БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÊMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

SUR QUELQUES TYPES DE STRUCTURES MULTIPLICATIVES

Vladimir V. Topentcharov

Toute structure multiplicative dans la catégorie des applications ou dans une catégorie arbitraire pouvant être définie en terme d'algèbre universelle $AU=(C, (A_i)_{i\in I}, (k_j)_{j\in J})$, où $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de classes, en général distinctes de la classe C et $(k_j)_{j\in J}$ une famille d'applications, nous nous proposons de décomposer une telle structure en couples élémentaires. Cela revient à construire une représentation de AU en une suite finie ou infinie de couples de type I: (A_i, k_j), où $i\in I$, $j\in J$ et $C=A_0$ $(i=0)$, et de couples de type II $((k_j, k_s), R)$ où les éléments R sont des relations binaires, les applications k_j étant considérées comme des relations monovalentes. En termes de catégories on procède donc à la décomposition de AU en morphismes de la catégorie pleine d'applications associée à l'univers sur lequel sont étudiés les structures multiplicatives de but l'élément C, les morphismes étant interprétés comme triplets (avec la source et le but correspondants) et en morphismes d'une catégorie, dont la classe des unités s'identifie à la classe des relations associées à l'univers en question. Comme la notion de catégorie est définie par une suite finie de couple du type I et du type II, le langage des catégories qui aurait permis un exposé plus synthétique des résultats est systématiquement exclus.

0. Notes préliminaires

Soit $\mathfrak{U}_0$ un univers supposé défini conformément au système d'axiomes suivant[1]:

(0.1) Définition. *Un* univers $\mathfrak{U}_0$ *est une classe de classes dans laquelle sont vérifiés les axiomes suivants*[2]*:*

(U.1) $M\in\mathfrak{U}_0$ et $M'\subset M$ *entraînent* $M'\in\mathfrak{U}_0$;

(U.2) $M\in\mathfrak{U}_0$ et $M'\in\mathfrak{U}_0$ *entraînent* $M\times M'=\{(m, m')\,|\, m\in M,\ m'\in M'\}\in\mathfrak{U}_0$;

[1] Les paragraphes sont notés par un chiffre arabe, les sous-paragraphes par deux chiffres arabes, le premier étant le numéro du paragraphe et le second celui du sous-paragraphe à l'intérieur du paragraphe, les définitions, propositions et autres sont notés par trois chiffres les deux premiers étant ceux du sous-paragraphe. Exception est fait pour le paragraphe 0, qui ne possède pas de sous-paragraphe. La fin d'une démonstration est notée par le signe ■.

[2] La notion de classe est conformément à la théorie de Neumann—Bernays—Gödel. Nous n'entrerons pas dans les détails logiques en ce point.

(U.3) $M \in \mathfrak{U}_0$ *entraine* $\mathfrak{P}(M) \in \mathfrak{U}_0$, où $\mathfrak{P}(M)$ *est la classe des parties de* M;
(U.4) $\{(M_i)_{i \in I}\ I \in \mathfrak{U}_0,\ M \in \mathfrak{U}_0\}$ *entraine* $\bigcup_{i \in I} M_i = M^1 \in \mathfrak{U}_0$.

Cette définition diffère sensiblement de celle de Grotendieck [12], mais est identique à la forme des axiomes près, à la définition d'univers de Ch. Ehresmann [10].

Les structures mathématiques dans $\mathfrak{U}_0$ peuvent être de deux types: des structures liées à des relations d'équivalences[1] et des structures liées à des relations d'ordre. Plus précisément on définit:

(0.2) Définition. *Une* structure multiplicative *sur un élément de* $\mathfrak{U}_0$ *est un couple* $(C, (R_i)_{i \in I})$ *où* $C \in \mathfrak{U}_0$, $I \in \mathfrak{P}(\mathbf{N})$ *et* $R \in R(e)$, *où* $R(e)$ *est la classe des relations d'équivalence dans* $\mathfrak{U}_0$ *et* $\mathbf{N}$ -- *l'ensemble des entiers naturels.*

Les algèbres universelles [4, 14] sont des structures multiplicatives. Il en est de même pour les structures algébriques élémentaires [3, 13] et pour les structures algébriques dans les catégories [1, 6].

(0.3) Définition. *Une* structure inductive *est un couple* $(C, (R'_i)_{i \in I})$, où $C \in \mathfrak{U}_0$ *et* $R'_i \in R(0)$, *avec* $R(0) =$ *la classe des relations d'ordre ou de préordre associée à l'univers* $\mathfrak{U}_0$.

Les *topologies* et *paratopologies* [8], les structures de *variété différentiable* [9] et autres sont des structures inductives.

En général les structures mathématiques se présentent sous forme plus complexe, c'est-à-dire que sur un élément de $\mathfrak{U}_0$ sont définie plus d'une structures élémentaires compatibles.

Ainsi les structures de groupe de Lie, de catégorie différentiable ou plus généralement celle de catégorie structurée, le cas relativement élémentaire de catégorie n-uple mis à part, sont des structures mixtes.

Dans cet article nous nous bornerons à l'étude de certains cas de structures élémentaires multiplicatives.[2] Le problème des structures multiplicatives (algébriques) dans une catégorie est résolu par J. Benabou [1], dont les recherches font suite à celles de P. Cohn [4] et autres sur les structures multiplicatives dans la catégorie des applications. En supposant édifiée par voie élémentaire et directe la théorie des catégories, il étudie les structures algébriques comme objets d'une catégorie, sous-catégorie d'une „grande" catégorie d'homomorphisme entre structures algébriques. De cette manière le problème de l'équivalence des systèmes d'axiomes, qui définissent une seule et même structure ne se pose plus, celle-ci n'étant définies que comme objets d'une catégorie, à savoir la „plus grande catégorie" des homomorphismes entre structures homologues sur un univers déterminé $\mathfrak{U}_0$.

---

[1] Toute loi de composition interne ou externe peut être présentée par une relation d'équivalence convenablement construite. Les structures multiplicatives (aussi bien que les structures inductives) sont définies par des relations entre des éléments de $\mathfrak{U}_0$ et par des relations entre ces relations, celles-ci étant encore soit des relations d'équivalence, soit des relations d'ordre.

[2] Le procédé qui est esquissé dans la suite et appliqué uniquement à des cas plutôt élémentaires est assez général pour permettre l'étude de n'importe quelle structure multiplicative, y compris les structures ou interviennent des sous-classes de la classe support comme celle de corps et qui restent non-incorporées dans la théorie de J. Benabou. Cette situation présentant des difficultés techniques et non de principe, sera étudié dans un texte plus vaste que celui-ci. Nous n'aborderons pas les structures où la classe de classe d'opérateurs est non vide.

La solution donnée par Benabou, complète et donnant la classification des structures algébriques dans leur ensemble, est insatisfaisante sur deux points:

la théorie des catégories est supposée donnée à priori, tout en se retrouvant dans la classification et sans que ce soit le cercle vicieux classique la suite logique des structures n'est pas strictement observée;

le problème est résolu à partir de la plus grande catégorie des homomorphismes de structures homologues, ce qui fait perdre de vue le procédé d'édification d'une structure multiplicative à partir de ses „composantes" les plus „élementaires"[1].

Nous nous proposons donc l'étude d'un problème en quelque sorte inverse: étant donné un univers $\mathfrak{U}_0$, quelles sont les structures les plus simples à partir desquelles est obtenue toute structure multiplicative dans $\mathfrak{U}_0$ et quel est le moyen de définir les structures multiplicatives en partant d'un couple (C, k), où $C \in \mathfrak{U}_0$ et k est une application d'un sous-ensemble du produit de C et d'une classe C' de $\mathfrak{U}_0$, éventuellement identique à C dans C, donc $k \in \mathfrak{U}$ (classe des applications construites sur l'univers $\mathfrak{U}_0$); le problème de décomposition d'une structure multiplicative en une suite de composantes élémentaires et l'existence d'une telle décomposition trouve aussi sa solution.

Les définitions de groupe et catégorie s'en déduisent comme un cas particulier[2] Nous nous bornerons en fait, dans les détails de cet article, au cas où $C = C'$, c'est-à-dire aux lois de composition internes, les cas plus complexes étant plutôt problème de technique seront traités ultérieurement.

Les notions de base seront celles de N. Bourbaki (théorie des ensembles propriétés élémentaires de relations [2] et structures élémentaires de l'algèbre [3]) de A. Kurosh [14] et P. Cohn [4] pour les algèbres universelles, de V. Wagner [16] pour les relations et de Ch. Ehresmann pour les catégories [6], la terminologie étant unifiée et adaptée au sujet traité.

1. Préliminaire sur les opérateurs

Prenant pour base les notions de relation n-aire comme généralisation naturelle de la relation binaire, application et fonction ou fonction partielle à plusieurs variables [2, 16], nous précisons et particularisons la notion d' opération et d'opératif de Wagrer [16].

1.1. Relations et opérations. Soit une famille indexée de classes $\{(C_i) \; C_i \in \mathfrak{U}_0, \; i \in I_n \in \mathfrak{P}(N) \in \mathfrak{U}_0\}$ et soit $\prod\limits_{i \in I} C_i = \{(m_i) \; m_i \in C_i, \; i \in I_n\}$; ici I_n est l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\} \in \mathfrak{P}(N)$. En vertu de l'application successive de (U.2) (voir la définition *(0.1)*), on a $\prod\limits_{i \in I} C_i \in \mathfrak{U}_0$. On définit alors:

(1.1.1) Définition. *Une n-*relation *entre les éléments d'une famille indexées de classes est une sous-classes de leur produit cartésien:* $R_n \subset \prod\limits_{i \in I} C_i$.

[1] Ces notions seront précisées dans la suite.

[2] Notons que le fait de retrouver les catégories dans une théorie des structures multiplicatives ne diminue nullement leur rôle d'unifications dans les théories mathématiques à l'état actuel des connaissances, tous ies cas usuels se ramenant à des applications diverses de la notion de catégorie.

En vertu de *(U.1)* on a $R_n \in \mathfrak{U}_0$.

(1.1.2) Définition. *Une n-*relation homogène *entre les éléments de C est une sous-classe du produit cartésien où tous les C_i sont identiques à C*: $R^h_n \subset \prod_{i \in I} C_i$ $(C_i = C)$. *Evidemment* $R^h_n \in \mathfrak{U}_0$.

Dans ce cas la notation compliquée $\prod_{i \in I} C_i (C_i = C,\ i \in I_n)$ sera remplacée par la notation $\prod^n C$.

La notion de section par une relation étant celle de [2] où de [16] on a:

(1.1.3) Définition. *Une n-*relation (homogène) monovalente *est une n-relation (homogène), dont la section $S\langle m_1, m_2, \dots, m_{n-1}\rangle$ par un élément* $(m_1, m_2, \dots, m_{n-1})$ de $\prod_{i \in I} C_i$ (où C_i C pour tout $i \in I_n$) contient au plus un élément de C_n $(=C)$. La *n*-relation est monovalente *pour la classe C_n*.

Dans cette définition et partout dans la suite les mots entre les signes (...) peuvent être lu ou non, donnant lieu à des notions différentes.

(1.1.4) Proposition. *Une n+1-relation entre les éléments d'une famille de classes indexées, monovalente pour C_{n+1}* est une application *n*-aire k_n: $\prod_{i \in I} C_i \to C_{n+1}$.

En particulier, pour la construction des structures algébriques (dans le cadre des algèbres universelles [4,14] ou des structures algébriques dans les catégories [1]) on a recours uniquement à une classe particulière d'applications, qui sont les lois de composition externes ou internes. On peut les redéfinir à partir des relations, comme suit

(1.1.5) Proposition. *Une* loi de composition *n*-aire externe *dans C et de domaine d'opérateurs une classe indexée de classes $\{C_i\ i \in I_{n-2}\}$ est une application n-aire du produit cartésien $C \times \prod_{i \in I'} C_i$ dans C, où $I' = I_{n-2}$, soit donc $k_n : C \times \prod_{i \in I'} C_i \to C$.*

Faisant abstraction de quelques détails d'ordre technique, c'est le point de départ des algèbres universelles. Pour les besoins des problèmes à résoudre nous n'aurons qu'au cas particulier des lois de compositions internes (dans les définitions et propositions ci-présentes nous ne précisons pas le caractère des applications, qui peuvent être partout ou partiellement définies).

(1.1.6) Proposition. *Une loi de composition n-aire interne de C (partiellement définie) est une n+1-relation monovalente (partielle).*

Ou encore:

(1.1.7) Proposition. *Une loi de composition n-aire interne de C (partiellement définie) est une application k_n: $\prod^n C \to C$, du produit cartésien de puissance n de C dans C.*

Il est commode de changer la terminologie de la manière suivante:

(1.1.8) Définition. *Une* n-opération ⌈partielle⌉ ⌈⌈homogène⌉⌉ *est une loi de composition ⌈partiellement définie⌉ sur* $\prod_{i \in I} C_i$ à valeurs dans C_j $(j \in I)$ ⌈⌈*où* $C_i = C$ *pour tout* $i \in I$⌉⌉.

Dans la suite nous noterons k_n les lois de composition (internes ou externes) et par k'_n les lois de composition n-aire partiellement définies (internes ou externes).

