spas Manolov

*Résumé*

Il s'agit d'une classe de systèmes nonlinéaires et autonomes avec un petit paramètre, dont les parts droites possèdent une propriété asymétrique. Des systèmes semblables expriment les mouvements des systèmes mécaniques d'une espèce donnée, considérés dans certains des travaux de G. Bradistilov, Sp. Manolov, G. Boïadjiev et d'autres auteurs. Des résultats concernants les systèmes nonlinéaires mentionnés sont obtenus dans quelques des recherches de L. Cesari, J. K. Hale et R. A. Gambill, M. A. Krasnoselski et A. I. Perov, J. H. Heinbockel et R. A. Struble. Un cas spécial, qui se caractérise avec une introduction convenable d'un nombre entier $k=2$, exige une recherche à part. L'auteur a examiné ce cas dans un travail précédent, où sont données des conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques, aussi bien dans le cas spécial. On accomplit après cela, dans le même travail, une construction des solutions périodiques respectives. On fait cela à l'aide d'une propriété des systèmes autonomes considérés et en utilisant des conditions initiales convenables. Dans le présent travail on étudie ces résultats dans les cas, quand les parts nonlinéaires des systèmes traités s'expriment par un ensemble des polynômes d'une forme donnée. On obtient des relations entre les paramètres de l'ensemble cité et les éléments des systèmes initiaux, qui sont suffisantes pour l'existence des solutions périodiques d'une espèce cherchée et ainsi que pour les constructions de ces solutions et de leurs périodes. Il est important de remarquer séparément les théorèmes obtenus dans le cas isolé, où $k=2$.