(1.1.9) Définition. *Le* poids *d'une opération (resp. l'*ordre *d'une application interne) est l'entier naturel égal au nombre des éléments de* $C \in \mathfrak{U}_0$ *sur lesquels s'effectue l'opération (resp. le nombre de „variables" de* k_n *ou ce qui revient au même, le nombre des éléments de* C *auxquels est associé par* k_n *un élément et un seul de* C*).*

A notre avis la recherche mathématique a dépassé le stade (explicitement indiqué par N. Bourbaki [2]) où les seules structures à l'étude étaient celles où $n = 2$ (structures à loi de composition binaire).

Le poids d'une relation monovalente $n+1$-aire est manifestement n et celui d'une n-opération est n.

Nous rappellerons les définitions de lois de composition nulaires et unaires (de poids $n = 0$ et $n = 1$), resp. celles des opérations et applications nulaires et unaires, qui sont peut usitées et nous énoncerons des définitions pour les lois multinulaires, appliquées systématiquement dans la suite.

(1.1.10) Définition. *Une* application nulaire ⌈partiellement définie⌉ *est l'application* k_0, *qui a tout élément de* C ⌈$-C = C'$⌉ *associe un élément et un seul* $e \in C$*; donc on a*

$$k_0 : C \to e.$$

Exemples. 1) Soit M_u *un monoïde unitaire*[1] sur un ensemble E et soit u l'élément unité de M_u; alors le couple (M, u) définit une application nulaire et une seule, conformément à la définition (1.1.9), soit k_0: $M \to u$, par laquelle à tout élément $f \in M$ est associé l'élement $u \in M$.

2) Un *groupe* G, dont l'unité est notée $e \in G$, défini sur l'ensemble E engendre par le couple (E, e) une application nulaire. C'est évident, le groupe étant aussi un monoïde unitaire.

Plus généralement on démontre sans difficultés:

(1.1.11) Proposition. *Toute structure algébrique élémentaire*[2] *unitaire engendre une application nulaire, qui est unique.*

La définition (1.1.10) est extrêmement restrictive pour les applications et est insuffisante pour le développement d'une théorie suffisamment riche des structures multiplicatives et on définit:

(1.1.12) Définition. *Une* application ⌈locale⌉ polaire *est une application, qui à tout élément d'une classe* $C \in \mathfrak{U}_0$ *associe un et un seul couple d'éléments de* C ⌈*éventuellement distincts pour différents éléments de* C⌉, *donc on a*

$$k_0 : C \to (e, e') \text{ et } k_0(f) = (e, e') \ ⌈\text{et } k_0(g) \neq k_0(g) \text{ si } f \neq g⌉.$$

---

[1] Dans les exemples et uniquement là nous parlerons de structures algébriques avant qu'elles soint déduites des définitions et théorèmes exposés dans ce qui précède.

[2] On entend par là les structures définies sur un élément de $\mathfrak{U}_0$ par une loi de composition interne de poids fini et partout défini (ce sont donc les compositifs — voir plus loin — les monoïdes, les groupes avec des poids finis).

Exemples. 3) Un groupe peut être caractérisé dans un système d'axiomes convenable [13] par l'existence d'un couple d'unités: une unité à droite (e') et une unité à gauche (e) qui sont les mêmes pour tous éléments de G; le couple (G, (e, e')) engendre donc une et une seule application polaire.

4) Une *catégorie* est définie à partir d'un graphe orienté (C, β, α) où β et α associent à tout élément l'unité à droite et l'unité à gauche respectivement et en général $(e, e')_f \neq (e, e')_g$ si $f \neq g$; alors le couple (β, α) est une application localement polaire.

Les applications polaires et les applications localement polaires sont étroitement liées et on a la proposition suivante:

(1.1.13) Proposition. *Si dans $C \in \mathfrak{U}_0$ est définie une application localement polaire, il existe au moins une sous-classe $C' \subset C$, telle que la restriction de l'application localement polaire à C' est une application polaire sur C', $C' \neq 0$.*

Démonstration. Evidemment toute application polaire est aussi localement polaire. Soit C' une sous-classe définie par un couple polaire; $C' = e.C.e' \neq 0$; son existence est assurée par l'existence de l'application localement polaire k_0. Alors pour tout les éléments de C' on a $k'_0(f) = (e, e')$ et on a $k'_{0/C'} = k_0 =$ application polaire, ce qui démontre la proposition ∎

Remarque 1. Il peut se faire que toutes les classes C', sous-classes de C soient des classes à une seul élément.

Remarque 2. Chaque classe C munie d'une application localement polaire est décomposable en sous-classes C_i telles que $k'_{0/C_i} = k_{0i} =$ application polaire.

Exemple. 5) Dans un groupoïde la sous-classe des morphismes tels que $\alpha(f) = \beta(f) = e$ est une sous-cjasse où la restriction de l'application localement polaire $[\beta, \alpha]$, soit $[\beta, \alpha]_{e.C.e}$, est une application polaire, que se réduit à une application nulaire. C'est une conséquence immédiate du fait que toute sous-classe du type $e.C.e$ est un groupe [6].

D'un point de vue plus général les notions de couple polaire et appication ⌈localement⌉ polaire peuvent être définis comme suit:

(1.1.14) Définition. *Une* séquence multipolaire *de $f \in C$ est un élément de $\prod^n C \in \mathfrak{U}_0$. La séquence n-polaire de $f \in C$ sera notée dans la suite $P_n(f)$* et $P(f)$ si $n = 2$.

(1.1.15) Définition. *Une* application ⌈localement⌉ multipolaire *est une application partout définie sur C et qui associe à tout élément $f \in C$ une séquence polaire ⌈telle qu'au moins pour un couple (f, g) avec $f \neq g$ on ait $P(f) \neq P(g)$⌉.*

Exemples. 6) Soit A un *amas* (pour la définition et les propriétés fondamentales des amas, voir [15]) où la loi de composition interne partout définie et ternaire est telle que k_3: $A \times A \quad A \to A$ et $k_3(a, b, c) = f$ avec $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$, $f \in A$.

Pour tout $f \in A$ il existe un triplet (u, u', u'') tel que l'on ait

$$[f, u, u] = f, \quad [u' f, u'] = f, \quad [u'', u'', f] \quad f$$

le triplet (u, u', u'') est une séqerce polaire de f, soit $P_3(f)$, conformément à (1.1.14) et une application polaire $k_0^{(3)}$ est définie par le couple $(A, (u, u', u'')$ conformément à (1.1.15).

7) Soit G_n un *n-groupe* conformément à la définition dans [5]. A tout élément $f \in G_n$ est associée une séquence de n éléments de G_n: $P(f)=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ telle que tous les composés avec f donnent f soit $(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, f, u_K, \ldots, u_n)=f$ pour tout $k \leq n$. C,est une séquence polaire $P_n(f)$ et une application multipolaire (plus précisément n-polaire) évidemment unique est définie.

Des structures multiplicatives qui donnent lieu à des applications localement n-polaires (les n-catégories et celles qui s'en déduisent: n-graphes, n-graphes multiplicatifs, n-catégories non associatives, n-groupoïdes) n'ont pas encore été étudiées[1].

Notons aussi, que les généralisations que nous venons de faire à l'application polaire sont loin d'être gratuites: les propriétés des séquences polaires sont à la base de plusieurs propriétés dans la théorie des amas [15] et du théorème fondamental des n-groupes — existence d'un groupe (ordinaire) engendrant le n-groupe. En particulier toute application nulaire est un cas particulier d'une application n-polaire — avec $n=1$.

(1.1.16) Définition. *Une* application unaire ⌜partielle⌝ *dans C est un endomorphisme ⌜partiel⌝ de C dans C.*

Il est souvent nécessaire de considérer plus d'une application unaire et nous définissons:

(1.1.17) Définition. *Une* application n-unaire ⌜partielle⌝ *dans C est une suite de n endomorphismes ⌜partiels⌝ de C dans C.*

Exemples. 8) Etant donné un *groupe*, le fait (démontré ou posé comme axiome) que tout élément du groupe possède un inverse, qui appartient également à G implique l'existence d'une application, $k_1: G \to G$, telle que $k_1(f)=f^{-1}$; c'est manifestement une application unaire, conformément à (1.1.16). Un groupe possède une représentation axiométrique qui contient deux applications unaires, à savoir celles qui associent l'inverse à droite et l'inverse à gauche; c'est en vertu de (1.1.17) une application bi-unaire.

9) Soit C un groupoïde. Par définition [6] tout élément de C à un couple d'éléments inverses: l'inverse à droite et l'inverse à gauche: $f \to (f_g, f_d)$. Une application bi-unaire est définie dans C; comme on a $f_g=f_d=f^{-1}$, on peut identifier l'application bi-unaire à une application unaire. Si C est une catégorie et si $C \neq 0$, une application bi-unaire partielle est définie conformément à (1.1.17) et peut être identifiée à une application unaire en vertu de l'identité de l'inverse à droite et de l'inverse à gauche.

Les structures obtenues uniquement par une suite de lois de composition internes sont extrêmement pauvres et ne trouvent pas d'applications importantes. Pour préciser les propriétés des lois de compositions et pour exprimer les liens entre les différentes lois définies sur un élément de $\mathfrak{U}_0$, nous définissons la notion de relation entre lois de composition.

Soit $(k_i)_{i \in I}$ une suite de lois de composition interne définies ⌜partiellement⌝ sur C (plus précisément sur des produits cartésiens d'ordre correspondant) et notons $C_{(k_i)}$ les sous-classes correspondantes, définies dans le produit par les lois de composition; soit $\prod_{i \in I} C_{(k_i)}$ la classe-produit de la classe de classes définie par la suite $(k_i)_{i \in I}$. Alors:

---

[1] Une étude détaillée sur les structures multiplicatives obtenue à partir d'une loi de composition n-aire partiellement définie est à paraître.

(1.1.18) Définition. *Une* relation entre lois de composition (k_i) *notée* $R((k_i)_{i\in I})$ *est une sous-classe de la classe-produit* $\prod_{i\in I} C_{(k_i)}$.

Au point de vue intuitif, la relation R est une expression formelle d'un axiome, le langage courant, donc n'appartenant pas à une théorie formelle, étant exclu.

Exemples. 10) Les applications β et α dans la définition d'un *graphe* (C, β, α) sont des rétractions (applications dont la restriction à une sous-classe de la classe de définition est l'application identique). Si l'on pose $[\beta, \alpha] = k''_0$ (application *bi-nulaire*) la condition de rétractivité est traduite par une relation $R(k''_0; k''_0)$, telle que $k''_0(k''_0(f)) = k''_0(f)$, $\forall f \in C$.

11) Soit G un *groupe* et k_1 une application unaire; poir que k_1 définisse un élément inverse $f^{-1} = k_1(f)$ il faut que la relation suivante soit vérifiée:

$$R'(k_1, k_2, k_0): k_2(f, k_1(f)) = k_0(f)$$

où k_2 est la loi de composition (binaire) du groupe G.

(1.1.19) Théorème. *Toute relation entre lois de composition est décomposable en une suite de relations binaires entre des couples de lois de composition.*

Démonstration. Soit $R(k_s/s \in S)$ une relation entre lois de composition où S est un ensemble d'indices à plus de deux éléments. Toute loi de composition étant un sous-ensemble d'un produit cartésien $\prod_{i\in I} C_i$, on peut poser $k_s = E_s \in \mathfrak{U}_0$ et la relation $R(k_s\ s \in S)$ est un sous-ensemble de $\prod_{s\in S} E_s$. Mais à tout produit on peut associer un produit binaire, soit $\prod_{s\in S} E_s = E_1 \times \prod_{s\in S'} E_s$ où $S' = S - \{1\}$ et si K_1 est une loi de composition binaire, on a une relation binaire $R_2(k_1, (k_s)_{s\in S'})$. La répétition successive de cette opération entraîne la décomposition de R en une suite de relations binaires. D'autre part toute application n-aire est présentable sous la forme d'une suite de lois de composition binaires donc la condition ci-dessus (k_1 est binaire) n'est pas une restricition. Le théorème est démontré ■.

Exemple. 12) Reprenons la relation de l'exemple 11) ci-dessus. C'est une relation ternaire, étant donné que c'est une sous-classe du produit cartésien des trois classes $C_{(0)}$, $C_{(1)}$ et $C_{(2)}$. Elle est décomposable de la manière suivante en une suite de relations binaires entre lois de composition:

$$R'(k_0, k_1, k_2) = R_1(k_0, k_1) \,\&\, R_2(k_1, k_2) \,\&\, R_3(k_1, k_1)$$

où on a posé

$$R_1: k_1(k_0(f)) = k_0(f),$$

$$R_2: k_2(k_1(f), f) = k_2(k_1(g), g), \quad R_3: k(k(f) = f$$

pour tout $f \in C$ et $g \in C$. La vérification directe de cette décomposition est immédiate.

Un autre point de vue est de ramener l'étude du problème dans la catégorie des relations $\mathfrak{R}(\mathfrak{U}_0)$ associée à l'univers $\mathfrak{U}_0$. Des difficultés de principe se présentent surtout par le fait qu'on ne dispose que d'une théorie pour la catégorie $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{U}_0)$ des relations binaires. De plus la supposition que dans la classe des relations associée à l'univers $\mathfrak{U}_0$ existe une structure de catégorie, précèderait la définition même de la notion de catégorie.

1.2. Opératifs et S-opératifs. Plusieurs structures algébriques sont définies sur un élément de $\mathfrak{U}_0$ par une suite de lois de composition internes (k) et une suite de relations; c'est l'ensemble des structures où la classe des opérateurs est vide. Ainsi les groupes, les anneaux, les corps [3], les catégories et catégories n-uples [7], certaines algèbres universelles [4, 13] sont des structures algébriques multiplicatives du type donné. Le couple d'un ensemble et d'une opération n-aire partout ou partiellement définie est l'objet d'études détaillées dans [16], § 6 mais les complications dans la technique de démonstration et d'exposé font perdre plusieurs propriétés très intéressantes, surtout la possibilité de „décomposer" en éléments primitifs les structures algébriques multiplicatives et de faire ressortir l'idée générale et élémentaire de „structuration". Pour les besoins de notre étude nous préciserons la notion d'opératif, adaptant la terminologie en vue de la théorie des catégories.

(1.2.1) Définition. *Un* opératif *est un triplet* (C, K, R) *où* $C \in \mathfrak{U}_0$, K *est une classe de lois de composition dans* C *et* R *est une classe de relations dans* K.

Cette notion est trop générale pour être utile en applications; elle se rapproche en fait de la définition d'algèbre universelle à classe d'opérateurs vides. Et on peut préciser:

(1.2.2) Définition. *Un* S-opératif *(opératif simple) est un couple* (C, K), *où* $C \in \mathfrak{U}_0$ *et* K *est une classe de lois de composition dans* C *de poids arbitraire mais fini (partielles).*

Exemples. 1) Un *compositif* (ou *groupoïde* dans le sens de certains algébristes), muni d'un point distingué, soit $e \in G$, est un S-opératif (G, k_0, k_2), k_0 étant la loi de composition nulaire engendrée par le point distingué $e \in G$ et k_2 étant la loi de composition binaire $G \times G \to G$.

2) A la base d'une des définitions (équivalentes entre elles) de *groupe* est posé un S-opératif $(G, k_{12}, k_{22}, k_{32})$ où k_{i2} sont des lois de composition binaires partout définies. Mais la définition complète de groupe exige un système d'axiomes, qui n'est pas contenu dans le S-opératif d'un groupe.

3) Un amas [15] est définit à partir d'un S-opératif de la forme suivante: $(E; k_0, k_1, k_3, k_0)$ où $E \in \mathfrak{U}_0$ et $k_i \in \mathfrak{K}$, où $\mathfrak{K}$ est la classe des applications à but dans E: $\mathfrak{K} = E^{\mathfrak{M}}\ \mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$; la structure définitive est obtenue en assujettissant les applications à un système de relations supplémentaires.

Les S-opératifs ne donnent lieu qu'à des théories pauvres en propriétés. Un cas particulier de ces théories est étudié dans [16].

Il est utile de définir en particularisant la notion de S-opératif:

(1.2.3) Définition. *Un* P-opératif *(opératif primitif) est un couple* (C, k), *où* $C \in \mathfrak{U}_0$ *et* $k \in K$ *de poids* $(k) = n \in \mathbf{N}$.

Exemple. 4) Une classe multiplicative C. [6] est un P-opératif (C, k') où k' est une loi de composition binaire partiellement définie.

Conventions. Dans la suite nous noterons par *p-S-opératif* un S-opératif *à classe de lois de composition finies et de p éléments;* un *q-p-S*-opératif sera un *p-S*-opératif de la forme $(C;\ k_q, k_{q+1}, \ldots, k_{q+p-1})$; la classe C d'un S-opératif sera appelée *support.* — Deux S-opératifs seront appelés *équivalents* si et seulement si *leurs supports sont identiques et s'il existe une bijection de $(k)'$ sur $(k)''$*

Mais deux structures multiplicatives peuvent être identiques sans que leurs opératifs sous-jacents soient équivalents.

Ainsi un groupe G possède plus d'un S-opératif sous-jacent, qui peut être $(C;\ k_2, k_2', k_2'', k_3)$ ou $(C;\ k_0, k_1, k_2, k_3)$. Cette différence dans les S-opératifs sous-jacents entraîne des différences dans les systèmes d'axiomes, comme nous le verrons.

On a la proposition suivante, dont la démonstration (évidente) est omise:

(1.2.4) Proposition. *Tout S-opératif est décomposable en une suite de P-opératifs, ayant un même élément de* $\mathfrak{U}_0$ *pour support. Si le S-opératif est à classe (k) fini, la suite de P-opératifs est finie.*

(1.2.5) Proposition. *Une classe de S-opératifs équivalents a une et une seule décomposition primitive* $\{(C;\ k_i)/i \in I\}$.

Exemple. 5) Un *anneau* a pour S-opératif sous-jacent $(C;\ k_{02}, k_{03}, k_{10}, k_{11}, k_{12}, k_{13})$, à la classe-support C et qui se décompose en un groupe et un monoïde de S-opératifs sous-jacents, comme suit

$$S\text{-}O\text{-}(anneau) = (C;\ k_{02}, k_{03})\ \&\ (C;\ k_{10}, k_{11}, k_{12}, k_{13})$$

et en une suite de P-opératifs de la manière suivante:

$$S\text{-}O\text{-}(\text{anneau}) = (C,\ k_{02})\ \&\ (C;\ k_{03})\ \&\ (C;\ k_{10})\ \&\ (C;\ k_{11})\ \&\ (C;\ k_{12})\ \&\ (C;\ k_{13}).$$

(1.2.6) Proposition. *Toute structure multiplicative possède au moins un S-opératif sous-jacent. Il existe une loi de composition de poids maximal dans tous les S-opératifs de la classe des S-opératifs sous-jacents à la structure donnée.*

Démonstration. La première partie de la proposition est évidente, les structures multiplicatives étant définies par des lois de composition et des relations entre elles; les représentations des définitions étant diverses, il peut exister plus d'un S-opératif sous-jacent à une structure multiplicative. Soit une structure multiplicative non-assiocative relativement à toutes les lois de composition qui la définissent; alors la loi de composition de poids maximal existe (elle peut ne pas être unique). Si la structure est associative relativement à toutes les lois de compositions qui la définissent et si n est le poids maximal de ces lois de composition, alors l'associativité implique l'existence d'une loi de composition $(2n-1)$-aire, qui est celle de poids maximal absolu. Si la structure est associative pour certaines lois, alors il existe un poids maximal n des lois de composition en général et un poids maximal m des lois de la sous-classe des lois associatives; les poids maximal absolu est alors $\max(n,\ 2m-1)$.

Mais sur un S-opératif il est possible de construire des structures multiplicatives différentes par des systèmes d'axiomes différents ou, ce qui revient au même, par des suites de relations entre éléments de (k); aussi à partir de deux S-opératif manifestement distincts on arrive à construire une même structure. Un problème d'équivalence dans la classe des couples $(O_s,\ A)$ où O_s est un S-opératif et A une classe d'axiomes reste ouvert.

1.3. R- et S-R-opératifs. On enrichit les structures multiplicatives par des systèmes d'axiomes imposés sur les lois de composition des S-opératifs sous-jacents, qui se traduisent par des relations sur (k). Il est donc nécessaire de construire des opératifs contenant des relations plus générales que les lois de compositions. On définit:

(1.3.1) Définition. Un R-opératif *(opératif relationnel) est un couple* $(C, (R))$ où $C \in \mathfrak{U}_0$ et $(R)=\{(R_i)_{i \in I}\ R_i \in \mathfrak{R}\}$, *I étant un ensemble d'indices finis ou infinis.*

Evidemment, puisque une loi de composition est une relation particulière, on a la proposition suivante:

(1.3.2) Proposition. *Tout S-opératif est un R-opératif.*

L'inverse n'est pas vrai, une relation n'étant pas en général une application. La notion de R-opératif est encore trop générale pour les besoins de l'exposé dans la suite et nous définissons:

(1.3.3) Définition. *Une* E-opératif *(opératif relationnel élémentaire) est un couple* (C, R) *où* $C \in \mathfrak{U}_0$ *et* $R \in \mathfrak{R}$. *Si la relation* R *est binaire* ($R \in \mathfrak{R}_2$) *le couple* (C, R) *sera noté* E'*-opératif.*

Exemples. 1) Un *ensemble ordonné* a pour opératif sous-jacent le E-opératif (E, R) où $E \in \mathfrak{S}_0 \in \mathfrak{U}_0$, et $R \in R(0)$.

2) Un *ensemble ordonné quotient* a pour R-opératif sous-jacent le triplet (C, R', R'') où R' est une relation d'ordre et R'' une relation d'équivalence.

La proposition suivante exprime un rapport entre les R-opératifs et les E-opératifs.

(1.3.4) Proposition. *Tout R-opératif est décomposable en une suite finie ou infinie de E-opératifs à même classe support:* $(C;\ \{R_i/i \in I\}) =\{(C;\ R_i)/i \in I\}$

Exemples. 3) Une *classe doublement ordonnée* est un R-opératif $(C;\ R, R')$ qui en vertu de ***(1.3.4)*** est présentable sous la forme:

$$(C;\ R, R')=(C;\ R) \& (C;\ R').$$

En particulier, si $C^{\cdot} \in \Omega_0$ (classe des catégories ordonnées [7]), il existe un E-opératif $(C^{\cdot}, R)$ où R est la relation d'ordre dans la catégorie, qui est sous-jacent à $C^{\cdot}$. Si de plus on construit la catégorie Ω^2 (classe des foncteurs entre catégories doublement ordonnées), et si $C^{\cdot}$ est un élément de Ω_0^2 (classe des catégories doublement ordonnées), alors à $C^{\cdot}$ est associé un R-opératif sous-jacent $(C;\ R', R'')$ et en vertu de (1.3.4) on a $(C;\ R', R'') =(C;\ R') \& (C;\ R'')$. Cette situation est à la base intuitive de la théorie des catégories structurées et les deux propositions de décomposabilité (1.2.4) et (1.3.4) expriment la notion élémentaire de structuration indépendemment de la théorie des catégories.[1]

(1.3.5) Définition. *Un* S-R-opératif *(opératif relationnel simple) est un triplet* $(C;\ (k), (R))$ où $C \in \mathfrak{U}_0$, (k) *est une sous-classe de* $\mathfrak{K}(\mathfrak{U}_0)$ et (R) est une sous-classe de $\mathfrak{R}(\mathfrak{U}_0)$.

Conventions. Dans la suite nous nous occuperons uniquement des S-R-opératifs où les relations de la classe (R) opèrent sur les éléments de

[1] En application cette indépendance, que nous reprenons dans une étude détaillée en préparation, n'est pas très importante car les cas les plus intéressants sont exactement ceux de la théorie des catégories; cela ne diminue nullement l'intérêt de l'indépendance au point de vue logique.

(k); alors nous emploierons la notation *$O(p, q)$-opératif* où p est le nombre des applications de la suite (k) et q le nombre des relations de la suite (R).

Dans le cas général pour les S-R-opératifs on a le résultat négatif suivant

(1.3.6) Proposition. *Un S-R-opératif n'est pas présentable sous la forme*

$$(C;\ (k),\ (R)) = \{(C,\ k_i),\ i \in I\} \& \{(C,\ R_j),\ j \in J\}$$

Démonstration. Supposons le contraire; la classe de E-opératifs $\{(C, R_j)/(j \in J\}$ contient uniquement des relations entre les éléments de C, tandis que en vertu de la définition (1.3.5) les relations de la classe (R) peuvent être aussi des relations sur (k)

Soit $(C;\ (k),\ (R))$ un $O(p,\ q)$-opératif, où $(k) = \{k_i,\ i \in I\}$ et $(R) = \{R_j/j \in J\}$ sont des suites finies de lois de composition internes et de relations entre les lois de composition, celles-ci peuvent être supposées binaires en vertu de (1.1.19); on notera donc, si $(k_i,\ k_j)$ est un couple de lois de composition par $(R_{ij}^{s'})$ une classe indexée de relations associées à ce couple et d'indice s' prenant des valeurs $s' \in J'_{ij} \subset J$.

Alors on a avec les notations ci-dessus la proposition suivante:

(1.3.7) Théorème. *Tout $O(p,\ q)$-opératif $(C;\ (k),\ (R))$ est décomposable de manière unique, à l'ordre des P-opératifs et E-opératifs-composants près, en une suite de P-opératifs et E-opératifs à même classe support comme suit*

$$O(p,\ q) = (\{(C;\ k_i/i \in I\} \& \{((k_i, k_j);\ R_{ij}^{s'}),\ (i,\ j) \in I \times I,\ s' \in J'_{ij} \subset J\}).$$

Démonstration. Si $(R) = 0$, alors $(C;\ (k),\ (R)) = (C,\ (k))$ et la décomposition existe en vertu de (1.2.4), se réduisant à une suite de P-opératifs Si $(k) = 0$, alors $(C;\ (k),\ (R)) = (C;\ (R))$ et la décomposition existe en vertu de (1.3.4), se réduisant à une suite de E-opératifs. Dans le cas général, puisque (R) opère par hypothèse sur la classe des couples $(k) \times (k) = \{k_i,\ k_j),\ (i,\ j) \in I \times I\}$ on a la présentation du $O(p,\ q)$-opératif de la manière suivante:

$$O(p,\ q) = (C;\ (k)) \& ((k_i,\ k_j)_{i \in I,\ j \in J};\ (R))$$

et on traite séparément les deux opératifs, que coïncident avec les cas particuliers mentionnés ci-dessus. Par suite on obtient la formule de décomposition de l'énoncé du théorème. L'unicité de cette décomposition est évidente ∎

2. Forme opérative de certaines structures multiplicatives

Nous donnerons dans ce paragraphe une nouvelle forme aux définitions de certaines structures multiplicatives à lois de composition partout définies et de poids différents. Cet apperçu qui donne uniquement une nouvelle forme et non des résultats fondamentalement nouveaux permettra dans la suite de construire une définition opérative de la notion de catégorie (ordinaire et n-catégorie).

2.1. Structures à une loi de composition interne binaire et partout définie. Les définitions suivantes sont de fait des propositions explicitant l'équivalence de définitions classiques et opératives.

(2.1.1) Définition. *Une* classe pointée *est un couple* $(C;\ k_0)$ *où* k_0 *est une application nulaire, définie par le couple* $(C,\ e)$; *c'est un P-opératif nulaire.*

Si en particulier $e \in C$ est un élément neutre pour une loi de composition ou si l'élément $e \in C$ est tel que $k_0(e)=e$, il est commode de définir

(2.1.2) Définition. *Une* classe pointée rétractive *est un S-R-opératif* $O(1,\ 1)$, *tel que* $(C;\ k_0;\ R)$, *et où la relation* R *s'exprime par la condition*

$$R:\ k_0(k_0(C))=k_0(C)=e.$$

(2.1.3) Définition. *Un* compositif *est un P-opératif* $(C;\ k_n)$; *en particulier un compositif binaire est un P-opératif binaire* $(C;\ k_2)$.

Cette structure est souvent appelée *„groupoïde"*, nom que nous réservons uniquement aux catégories dont tous les éléments sont inversibles.

(2.1.4) Définition. *Un* monoïde *est un* $O(2,\ 2)$*-opératif, noté par* $(C;\ k_2,\ k_3;\ R',\ R'')$ *et qui vérifie les conditions*

$$\text{(i)}\quad k_3 \in \mathfrak{K}_3,\quad k_2 \in \mathfrak{K}_2,$$

$$\text{(ii)}\quad R'=R'(k_2,\ k_3):k_2(f,g,h)=k_3(f,g,h),$$

$$\text{(iii)}\quad R''=R''(k_2,\ k_3):k_2(f,g,h)=k_3(f,g,h).$$

Si le monoïde possède une unité, on a

(2.1.5) Définition. *Un* monoïde unitaire *est un* $O(3,\ 3)$*-opératif, noté* $(C;\ k_0,\ k_2,\ k_3;\ R,\ R',\ R'')$ *qui vérifie les conditions*

$$\text{(i)}\quad k_0 \in \mathfrak{K}_0,\quad k_2 \in \mathfrak{K}_2,\quad k_3 \in \mathfrak{K}_3,$$

$$\text{(ii)}\quad R'(k_0,\ k_0):k_0(k_0(f))=k_0(f),$$

$$\text{(iii)}\quad R''(k_2,\ k_3):k_2(k_2(f,\ g),\ h)=k_2(f,\ k_2(g,\ h))=k_3(f,\ g,\ h),$$

$$\text{(iv)}\quad R(k_2,\ k_0):k_2(f,\ k_0(f))=f=k_2(k_0(f),\ f).$$

La comparaison entre les deux définitions indique, que l'adjonction d'une seule loi de composition interne supplémentaire invoque deux relations nouvelles entre lois de compositions.

Intuitivement les relations ainsi construites pour les définitions ci-dessus font voir les faits suivants:

la relation R exprime, que la loi de composition nulaire k_0 est une rétraction de C sur $C_0=\{e\}$, i. e. que la restriction de k_0 à la sous-classe des éléments distingués (dans notre cas $C_0=\{e\}$) est l'application identique;

la relation R' exprime la propriété de $e \in C$ d'être une unité pour la loi de composition binaire, quel que soit $f \in C$; cette notion n'est pas liée uniquement à la classe C elle-même et n'est pas invariante relativement à la loi k_2(si k_2^* est une autre loi de composition $e \in C$ n'est pas nécessairement un élément neutre relativement à cette loi);

la relation R'' est une relation entre k_2 et k_3 qui exprime l'associativité de k_2.

Plusieurs propriétés classiques des structures algébriques ainsi redéfinies se retrouvent aisément: unicité des unités, existence d'éléments inverses pour certains éléments de C, etc.

La notion la plus intéressante obtenue par une seule loi de composition binaire interne est celle de groupe. On a

(2.1.6) ***Définition.*** *Un groupe est un O(4, 4)-opératif, qui sera noté* $C; k_0, k_1, k_2, k_3; R_r, R_u, R_i, R_a)$, *tel que les conditions suivantes soient vérifiées:*

(i) $k_0 \in \mathfrak{K}_0, \quad k_1 \in \mathfrak{K}_1, \quad k_2 \in \mathfrak{K}_2$ et $k_3 \in \mathfrak{K}_3$;

(ii) $R_r \quad k_0(k_0(f)) = k_0(f), \ f \in C$;

(iii) $R_u : k_2(k'_0(f), f) = k'_0(f) \,\&\, k_2(f, k''_0(f)) = k''_0(f), \ f \in C$;

(iv) $R_i : (R'_i)\ k_1(k_0(f)) = k_0(f) \,\&\, (R''_i) k_2(f, k_1(f)) = k_2(g; k_0(g)), \ (g, f) \in C \times C$;

(v) $R_a : (R'_a)\ k_2(k_2(f, g), h) = k_3(f, g, h) \,\&\, k_2(f, k_2(g, h)) = k_3(f; g, h)$.

On a

(2.1.7) ***Théorème.*** *La définition opérative* (2.1.6) *et la définition usuelle* [3] *de groupe sont équivalentes.*

Démonstration. Soit G un groupe conformément à la définition (2.1.6); la condition (i) entraîne que dans G est définie partout une loi de composition binaire interne; des conditions (ii) et (iii) on déduit l'existence et l'unicité d'une unité (à droite et à gauche); la condition (iv) exprime l'existence pour tout $f \in C$ d'un élément et un seul f^{-1}, tel que $f.f^{-1} = f^{-1}.f = e$, donc l'inversibilité de tout $f \in G$ dans G; la condition (v) est par construction (voir ci-dessus) l'axiome d'associativité; tous les axiomes d'un groupe de la définition de [3] sont vérifiés et en vertu de l'équivalence de tous les systèmes d'axiomes classiques; il en est de même pour les autres. Inversement, soit G un groupe d'après la définition de [3]; le couple (G, e) définit une application nulaire k_0, l'existence pour tout $f \in G$ d'un inverse définit l'application unaire $k_1 : G \to G$ (bijective), la loi du groupe est binaire et partout définie, qui sera noté k_2 et comme le groupe est une structure associative une loi ternaire en est définie — k_3 — la condition (i) est donc vérifiée; puisque l'unité est unique, k_0 est rétractive, donc (ii); puisque $f.e = e.f = f$ pour tout $f \in G$, on a (iii); l'application k_1 étant partout définie et $k_1(f)$ étant l'inverse de $f \in G$, la condition (iv) est également vérifiée; la relation (v) exprimant par des relations l'associativité est également vérifiée dans G; donc l'hypothèse que G est un groupe entraîne l'existence d'un S-opératif à support C vérifiant (i) -- (v) conformément à (2.1.6). L'équivalence des définitions est démontrée ■

On a la proposition essentielle suivante:

(2.1.8) ***Proposition.*** *Le O(4, 4)-opératif définissant un groupe est décomposable en une suite finie de P-opératifs et E-opératifs, qui est unique à l'ordre des composantes élémentaires près:*

$$(C; k_0, k_1, k_2, k_3; R_r, R_u, R_i, R_a) = (C; k_0) \,\&\, (C; k_1) \,\&\, (C; k_2) \,\&\, (C; k_3)$$
$$\&\, ((k_0, k_0); R_r) \,\&\, ((k_0, k_2); R_u) \,\&\, ((k_0, k_1); R'_i) \,\&\, ((k_1, k_2); R''_i) \,\&\, ((k_2, k_3); R_a).$$

La démonstration est une conséquence immédiate de (1.3.7) dont (2.1.8) est un cas particulier.

La définition opérative de groupe (2.1.6) permet de voir la possibilité de construire plusieurs structures algébriques à une loi de composition binaire interne partout définie par variation des axiomes dans la définition[1], ou ce

[1] Le point de vue que nous développons est d'importance capitale et il a des rapports très étroits avec la théorie des catégories structurées [7]. En effet, étant donnée une classe

qui revient au même par la suppression de partie de la décomposition selon (2.1.8). Ainsi on obtient les structures suivantes:

(2.1.9) ***Définition.*** *Un* quasi-groupe *est un* $O(4,3)$*-opératif décomposable en la suite de P-opératifs et E-opératifs suivante:*

$$QG(C) = (C; k_0) \& (C; k_1) \& (C; k_2) \& (C; k_3) \& ((k_0, k_0); R_r) \& ((k_0, k_1); R'_l)$$
$$\& ((k_1, k_2); R''_l) \& ((k_2, k_3); R_a).$$

Intuitivement, cette définition indique, que le quasi-groupe est un groupe pour lequel la conditon de l'existence d'unité n'est pas vérifié; on suppose l'existence d'élément fixe, définissant une rétraction dans C sans que cet élément soit une unité dans le groupe; au point de vue formel la relation R_u n'est pas vérifiée.

(2.1.10) ***Définition.*** *Un* demi-groupe *(ou encore monoïde unitaire) est un* $O(3,3)$*-opératif, décomposable en P-opératifs et E-opératifs de la manière suivante:*

$$DG(C) = (C; k_0) \& (C, k_2) \& (C, k_3) \& ((k_0, k_0); R_r) \& (k_0, k_2), R_u) \& ((k_2, k_3); R_a).$$

Intuitivement, un demi-groupe ne vérifie pas l'axiome d'existence d'un inverse pour tout élément $f \in C$ dans $(C; k_2)$.

Plusieurs structures, que l'on peut définir formellement par des suppressions d'une relation ou d'une autre se trivialisent dans les théories à lois de composition binaires partout définies; nous approfondirons cette particularisation des structures dans le cas des lois de composition partiellement définies.

Il est évident, que le S-opératif sous-jacent à la structure de groupe est $(C; k_0, k_1, k_2, k_3)$. Ce n'est pas le seul; ainsi il est possible de définir la notion de groupe à partir d'un S-opératif de la forme (C, k_1, k_1, k_2, k_3) avec un système d'axiome (relations) convenable, ou même à partir de (C, k_3). La forme que nous avons explicitée dans (2.1.6) est intéressante en vue des généralisations qu'on en obtient dans la théorie des catégories.

2.2. Structures multiplicatives à deux lois de composition binaires. Avant de procéder à l'étude des structures à loi de composition „plus lourde" nous traiterons par les méthodes exposées ci-dessus les structures élémentaires à deux lois de composition binaires internes.

(2.2.1). Définition. *Un* 2-S-opératif *binaire est un triplet* $(C; k_{21}, k_{22})$ *où* $k_{21} \in \mathfrak{K}_2$, $k_{22} \in \mathfrak{K}_2$ *et* $C \in \mathfrak{U}_0$.

Pour certaines structures intéressantes il sera d'importance de supposer que l'opération k_{22} (ou k_{21}) est définie sur $C' = C - \{a\}$, $a \in C$ (ce sera l'élément neutre d'un groupe abélien dans les applications). On définit alors:

(2.2.2). Définition. *Un* 2-S'-opératif binaire *est un triplet* $(C; k_{21}, k_{22})$ où $k_{21} \in \mathfrak{K}_2$, $k_{22} \in \mathfrak{K}_2$, $C \in \mathfrak{U}_0$ et k_{22} opère sur $C' = C - \{e\}$.

C, le compositif (C, k_2) peut être considéré comme une classe $\mathfrak{H}$-structurée, $\mathfrak{H}$ étant la catégorie des homomorphismes entre compositifs; pilus généralement, soit un S-opératif $(C; (k))$, avec $(k) = (k_0, k_1, \ldots, k_n)$; on peut le considérer comme un S-opératif $(C; (k)')$ $\mathfrak{H}_n$-structuré, où (k') $(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ et $\mathfrak{H}_n$ est la catégorie des homomorphismes entre compositifs du type $(C; k_n)$, $C \in \mathfrak{U}_0$. Nous n'entrons pas dans les détails techniques dont certains sont loin d'être triviaux. Notons, que pour les structures relativement élémentaires la technique des catégories, ou plus généralement des structures algébriques structurées n'est pas plus avantageuse que les méthodes habituelles.

Ce sont là les plus élémentaires et les plus générales des structures à deux lois de composition binaires partout définies[1]; évidemment elles sont les plus pauvres en propriétés et leur intérêt au point de vue d'application est assez limité.[2]

Néanmoins ces deux structures sont intéressantes par le fait qu'elles servent de base à la définition des anneaux et corps.

(2.2.3) Définition. *Un* anneau *A est un* $O(6,7)$*-opératif noté*

$$A=(C; k_0, k_1, k_{21}, k_{31}, k_{22}, k_{32}; R^r, R^u, R^i, R^a, R^c, R^{a'}, R^d)$$

et qui vérifie les conditions suivantes:

(i) $k_0 \in \mathfrak{K}_0$, $k_1 \in \mathfrak{K}_1$, $k_{21} \in \mathfrak{K}_2$, $k_{31} \in \mathfrak{K}_3$, $k_{22} \in \mathfrak{K}_2$, $k_{32} \in \mathfrak{K}_3$;

(ii) Les relations R^r, R^u, R^i et R^a sont conformément à (2.1.6);

(iii) $R^c: k_2(f, g)=k_2(g, f)$, $(f, g) \in C \times C$;

(iv) $R^{a'}$ *est l'axiome d'associativité identique à* R^a *de (2.1.6) mais pour les lois de composition* k_{22} *et* k_{32}*:*

(v) $R^d: k_{22}(f, k_{21}(g, h))=k_{21}(k_{22}(f, g), k_{22}(f, h))$
$\& \; k_{22}(k_{21}(g, h), f)=k_{21}(k_{22}(g, f), k_{22}(h, f))$.

La proposition suivante est presque évidente (la démonstration s'effectue par vérification directe):

(2.2.4) Proposition. *La définition (2.2.3) est identique à la définition d'anneau usuelle* [3].

Le résultat du théorème de décomposition prend une forme plus concrète pour les anneaux et on a

(2.2.5) Proposition. *Le* $O(6, 7)$*-opératif définissant un anneau se présente sous la forme élémentaire suivante:*

$$A=(C, k_0) \& (C, k_1) \& (C, k_{21}) \& (C, k_{31}) \& (C, k_{22}) \& (C, k_{32}) \& ((k_0, k_0), R^r)$$
$$\& ((k_0, k_{21}), R^u) \& ((k_1, k_{21}), R^i) \& ((k_{21}, k_{31}), R^a) \& ((k_{22}, k_{22}), R^c)$$
$$\& ((k_{22}, k_{32}), R^{a'}) \& ((k_{22}, k_{21}), R^d).$$

Le résultat sous cette forme est commode pour l'étude des axiomes et de leurs liens avec les propriétés de cette structure, mais n'est pas liée aux bases intuitives. On a

(2.2.6) Proposition. *Un* $O(6, 7)$*-opératif définissant un anneau se présente sous la forme* $A=O_1(4, 5) \& O_2(2, 1) \& ((k_{21}, k_{22}), R^d)$, *dont la forme* développée est

$$A=(C; k_0, k_1, k_{21}, k_{31}; R^r, R^u, R^i, R^c R^a) \& (C; k_{22}, k_{32}; R^{a'}) \& ((k_{22}, k_{21}); R^d).$$

En vertu de ce qui précède la première composante est un *groupe abélien* sur C, la deuxième — un *monoïde* et la troisième exprime la *relation de distributivité*.

La démonstration est évidente.

De fait la définition usuelle d'un anneau se réduit à cette forme de décomposition, qui exprime les propriétés intuitives de cette structure multiplicative et qui est liée aux origines des anneaux dans les applications.

---

[1] Précisons que le cas des S'-opératif contient déjà une allusion de loi de composition binaire partiellement définie, mais comme c'est un cas très particulier nous le traitons dans le cadre d'une théorie à lois partout définies.

[2] Plus exactement ces structures ne sont pas considérées à part et on n'en fait pas la théorie, préférant l'étude concrète des cas qui se présentent dans les applications.

(2.2.7) Définition. *Un* corps *est un* $O(8,11)$*-opératif tel que*

$$O(8,11)=(C; k_{01}, k_{11}, k_{21}, k_{31}, k_{02}, k_{12}, k_{22}, k_{32}; (R))$$

où $k_{ij} \in \mathfrak{K}$ *et où* $(R)=(R^r, R^u, R^i, R^c, R^a, R^{r'}, R^{u'}, R^{i'}, R^{c'}, R^{a'}, R^d)$ *les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $(C; k_{01}, k_{11}, k_{21}, k_{31}; R^r, R^u, R^i, R^a, R^c)$ *est un groupe abélien ;*

(ii) $(C'; k_{02}, k_{12}, k_{22}, k_{32}; R^{r'}, R^{u'}, R^{i'}, R^{a'}, R^{c'})$ *est un groupe sur* $C-\{O\}$ *où* O *est l'élément neutre du groupe abélien de* (i);

(iii) R^d *est l'axiome de distributivité* (voir (2.2.6)).

On a les deux propositions suivantes, dont les démonstrations sont omises.

(2.2.8) Proposition. *La définition* (2.2.7) *et la définition usuelle de corps* [3] *sont équivalentes.*

(2.2.9) Proposition. *Un* $O(8,11)$*-opératif définissant un corps est décomposable sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} C=O(8,11)=&(C, k_{01})\,\&\,(C, k_{11})\,\&\,(C, k_{21})\,\&\,(C, k_{31})\,\&\,(C', k_{02})\,\&\,(C', k_{12})\\ &\&\,(C', k_{22})\,\&\,(C', k_{32})\,\&\,((k_{01}, k_{01}), R^r)\,\&\,((k_{01}, k_{21}), R^u)\\ &\&\,((k_{11}, k_{21}), R^i)\,\&\,((k_{21}, k_{31}), R^a)\,\&\,((k_{21}, k_{21}), R^c)\\ &\&\,((k_{02}, k_{02}), R^{r'})\,\&\,((k_{02}, k_{22}), R^{u'})\,\&\,((k_{12}, k_{22}), R^{i'})\\ &\&\,(k_{22}, k_{32}), R^{a'})\,\&\,((k_{22}, k_{32}), R^{c'})\,\&\,(k_{22}, k_{21}), R^d).\end{aligned}$$

Notons que la définition (2.2.7) se traduit dans les termes suivants: *„un corps sur* C *est un groupe abélien pour* k_{21} *et un groupe* k_{22}*, sur* $C-\{O\}$ *les deux lois étant doublement distributives“.* Cette structure est représentable de manière plus naturelle dans le cadre des lois partielles.

2.3. Structures multiplicatives à lois de composition lourdes. Nous supposons dans ce paragraphe, que la loi de composition principale est de poids supérieur à deux (*loi lourde*). Les notions des amas et des structures qui en dérivent, ainsi que celle de *n-groupe*, sont construites à partir des opératifs sous-jacents.

Rappelons la définition de la structure *d'amas*[1] sous sa forme contemporaine :

(2.3.1) Définition. *Un* amas *(A) est un ensemble E muni d'une loi de composition ternaire partout définie* $k_3: E\times E\times E \to E$ *et pour laquelle sont vérifiées les axiomes suivants* :

(A.1) *Associativité* : si $a_i \in E\,(i=1, 2, 3, 4, 5)$ *la relation suivante est vérifiée*

$$[[a_1, a_2, a_3], a_4, a_5]=[a_1, [a_2, a_3, a_4], a_5]=[a_1, a_2, [a_3, a_4, a_5]]$$

(A.2) *Tout élément* $a_2 \in A$ *est biunitaire et on a*

$$[a_1, a_1, a_2]=[a_2, a_1, a_1]=a_2.$$

Et on en déduit les structures dérivées par affaiblissement des conditions (A.1) et (A.2), comme suit :

(2.3.2) Définition. *Un* pré-amas (A_p) *est un ensemble muni d'une loi* de composition ternaire et partout définie: $A_p=(E, k_3)$ où

$$k_3: E\times E\times E \to E,\ k_3 \in \mathfrak{K}_3.$$

[1] La notion de *amas* est introduite en mathématiques par Prüfer (Theorie der Abelschen Gruppen I, Math. Zeit. Bd. 20, 1921, S. 165—187) pour ses études sur la théorie des groupes abéliens ; elle est développée par Souchkéwitz (Théorie des groupes généralisés et des amas généralisés, Charkow—Kiev, 1937) et présentée sous la forme actuelle par V. Wagner [15].

(2.3.3) Définition. *Un* demi-amas (A_d) *est un ensemble muni d'une loi de composition ternaire et partout définie associative, donc vérifiant la seule condition (A.1) de (2.3.1).*

Pour la définition d'amas par la méthode des S-opératifs il est nécessaire d'introduire une nouvelle notion, généralisation des applications polaires, comme suit:

(2.3.4) Définition. *Une* application polaire généralisée (k_{0g}) *est une application qui à tout élément d'un ensemble associe la diagonale du produit cartésien homogène correspondant*

$$k_{0g}: f \quad \Delta(E\times E), \text{ où } f\in E \text{ et } \Delta(E\times E)=\{(a,a) \quad a\in E\}.$$[1]

Alors on peut définir les *pré-amas*, les *demi-amas* et les *amas* par des S-opératifs, comme suit:

(2.3.5) Définition. *Un* pré-amas *est un P-opératif ternaire et partout défini* $A_p=(E, k_3)$.

(2.3.6) Définition. *Un* demi-amas *est un* S-R-*opératif* (E, k_3, k_5, R^a) *où les condutions suivantes sont vérifiées:*

(i) $k_3\in\mathfrak{K}_3$ et $k_5\in\mathfrak{K}_5$,

(ii) $R^a: k_3(k_3(a_1, a_2, a_3), a_4, a_5)=k_3(a_1, k_3(a_2, a_3, a_4), a_5)$
$=k_3(a_1, a_2, k_3(a_3, a_4, a_5))=k_5(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

pour tout élément de $\prod^5 E$.

(2.3.7) Définition. *Un* amas *est un* S-R-*opératif* (E; k_{0g}, k_3, k_5, R^a, R^b *où les conditions suivantes sont vérifiées:*

(i) $k_2\in\mathfrak{K}_2$ et $k_3\in\mathfrak{K}_3$;

(ii) k_{0g} *est une application polaire généralisée;*

(iii) R^b: $k_3(f, k_{0g}(f))=k_3(k_{0g}(f), f)=f$, $f\in E\in\mathfrak{E}$;[2]

(iv) R^a *est la relation d'associativité de (2.3.6)* — (ii).

On a les propositions évidentes:

(2.3.8) Proposition. *Les définitions de pré-amas (2.3.2) et (2.3.5) sont équivalentes.*

(2.3.9) Proposition. *Les définitions (2.3.3) et (2.3.6) de demi-amas sont equivalentes.*

(2.3.10) Proposition. *Les définitions (2.3.1) et (2.3.7) de amas sont équivalentes.*

Toutes les structures multiplicatives, qui dérivent des amas (c'est-à-dire qui sont construites à partir d'une loi de composition partout définie interne et ternaire, voir à ce sujet les résultats de Wagner et de ses élèves dans les années 1952—1966) peuvent être interprétées dans le langage des

---

[1] Un rapport très étroit entre cette notion et le *foncteur généralisé* de Ehresmann [6, 8] est à noter. La trivialité du cas traité est due au fait que la loi de composition est partout définie.

[2] La notation k_{0g}^0 dans la définition indique, que de la classe $\angle(E\times E)$ on choisit un couple arbitraire, ce qui revient à dire, que tout couple $(g, g)\in E\times E$ est un élément biunitaire.

opératifs ce qui permet de voir des résultats partiels et disparates dans leur ensemble. Nous n'entrerons pas dans des détails[1].

(2.3.11) Proposition. *Tout amas (*resp. *demi-amas,* resp. *pré-amas) donne lieu à un groupe (*resp. *monoïde,* resp. *compositif) en choisissant dans E un élément e, placé en j-*ième *position* ($j=1, 2, 3$) *dans tout triplet-composé.*

Démonstration. Soit $e \in C$ l'élément fixé, intervenant en deuxième position (ou en tout autre) dans les triplets-composés; en posant $[a_1, e, a_3] \approx a_1 o\, a_3$ on a une loi de composition interne k_2 dans C, partout définie et pour laquelle e est l'élément neutre (unité); la loi k_3 étant associative il en est de même pour la loi qui en est déduite (vérification directe par (ii) de (2.3.6)); l'inversibilité de tout élément de (C, k_2) découle du fait que tout élément de (C, k_3) est biunitaire ■

Les notions de amas et de groupes sont des cas particuliers de la notion générale de *n-groupe* [5], qui est définie sous sa forme primitive par W. Dörnte de manière suivante:

(2.3.12) Définition. *Un n-*groupe *est un ensemble E muni d'une loi de composition interne n-aire (de poids $n \in N$) et qui vérifie les postulats suivants:*

(P.1) *La loi de composition est monovalente et définie pour tout n-uple ordonné d'éléments de E, donc $k_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)=a$.*

(P.2) *La loi de composition k_n est associative.*

(P.3) *Tout élément admet un inverse: pour tout élément z et $n-1$ éléments x_i à droite, l'équation*

$$x_1 x_2 \ldots x_n = z$$

admet une solution et une seule.

Cette forme est très peu commode par le fait qu'elle ne fait pas expliciter la notion d'élément unitaire dans le n-groupe, ce qui l'éloigne de la notion classique de groupe, dont le n-groupe est une généralisation naturelle.

Avec la notion d'application multipolaire de (1.1.15) et pour une séquence polaire à n éléments, on a la définition opérative suivante de n-groupe:

(2.3.13) Définition. *Un n-*groupe *est un O*(4, 4)*-opératif, noté* $G_n = (E; k_{0n}, k_{1n}, k_n, k_{2n-1}; R^r, R^u, R^i, R^a)$ *où les conditions suivantes sont vérifiées:*

(i) $k_{0n} \in \mathfrak{K}_0,\ k_{1n} \in \mathfrak{K}_1,\ k_n \in \mathfrak{K}_n,\ k_{2n-1} \in \mathfrak{K}_{2n-1}$;

(ii) $R^r: k_{0n}(k_{0n}(f)) = k_{0n}(f)$ *pour tout* $f \in E$;

(iii) $R^u: k_n(P'_n(f), f) = f$, *où* $P'_n(f)$ *est la séquence polaire de f, dont à un élément, soit le i-ème est substitué l'élément f;*

(iv) $R^i: k_n(k_{1n}(f)', f) = (P_n(f) - P_n(f)')$ où $k_{1n}(f)'$ *est la suite des éléments qui correspondent à $f \in E$ par k_{1n} à l'exception de un, soit le j-ème, qui est remplacé par f et où $(P_n(f) - P_n(f)')$ est le j-ème élément de $P_n(f)$;*

(v) $R^a: (k_3(k_n(f_1, \ldots, f_n), f_{n+1}, \ldots, f_{2n-1}) = k_{2n-1}(f_1, \ldots, f_{2n-1})$ *relation d'associativité.*

[1] Puisque les définitions opératives ont été construites à partir des définitions classiques et de manière que l'équivalence soit vérifiée par construction.

On a la proposition suivante:

(2.3.14) Proposition. *Les définitions (2.3.1.2) et (2.3.13) de n-groupe sont équivalentes.*

Démonstration. Soit G_n un n-groupe conformément à la définition (2.3.12) (P.1) entraîne l'existence d'une loi de composition n-aire partout définie, (P.2) celle d'une loi k_{2n-1} partout définie et (P.3) — les lois polaires de n-uplets unitaires et d'inverses, donc (i) est vérifié; les éléments unités étant idempotents par définition, l'application k_{0n} (n-polaire) est rétractive, donc (ii) est vérifié; les n-uplets associé à $f \in G$ par k_{0n} étant par la construction de k_{0n} des unités, on a (iii); les éléments $k_{1n}(f)$, associés à $f \in G$ donnant lieu à des n-uplets dont le résultat est un élément du n-uplet unitaire, la condition (iv) est vérifiée; la loi k_n étant associative, (P.3) entraîne (v); donc (P.1) & (P.2) & (P.3) $\Rightarrow$ (i) & (ii) & (iii) & (iv) & (v). Inversement, soit G_n un n-groupe conformément à (2.3.13); la troisième relation de (i) entraîne (P.1); la troisième et la quatrième relations de (i) et la condition (v) entraînent (P.2); la première et la deuxième relations de (i) ainsi que les conditions (ii), (iii) et (iv) entraînent (P.3); donc (i) & (ii) & (iii) & (iv) & (v) $\Rightarrow$ (P 1) & (P.2) & (P.3.).. L'équivalence des deux définitions est démontrée ∎

Remarque. Les conditions de la définition (2.3.13) ne sont pas indépendantes et peuvent être réduites; néanmoins cette forme qui au point de vue logique n'est pas satisfaisante est extrêmement commode pour construire par généralisation la définition de *n-catégorie*, comme nous le verrons dans la suite.

En appliquant à (2.3.13) la proposition (1.3.7) on obtient la décomposition suivante:

(2.3.15) Proposition. *Le O(4, 4)-opératif définissant un n-groupe est représentable sous la forme*

$$O(4,4)=(E, k_{0n})\,\&\,(E, k_{1n})\,\&\,(E, k_n)\,\&\,(E, k_{2n-1})\,\&\,((k_{0n}, k_{0n}); R^r)$$

$$\&\,(k_n, k_{0n}); R^u)\,\&\,((k_{1n}, k_n); R^i)\,\&\,((k_n, k_{2n-1}); R^a).$$

Cette situation est intéressante par le fait qu'elle fait voir le rapport entre les groupes et les n-groupes; les seules différences se présentent dans le poids des applications, mais plusieurs conséquences[1] en découlent.

3. *Structures élémentaires à lois de composition partiellement définies*

Nous définissons par les méthodes des opératifs les structures de catégories, d'annéloïdes et de n-catégories, démontrant les équivalences de nos définitions avec celles de Ehresmann, dans les cas où les notions correspondantes ont été déjà définies. Les liens avec les structures classiques de groupe, anneau et n-groupe tout en étant mis en évidence ne sont pas explicité sous forme mathématique.[2]

---

[1] La théorie des *n groupes* est très peu étudiée, par le fait que dans les cas intéressant les n-groupes sont engendrés par des groupes ordinaires (des 2 groupes dans la terminologie que nous adoptons ici). Nous n'entrerons pas dans des détails, qui seront explicités dans une étude sur les n-catégories en préparation.

[2] L'existence de liens intuitifs entre la théorie de groupes et la théorie des catégories est connue par plusieurs mathématiciens et notamment par Ch. Ehresmann, dont les recher-

3.1. *Définition opérative des catégories.* Soit $C \in \mathfrak{U}_0$ et $C' \in \mathfrak{U}_0$ des classes telles que $C' = C \cup \{e\}$. Avec les notations de (1.1.7), (1.1.8) et (1.3.5) on a la définition suivante:

(3.1.1) Définition. *Une* catégorie (C) *est le* $O(4, 6)$*-opératif* $O_c = (C'; k'_0, k'_1, k'_2, k'_3; R^r, R^u, R^i, R^c, R^k, R^a)$, *qui vérifie les axiomes suivants :*

(C.1) $k'_0 \in \mathfrak{K}_0$, $k'_1 \in \mathfrak{K}_1$, $k'_2 \in \mathfrak{K}_2$, $k'_3 \in \mathfrak{K}_3$, *avec* $\overset{\star}{}{}_{(k'_0)}C' = C$, $\overset{\star}{}{}_{(k'_1)}C' \neq C$;

(C.2) $R^r : k'_0(k'_0(f)) = k'_0(f)$, $k'_0 = (b, a)$, $k'_1 = (\mathrm{I}'', \mathrm{I}')$;

(C.3) $R^u : k'_2(b(f), f) = f \ \& \ k'_2(f, a(f)) = f$;

(C.4) $R^i : k'_2(f, \mathrm{I}'(f)) = b(f) \ \& \ k'_2(\mathrm{I}''(f), f) = a(f)$;

(C.5) $R^c : k'_0(k'_2(g, f)) = (b(g), a(f)) \ \& \ b(f) = a(g)$;

(C.6) $R^k : C \star C = \overset{2}{\star} C = a \vee b$, où $a \vee b = \{(g, f) \mid (g, f) \in C \times C \ \& \ b(f) = a(g)\}$;

(C.7) $R^a : k'_2(h, k'_2(g, f)) = k'_3(h, g, f) \ \& \ k'_2(k'_2(h, g), f = k'_3(h, g, f)$.

Remarques. 1) La classe de définition (domaine) de k'_0 n'est pas C' (classe-support de l'opératif) mais la sous-classe C. Cette situation peut paraître artificielle, mais elle est extrêmement commode pour donner au S-opératif sous-jacent la forme $(C', k'_0, k'_1, k'_2, k'_3)$, qui diffère de l'opératif sous-jacent des groupes uniquement par le fait que toutes les lois de composition internes sont partiellement définies. L'importance de ce point de vue ressortira dans le formalisme de passage d'un groupe à une catégorie (correspondante).[1]

2) Les classes de définition des applications partiellement définies k'_2 et k'_3 ne sont pas indépendantes; on a évidemment

$$C \star C \subset \overset{3}{\star} C \subset (C \star C) \times C \subset C \times C \times C.$$

(3.1.2) Théorème. *La définition de catégorie (3.1.1) et celle de Ehresmann*[2] ([5, a] I-1-Déf. 11) *sont équivalentes.*

Démonstration. Soit C un $O'(4, 6)$-opératif vérifiant les conditions de (3.1.1); l'existence de k'_0 et la relation R^r expriment que C est muni de deux applications définies pour tous les éléments de C et rétractives et en vertu de R^u les éléments $a(f)$ et $b(f)$ sont des unités de f, donc (G.1) est vérifié; k'_1 et R^i indiquent, que dans C peuvent éventuellement exister des éléments qui sont inverses à droite ou à gauche d'un élément,[3] d'où l'existence de C, qui peut être vide; en vertu de k'_0, k'_2, R^c et la partie „inverse" de $R^{c'}$ $(k'_2(g, f) \in C \supset b(f) = a(g))$ impliquent

ches surtout dernièrement sont orientées vers une „généralisation" systématique des résultats de la théorie des groupes dans la théorie des catégories. La mise en forme mathématique de ces liens présente plusieurs difficultés.

[1] Des résultats fondamentaux dans cette direction sont à paraître.

[2] La définition de Ehresmann est presque identique à la définition primitive de Mac Lane à laquelle celui-ci pour des raisons assez peu acceptables à l'état actuel de la recherche, a renoncé.

[3] Cette situation est implicitement admise dans les catégories de définition (G); dans le cadre d'idées que nous développons il est utile de l'expliciter.

$$a(g.f)=a(f),\ b(g.f)=b(g) \text{ et } a(g)=b(f)$$

donc (G.2) est vérifié; la partie directe de $R^{c'}$ coïncide avec (G.3) et R^a est l'axiome d'associativité évidemment vérifiée sous condition que les composés existent (k'_2 n'étant définie que pour des couples composables), la loi k'_3 étant définie sur $\star C^3$ et $\star C^3$ n'étant pas indépendante de $\star C^2$; donc (3.1.1) entraîne la définition (G). Inversement, soit une catégorie définie à partir d'une classe multiplicative et le système d'axiomes (G); puisque (G.1) est vérifié, à tout élément de C est associée une unité à droite et une unité à gauche, donc deux applications α et β sont définies, d'où[1] k'_0 est bien définie; comme les applications α et β sont des rétractions en vertu de (G), R^r est vérifiée et du fait que $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ sont des unités on déduit R^u; puisque dans une catégorie des éléments inverses ou des éléments inversibles peuvent exister, k'_1 et R^i ne sont pas en contradiction avec (G); comme (G.2) est vérifié, on a R^c et la deuxième partie de $R^{c'}$; l'axiome (G.4) entraîne avec (G.1) la relation $R^{c'}$; l'associativité dans (G) est identique avec l'associativité d'après R^a (à des détails -- commentaires près); donc (G) $\Rightarrow$ (3.1.1) le théorème est démontré ∎

Notons qu'en fait les définitions de la notion de catégorie dont nous nous occupons sont pratiquement identique, (3.1.1) étant construite à partir de (G) mais par des applications pour faire ressortir les similitudes avec les groupes (dans leur forme de (2.1.6)) qui ne sont pas évidentes dans les définitions classiques.

Les structures qui dérivent des catégories peuvent être redéfinies de la manière suivante (les démonstrations, devenues évidentes après (3.1.2), sont omises).

(3.1.3) Proposition. *Une classe multiplicative (C, k'_2) est un $O(1,0)$-opératif à classe-support C (ou ce qui est équivalent ici, sur $C'=C\bigcup\{e\}$) avec $(f,e)\in C\star C$.*

(3.1.4) Proposition. *Un graphe (orienté) $[C]=(C,b,a)$ est un $O(1,1)$-opératif $(C';k'_0,R^r)$ où C', k'_0 et R^r sont conformément à (3.1.1).*

(3.1.5) Proposition. *Un graphe multiplicatif G est un $O(3,4)$-opératif sur C', soit $(C';k'_0,k'_1,k'_2;R^r,R^i,R^c)$ où les relations sont conformément à (3.1.1).*

(3.1.6) Proposition. *Une catégorie non-associative est un $O(3,5)$-opératif C' noté $(C';k'_0,k'_1,k'_2;R^r,R^u,R^i,R^c,R^k)$ où les applications (lois de composition) et les relations sont conformément à (3.1.1).*

(3.1.7) Proposition. *Un groupoïde C est un $O(4,6)$-opératif qui vérifie les conditions de **(3.1.1)** et tel que $\star_{(k'_0)}C=\star_{(k'_1)}C$.*

Le sens de la notation $\star_{(k'_{sn})}C$ est le suivant: c'est la sous-classe de $\prod^n C$ sur laquelle est définie la loi k'_{sn}. Si la structure à l'étude est à une seule loi de composition, l'indice inférieur (k'_{sn}) est omis.

Ce sont des formes différentes des définitions classiques. Les démonstrations sont des cas particuliers de la démonstration de (3.1.2).

[1] Il suffit d'ajouter $e=0$ et d'obtenir $C'=C\bigcup 0$.

On obtient les structures de type „quasi-“ en renonçant à l'existence d'unités dans les structures définies ci-dessus.[1] Ainsi on a

(3.1.8) Définition. *Un* quasi-graphe multiplicatif (r *resp. une* quasi-catégorie non-associative, *resp.* une quasi-catégorie, *resp.* un quasi-groupoïde) *est un $O(p, q)$-opératif définissant un graphe multiplicatif (resp. une catégorie non-associative, resp. une catégorie, resp. un groupoïde), qui ne vérifie pas la relation R^u.*

L'équivalence de cette définition [2] avec la définition correspondante de [10] se démontre par le même chemin que (3.1.2).

3.2. Structures multiplicatives à deux lois de composition binaires internes et partiellement définies. Si $C \in \mathfrak{U}_0$ et $C' \in \mathfrak{U}_0$ sont des classes, telles que $C' = C \subset \{e\}$, avec les notations de (1.1.7), (1.1.8) et (1.3.5) et considérant comme point de départ la notion d'anneau selon (2.2.3), on a par „généralisation intuitive“ la définition suivante:

(3.2.1) Définition. *Un* annéloïde *A' est un $O'(6, 9)$-opératif noté $A' = (C'; k'_{01}, k'_{11}, k'_{21}, k'_{31}, k'_{02}, k'_{22}, k'R^r, R^u, R^i, R^c, R^k, R^a, R^{r'}, R^{c'}, R^d)$,* tel que le système d'axiomes suivant soit vérifié:

(i) $k_{ij} \in \mathfrak{K}$ $(i = 0, 1, 2, 3; j = 1, 2)$;

(ii) $R^r, R^u, R^i, R^c, R^k, R^a$ vérifient (C.2) — (C.7) de (3.1.1);

(iii) $R^{r'}: k'_{02}(k'_{02}(f)) = k'_{02}(f)$;

(iv) $R^{c'}: k'_{02}(k'_{22}(g, f)) = (b_2(g), a_2(f)) \,\&\, b(f) = a(g)$;

(v) $R^d: k'_{21}(k'_{22}(g', f'), k'_{22}(g, f)) = k'_{22}(k'_{21}(g', g), k'_{21}(f', f))$.

(3.2.2) Proposition. *Un $O'(6, 9)$-opératif définissant un annéloïde est décomposable de la manière suivante:*[3]

$$A' = C'; k'_{01}, k'_{11}, k'_{21}, k'_{31}; R^r, R^u, R^i, R^c, R^k, R^a) \,\&\, (C'; k'_{02}, k'_{22}; R^{r'}, R^{c'})$$
$$\&\, ((k'_{21}, k'_{22}); R^d).$$

La démonstration découle de (1.3.7) sans difficultés. Le contenu intuitif de (3.2.2) est qu'un annéloïde est une classe munie de deux lois de composition partiellement définie, telle que pour la première la classe est une catégorie commutative, pour la seconde une quasi-catégorie et les deux lois de composition étant distributives.

Plusieurs structures dérivées peuvent être construites par la méthode indiquée où par la „superposition“ directe des structures définies dans 3.1 et qui

---

[1] Cette généralisation est loin d'être triviale. Les résultats de Ehresmann sur les *Structures quasi-quotients* et ceux de Grotendieck en *Géométrie algébrique* l'indiquent nettement: les structures du type „quasi“ — c'est-à-dire qui n'admettent pas d'éléments neutres (unités), sont obtenues par voie „naturelle“ au cours de démonstrations d'autres résultats sur les catégories-quotients. Notons que plusieurs exemples non-mathématiques (techniques) justifient ce genre particulier de structures.

[2] La classification des structures à loi de composition binaire partiellement définie s'effectue de la manière la plus naturelle connue jusqu'à présent dans le cadre de la théorie des idées de structures (Ch. Ehresmann, *Introduction to the theory of structured categories*, 1966). Cette classification n'étant pas à point définitivement, nous ne l'appliquons pas dans cet article.

[3] La notion d'annéloïde telle que nous la définissons ici est équivalente à celle définie dans [21] exposée pour la première fois dans des conférences à l'Université de Dijon pendant le semestre d'été de 1965/66. La notion d'annéloïde de N. Bourbaki ([3] ch. I, 8, No 11 ex. 19) est un cas assez particulier de celle de (3.2.1); en effet un annéloïde d'après Bour-

dérivent des catégories;[1] une classification détaillées des cas qui se présentent est faite dans [21].

3.3. Structures muliplicatives à poids de composition lourdes partiellement définies. Si C est une classe et si $C'=C\bigcup\{e\}$, en généralisant la notion de *n-groupe* de (2.3.13), on définit

(3.3.1) Définition. *Une* n-catégorie *est un* $O'(4, 5)$*-opératif sur* C' *noté* $C_n = (C'; k_0^{(n)}, k_1^{(n)}, k'_n, k'_{2n-1}; R^r, R^u, R^i, R^c, R^{c'}, R^a)$, *et qui vérifie les conditions suivantes* ($\varphi \in \Im_1$):

(i) $k_{0\varphi}^{(n)} \in \mathfrak{K}_0$, $k_{1\varphi}^{(n)} \in \mathfrak{K}_1$, $k'_{u\varphi} \in \mathfrak{K}_n$, $k'_{2n-1} \in \mathfrak{K}_{2n-1}$;

(ii) R^r: $k_0^{(n)}(k_{0\varphi}^{(n)}(f)) = k_{0\varphi}^{(n)}(f)$;

(iii) R^u: $k'_{n\varphi}(U'(f), f) = f$ *si* $(U'(f), f)_j \in \overset{n}{\star} C$ *où* $U(f) = k_{0\varphi}^{(n)}(f)$, $(U''(f), f)_j$ *est une suite dans laquelle un élément arbitraire (le j-ème) de* $U(f)$ *est remplacé par l'élément* f;

(iv) R^i: $k'_n(I^j(f), f) = u_{\varphi(j)}(f)$ *où* $I_\varphi(f) = k_{1\varphi}^{(n)}(f)$, $(I'_\varphi(f), f)$ *est un n-uplet dans lequel le j-ème élément de* $I_\varphi(f)$ *est remplacé par* f *et* $u_{\varphi(j)}(f)$ *est le* $\varphi(j)$*-ème élément de* $U_\varphi(f)$;

(v) R^c: *pour tout* $(f_1, \ldots, f_n) \in \overset{n}{\star} C$ *on a* $u_j(f_{\varphi(j)}) = u_{\varphi(j)}(f_j)$ *et* $[k_{0\varphi}^{(n)}(k'_n(f_1, \ldots, l_n))]_i = k_0^{(n)}(f_i)\,\varphi(i)$;

(vi) $R^{c'}$: $\overset{n}{\star} C = \mathbf{V} k_0^{(n)}$ (i. e. $\overset{n}{\star} C = \{f\ [k_0^{(n)}(f_j)]_{\varphi(j)} = [k_{0\varphi}^{(n)}(f_{\varphi(j)}]_j\}$;

(vii) R^a: *associativité — toutes les compositions n-aires possibles dans un* $2n-1$*-uplets sont égales au composé* $k'_{2n-1}(f_1, \ldots, f_{2n-1})$.

(3.3.2). Proposition. *La définition (3.3.1) est équivalente à la définition directe de n-catégorie.*[2]

---

baki est un couple de structures sur C telles que la première est un monoïde et le seconde soit une quasi-catégorie commutative, qui possède un élément neutre universel (i. e. unite supplémentaire pour tout élément de C) et dont la loi de composition est doublement distributive par rapport à la loi du monoïde. Nous venons d'apprendre, que les *annéloïdes* (die *Ringoiden*) sont définis aussi par M. Nasse, mais des détails ne nous sont pas parvenus à part la Table des matières de son livre *Theorie der Kategorien*, qui est sous presse. Le fait qu'elle a pour point de départ les idées sur les catégories de Ehresmann permet de supposer que les différences avec notre définition sont dans les détails.

[1] Les *anneloïdes* ne sont en fin de compte qu'un cas très particulier des catégories structurées [11]. En effet, si $\mathfrak{Q}$ est la catégorie de quasi-foncteurs, un annéloïde est une catégorie $\mathfrak{Q}$-structurée. La notion d'annéloïde d'après Bourbaki, si $\mathfrak{M}$ est la catégorie des homomorphismes entre monoïdes, est une quasi-catégorie commutative à élément neutre universel $\mathfrak{M}$-structuré. Leur étude directe présente bien sur un certain intérêt pour obtenir des résultats concrets, mais de manière générale toute structure multiplicative s'obtient à partir d'une classe amorphe (ou à loi de composition vide $k=\varnothing$) par structuration successive et convenable, comme l'indiquent les résultats de Ehresmann et le théorème (1.3.5).

[2] Rappelons cette définition: *Une* catégorie n-aire (n-catégorie) *est une n-classe polaire* $C_n = (C, U, k_n)$, *qui vérifie le système d'axiomes suivant (G):*

(G'.1) Si $(U(f), f)_j \in \overset{n}{\star} C_n$ *alors* $[(U(f), f)_j] = f$.

Démonstration. Soit une n-catégorie conformément à la définition (3.3.1). C'est une classe n-aire en vertu de (i); (ii) & (iii) entraînent l'existence et l'unicité de n-uplets unitaires, donc entraînent (G'.1); R^1 entraîne la condition sous-entendue dans (G'), que des éléments inversibles peuvent exister; (v) entraîne (G'.2), la différence étant réduite à la rédaction; (vi) qui est une condition de composabilité entraîne (G'.4); (vii) étant une condition d'associativité, entraîne (G'.3); donc (i) & . . . & (vii) $\Rightarrow$ (G'). — Soit inversement une n-catégorie selon la définition (G'); puisque c'est une classe n-aire, n-polaire, éventuellement contenant des inverses et associatives (i) est vérifié; les n-uplet unitaires entraînent l'existence d'une application n-polaire rétractive, donc (G'.1) entraîne (ii); comme $k_0^{(n)}(f)$ est une suite unitaire si les composés sont définis, (iii) est vérifié; la condition sous-entendue, que $C_n^{\cdot}$ peut avoir des éléments inversibles (le p-groupoïde de $C_n^{\cdot}$ peut ne pas être vide) entraîne (iv); l'axiome (G'.2) entraîne (v), qui n'est qu'une autre rédaction de (G'.2); la condition de composabilité (G'.4) est traduite dans le language des applications dans (vi); l'axiome (G'.3) d'associativité est identique, à la terminologie près, à (vii); donc (G') $\Rightarrow$ (i) & . . . & (vii). L'équivalence des deux définitions est démontrée.

La méthode déjà appliquée à plusieurs reprises dans cet article permet de construire les structures dérivées des n-catégories, notamment celles de *classe n-aire, n-graphe, n-graphe multiplicatif, n-catégorie non associative* et *n-groupoïde,* ainsi que celles des „*quasi*"-structures correspondantes.

Le fait que les n-catégories sont une „généralisation" des catégories ordinaires, donne lieu au problème suivant: étant donné un composé dans $C_n^{\cdot}$ pour la loi de composition k'_n peut on construire dans C deux (ou plusieurs) lois telles que le composé dans $C_n^{\cdot}$ soit obtenu par la composition de sous-suites par k'_m et par la composition ensuite des composés partiel par k'_p ($m<n$, $p<n$, $mp=n$). Cette situation donne lieu aux définitions suivantes, qui précisent le problème.

(G'.2) En posant $v_j = pr_{j \in \overset{n}{\star} C_n^{\cdot}}$, *on a* $u_j k_n - u_j \, . \, v_j$.

(G'.3) Axiome de l'associativité : Si pour la suite à $2n-1$ *éléments* $(f_s | s \in J), J = \{1, \ldots, 2n-1\}$ *on a pour tout* $q \in I = \{1, \ldots, n\}$ $(f_q, \ldots, f_{q+n-1}) \in \overset{n}{\star} C_n^{\cdot}$ *et* $(f_1 \ldots, f_{q-1}, [(f_q, \ldots, f_{q+n-1})], \ldots, f_{2n-1}) \in \overset{n}{\star} C_n^{\cdot}$, *on a la formule d'associativité n-aire suivante :* $[(f_1, \ldots, f_{n-1}, [(f_n, \ldots, f_{2n-1})])] = \cdots = [(f_1, \ldots, f_{q-1}, [(f_q, \ldots, f_{q+n-1})], f_{q+n}, \ldots, f_{2n-1})] = \cdots = [([(f_1, \ldots, f_n)], f_{n+1}, \ldots, f_{2n-1})]$.

(G'.4) Condition de composabilité : la classe des n-uplets composables par k_{n_n} *dans* $C_n^{\cdot}$, *notée* ${}^nC_n^{\cdot}$ *est définie par la relation :*

$$C_n^{\cdot} \quad \{(f_i \quad i \in I) \mid u_i(f_j) = u_j(f_i)\}.$$

Notons, que une *n-classe polaire* est un triplet (C, U, k_n) tel que le couple (C, k_n) est un *n-opératif partiel* et que (C, U) est un *n-graphe* (classe C munie d'une suite de n applications $U = \{u_i \quad i \in I\}$ qui sont des rétractions de C sur une sous-classe $C_0 \subset C$). Les démonsttrations sont effectuées dans le cas plus général de la loi de composition en supposant $\varphi \star \mathrm{Id}$, φ étant une permutation de l'ensemble d'indices $I = \{1, \ldots, n\}$.

Pour les détails de cette théorie voir [21].

(3.3.3) ***Définition.*** *Une n*-catégorie engendrée *par une suite de k_i-catégories est une n-catégorie dont tout composé est obtenu par l'application successive des opérations dans k_i-catégories,* appelées engendrantes.

Exemple. Soit $C_n^{\cdot}$ une n-catégorie engendrée par $C_p^{\cdot}$ et $C_q^{\cdot}$ où $n=p.q$, $n, p, q \in N$; alors tout composé $H=[h_1, h_2, \ldots, h_n]_n$ est obtenu de la manière suivante

$$H=[[h_1, \ldots, h_p]_p, [h_{p+1}, \ldots, h_{2p}]_p, \ldots, [h_{(q-1)p+1}, \ldots, h_{q.p}]_p]_q$$

les p-uplets intermédiaires et le q-uplet étant définis dans $C_p^{\cdot}$ et $C_q^{\cdot}$ si le n-uplet est défini dans $C_n^{\cdot}$.

(3.3.4) ***Définition.*** *Un n*-catégorie primitive *est une n-catégorie dont* la classe des k_i-catégories engendrantes est vide.

Nous ne connaissons pas de théorème donnant des conditions nécessaires et suffisantes simples d'existence d'une classe de k_i-catégories engendrantes non vide pour une n-catégorie, si $k_i>2$. Mais si $k_i=2$ pour tout i, on a[1] le théorème important suivant:

(3.3.5) ***Théorème.*** *Une n-catégorie est engendrée par une 2-catégorie si et seulement si tout n-uplet source* (ou but) *a son n—2-uplet intérieur formé d'éléments identiques: $u(f)=(e', e, \ldots, e, e'')$.*

Démonstration. Soit $C_n^{\cdot}$ une n-catégorie engendrée par la catégorie C pour la loi de composition k_n' construite de la manière suivante:

$$k_n'(f_1, f_2, \ldots, f_n)=g \text{ si et seulement si } (f_i, f_{i+1}) \; C^{\cdot} \stackrel{\wedge}{\star} C^{\cdot};$$

en vertu de (G'.3) on a: $u_{j+1}(f_j)=u_j(f_{j+1})$, d'où, avec (G.3) on obtient $u_j(f_{j+1})=e$, $j \in I_n - \{n\}$; appliquant l'axiome (C'.2) pour $g=[f_1, \ldots, f_n]_n$, on a $U(f_i)=(e', e, \ldots, e'')$ pour tout $i \in I_n$; donc si une n-catégorie est triviale la condition du théorème est remplie et la nécessité est démontrée. Soit inversement une n-catégorie qui vérifie la condition du théorème; on a donc pour tout élément de $C: U(f)=(e', e, \ldots, e, e'')$; soit $(f_1, \ldots, f_n)$ un n-uplet composable dans $C_n^{\cdot}$, donc $(f_1, \ldots, f_n) \in \stackrel{n}{\star} C_n^{\cdot}$; dans les conditions indiquées avec (G'.3) on a

$$u_{j+1}(f_j)=u_j(f_{j+1})=e \text{ pour tout } j \; (1<j<n);$$

on en déduit que

$$U(f_j)=(e, e, \ldots, e) \text{ pour tout } j \; (1<j<n)$$

et on identifie alors $f_j \simeq e$; pour le n-uplet $(f_1, \ldots, f_n)$ on a

$$[f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n]_n = [f_1, e, \ldots, e, f_n]_n \simeq f_1 . f_n,$$

donc dans C est construite avec les éléments identifiables à des unités une loi de composition binaire $k_2' = 0$; relativement à la loi de composition binaire la classe (C, k_2') est une catégorie, si on identifie

$$U(f_1)=(e', e, \ldots, e) \; (e', e) \text{ et } U(f)=(e, \ldots, e, e'') \; (e, e'')$$

[1] Dans le cas général, même pour les *n-groupes*, qui jouent vis-à-vis des n-catégories le rôle des groupes pour les catégories (les 2-catégories et 2-groupes dans notre terminologie) il n'existe pas à notre connaissance de théorème répondant à cette question.

la vérification des axiomes (G) étant immédiate; la suffisance de la condition est vérifiée ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque. Dans la démonstration de ce théorème nous nous sommes placés dans le cas particulier d'une des variantes de la définition de n-catégorie. La démonstration peut être effectuée dans le cas le plus général mais les complications techniques ne justifient pas une généralité, qui est presque évidente, la démonstration de cas le plus simple une fois construite.

(3.3.6) Définition. *Un* inverse *de* f *dans* $C_n^{\cdot}$ *est un n-uplet* $I(f) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *tel que si l'on pose* $f_i = f$ *le n-uplet* $(f_1, \ldots, f_{i-1}, f, f_{i+1}, \ldots, f_n)$ *est composable et égal à* $u_i(f)$.

Et comme dans les catégories [6] on définit

(3.3.7) Définition. *Un* n-groupoïde *est une n-catégorie dont tous les morphismes sont inversibles, i. e.* I *est définie pour tout* $f \in C$, $I(f) \in \prod^{n} C$ *et* $(I(f), f) \in \overset{n}{\star} C_n^{\cdot}$.

Notons que la définition de l'élément inverse peut être fait par généralisation de la notion d'inverse dans les classes binaires à unités de *plusieurs manières différentes et non équivalentes.* Nous n'entrerons pas dans les détails.

En particulier, la notion de *amasoïde* (groupoïde) de Wagner [17], [18], [19] se ramène un 3-groupoïde de forme particulière.

L'importance du théorème (3.3.5) apparaît surtout dans l'étude de la possibilité de ramener une n-catégorie, au cas où les conditions du théorème sont remplies, une 2-catégorie, donc à une catégorie ordinaire. Ainsi l'amasoïde des couples associé à une classe C (Wagner) est un 3-groupoïde engendré par le groupoïde des couples [6].

Différentes structures dérivent de la notion de n-catégorie et de n-groupoïde. Ainsi il est possible de définir *les n-graphes, les n-graphes multiplicatifs,* les *n-classes multiplicatives,* les *n-catégories non associatives* et autres, aussi bien que les „quasi" structures correspondantes, en appliquant les méthodes déjà exposées et à plusieurs reprises utilisées dans cet article. Nous n'entrerons pas dans les détails, qui avec la classification des structures à loi de composition n-aire et partiellement définies feront l'objet d'une étude sur l'Idée de structure de n-catégorie.

BIBLIOGRAPHIE

1. Benabou, J. Structures algébriques dans les catégories. Thèse, cah. de Topologie et de Géométrie différentielle, v. IX, 1966.
2. Bourbaki, N. Théorie des ensembles. Hermann, Paris, 1960.
3. Bourbaki, N. Algèbre, ch. I (1964) et II (1962), Hermann, Paris.
4. Cohn, P. Universal algebra. Harper & Row, New York, 1965.
5. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinten Gruppenbegriff. Math. Zeitschr., **29** (1928), 1—19.
6. Ehresmann, Ch. Catégories et structures. Dunod, Paris, 1965.
7. Ehresmann, Ch. Catégories structurées. An. Sci. de l'Ec. Norm. sup. 3° série, **80**, 349—426.
8. Ehresmann, Ch. Gattungen von localen Structuren. Jahresbericht der sch. Math. Vereinigung, **60** (1957).

9. Ehresmann, Ch. Catégories topologiques et catégories différentiable. Col. de Géom. Dif. Globale, Bruxelles, 1958, 137—150.
10. Ehresmann, Ch. Structures quasi-quotient. Math. Ann., 1966 (sous presse).
11. Ehresmann, Ch. Introduction to the Theory of Structures Categories. Univ. of Kansas, Technical report **10**, 1966, 88 p.
12. Grotendieck, A. Texte polycopié (voir aussi P. Gabriel, Des catégories abéliennes, Bul. de la Soc. Math. de France, **60** (1964), I, 323—448.
13. Курош, А. Г. Теория групп. Москва, 1967.
14. Курош, А. Г. Лекции по общей алгебре. Москва, 1962.
15. Вагнер, В. В. Теория обобщенных груд и обобщенных групп. Матем. сб., **32** (74), № 3, 545—632.
16. Вагнер, В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений. В сб.: Теория полугрупп и ее приложения, вып. 1, Саратов, 1965, 3—178.
17. Вагнер, В. В. К теории грудоидов. Известия ВУЗ, **48** (1965), № 5, 31—42.
18. Вагнер, В. В. Сдвиги в грудоиде. Известия ВУЗ, **49** (1965), № 6, 37—47.
19. Вагнер, В. В. Обобщенные грудоиды и грудоиды и их приложения. Межвузовский научный симпозиум по общей алгебре, Тарту, 1966, 7—12.
20. Топенчаров, В. В. Върху определението на абстрактните категории като универсални алгебри и техните връзки с групите. Год. на ВТУЗ, Математика, **3** (1967), кн. 3.
21. Топенчаров, В. В. Пръстеноиди, I, II, III. Год. на ВТУЗ, Математика, **4** (1967), кн. 2, 3 и 4 (под печат).

Reçue le 15 octobre 1966

ВЪРХУ НЯКОЛКО ТИПА МУЛТИПЛИКАТИВНИ СТРУКТУРИ

Владимир В. Топенчаров

Резюме

В статията е застъпено схващането, че всяка алгебрична структура може да бъде дефинирана чрез бинерни (двучленни) релации върху класа от изображения — композиционни закони на една универсална алгебра (подлежащата универсална алгебра на алгебричната структура, която се определя по този начин).

Параграф 0 е посветен на някои общи положения, които за статията имат характера на предварителни бележки; предложена е една класификация на математическите структури в два големи класа, мултипликативни и индуктивни структури, и е изтъкната връзката на тази класификация с други класификации.

След някои уточнения на определенията и свойствата на релациите и операциите от висока степен (арност или тегло) в (1.1) и на оперативите (1.2), R- и $R—S$-оперативите (1.3) е показано, че всеки R-оператив може да бъде разложен по единствен начин на редица от E-оперативи (елементарни оперативи) с един и същи клас носител (1.3.4) и че всеки $R—S$-оператив може да бъде разложен по единствен начин в една редица (крайна или безкрайна) от P-оперативи и E-оперативи (1.3.6); едно усилено свойство на частния, но много важен клас от оперативи — $O(q, p)$-оперативите — е предмет на (1.3.7).

Параграф 2 е посветен на оперативната форма на някои класически алгебрични структури, към които е приложена теорема (1.3.7). Разгледани са отделно алгебричните структури с един вътрешен навсякъде определен двучленен композиционен закон, а именно: класи с белязана точка, моноиди, моноиди с единица (полугрупи) и групи в (2.1), структури с два вътрешни двучленни композиционни закона: пръстени и полета в (2.2) и „тежките" структури, алгебрични структури, определени от един вътрешен композиционен закон в тегло (арност), по-голямо от 2, а именно грудите, полугрудите и n-групите в (2.3). Някои празноти от класическите теории са запълнени в процеса на изясняване елементарните съставни части на всяка от тези структури.

Последният параграф е посветен на структурите с частично определен композиционен закон (категории, групоиди, пръстеноиди и n-категории). Дадени са техните оперативни форми и разложенията им в елементарни редици. По този начин са установени тесните връзки между категориите и полугрупите — от една страна, и между категориите и n-категориите — от друга. Анелоидите изпъкват като естествено обобщение на понятието пръстен при разглеждането на подлежащата му универсална алгебра и замяната в нея навсякъде определените композиционни закони с частично определени композиционни закони.

О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ СТРУКТУР

Владимир В. Топенчаров

Резюме

В статье отстаивается точка зрения, что каждая алгебраическая структура может быть определена бинарными (двучленными) реляциями над классом отображений — композиционными законами универсальной алгебры (так определяется алгебра, подлежащая алгебраической структуре).

Параграф 0 посвящен некоторым общим положениям, имеющим характер предварительных заметок. Предложена классификация математических структур по двум большим классам — мультипликативные и индуктивные структуры. Показана связь этой классификации с другими классификациями.

После некоторых уточнений определений и свойств реляций и операций высокой степени (арность или вес) в (1.1) и оперативов (1.2), R- и $R—S$-оперативов (1.3) показано, что каждый $R—S$-оператив может быть разложен единственным способом на ряд E-оперативов (элементарные оперативы) в одном и том же классе носителе(1.3.4) и каждый $R—S$-оператив может быть разложен единственным способом в один ряд (конечный или бесконечный) на P-оперативы и E-оперативы (1.3.6); усиленное свойство частного, но очень важного класса оперативов — $O(q, p)$-оперативы — предмет (1.3.7).

Параграф 2 посвящен оперативной форме некоторых классических алгебраических структур, к которым приложима теорема (1.3.7). Отдельно рассмотрены алгебраические структуры с одним внутренним везде определенным двучленным композиционным законом, а именно, классы с отмеченной точкой, моноиды, моноиды с единицей (полугруппы) и группы в (2.1), структуры с двумя внутренними двучленными композиционными законами: кольца и поля в (2.2) и „тяжелые" структуры, алгебраические структуры, определенные одним внутренним композиционным законом в весе (арность), большем 2, а именно, груды и полугруды и n-группы в (2.3). Некоторые пустоты классических теорий заполнены в процессе выяснения элементарных составных частей каждой из этих структур.

Последний параграф посвящен структурам с частично определенным композиционным законом (категории, группоиды, кольцоиды и n-категории). Даны их оперативные формы и разложения в элементарные ряды. Таким образом, установлены тесные связи между категориями и полугруппами, с одной стороны, и между категориями и n-категориями, с другой. Анелоиды выступают как естественное обобщение понятия кольца при рассмотрении подлежащей ему универсальной алгебры и замене в ней везде определенных композиционных законов частично определенными композиционными законами.