БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

ВЪРХУ НАЙ-ДОБРОТО ПРИБЛИЖЕНИЕ ЧРЕЗ АЛГЕБРИЧНИ И ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ ОТНОСНО ХАУСДОРФОВА МЕТРИКА

Васил А. Попов и Васил М. Веселинов

В [1] Сендов дефинира и изучава най-доброто приближение $E_n^*(F)$ на една ограничена точкова съвкупност F (в частност графика на ограничена функция) с алгебрични полиноми от n-та степен относно хаусдорфова метрика. Ще приведем основния резултат, получен в цитираната по-горе работа.

Нека $F_{[a,b]}^M$ е съвкупността от затворените точкови множества в равнината xOy, които са изпъкнали по отношение на оста y, проекцията им върху оста x съвпада с интервала $[a, b]$ и ординатите на точките им принадлежат на интервала $[0, M]$, $M>0$. В сила е следната основна

Теорема 1. Ако $F \in F_{[a,b]}^M$, за всяко натурално n е изпълнено неравенството

$$E_n^*(F) \leqq c\,\frac{\ln n}{n},$$

където c е константа, независеща от n.

В [3] се разглежда аналогичният въпрос за най-доброто приближение E_n^{T*} на 2π-периодични точкови съвкупности (в частност графики на периодични функции) с тригонометрични полиноми от n-ти ред по отношение на същата метрика и се получава подобен резултат:

Теорема 2. Ако $F \in F_{2\pi}^M$, за всяко натурално n е изпълнено неравенството

$$E_n^{T*}(F) \leqq c^*\,\frac{\ln n}{n},$$

където c^* е константа, независеща от n.

С $F_{2\pi}^M$ е означена съвкупността от затворените точкови множества F в равнината xOy, за които съществуват две 2π-периодични функции $J_F(x)$ и $S_F(x)$, удовлетворяващи за всяко x неравенството $0 \leqq J_F(x) \leqq S_F(x) \leqq M$, такива, че F е идентична със съвкупността от точки (x, y), за които $-\infty < x < \infty$ и $J_F(x) \leqq y \leqq S_F(x)$. $J_F(x)$ и $S_F(x)$ се наричат съответно долна и горна контурна функция на съвкупността F.

Доказателството на теорема 2 е аналогично на това на теорема 1, но е по-сложно. Както при теоремите на Вайерщрас за равномерните приближения с алгебрични и тригонометрични полиноми и тук може да се постави въпросът за връзката между теоремите 1 и 2. Теорема 1 се получава лесно от теорема 2 (вж. [3]). В настоящата работа се доказва, че теорема 2 следва от теорема 1. Доказателството е значително по-сложно поради някои особености на разглежданата метрика. Да отбележим, че в него не се използва понятието коридор.

Ще използваме означенията от [1], [2] и [3]. С $r(A, B)$ ще означаваме хаусдорфовото разстояние между множествата A и B.

От теорема 1 следва съществуването на константа c_1 такава, че за всеки елемент $A \in F^1_{[-1,1]}$ съществува алгебричен полином $P_n(x) \in H_n$ такъв, че

$$r(A, P_n) \leq c_1 \frac{\ln n}{n},$$

където с P_n е означена графиката на полинома $P_n(x)$ в интервала $[-1, 1]$ (вж. [1]). Очевидно е достатъчно да се установи верността на теорема 2 за произволен елемент F, принадлежащ на $F^1_{2\pi}$, и за достатъчно големи стойности на n. Пред вид на това ще считаме навсякъде по-нататък, че n е фиксирано и е изпълнено неравенството

$$c_1 \frac{\ln n}{n} \leq \frac{1}{20}.$$

Нека $a = 2\pi c_1 \frac{\ln n}{n}$. Ще въведем следните означения:

$$\sigma_{i,a} = \left(\frac{2\pi}{3}(i-1) + 2a, \frac{2\pi}{3}i - 2a\right), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\tau_{i,a} = \left(\frac{2\pi}{3}i - 2a, \frac{2\pi}{3}i + 2a\right), \quad i = 1, 2, 3,$$

като със $\bar{\sigma}_{i,a}$ и $\bar{\tau}_{i,a}$ ще означаваме съответните затворени интервали.

Да отбележим, че навсякъде в изложеното по-нататък индексът i взема стойности 1, 2 и 3.

Нека $F \in F^1_{2\pi}$ и $J_F(x)$ и $S_F(x)$ са съответно нейните долна и горна контурни функции. Въвеждаме означенията

$$a_i = \inf_{x \in \tau_{i,a}} J_F(x), \quad b_i = \sup_{x \in \bar{\tau}_{i,a}} S_F(x).$$

Дефинираме 2π-периодичните функции $J_{F_a}(x)$ и $S_{F_a}(x)$ по следния начин:

$$J_{F_a}(x) = \begin{cases} J_F(x) & \text{за} \quad x \in \sigma_{i,a}, \\ \dfrac{a_i + b_i}{2} & \text{за} \quad x \in \tau_{i,a}, \\ a_i & \text{за} \quad x = \dfrac{2\pi}{3}i \pm 2a; \end{cases}$$

$$S_{F_a}(x)=\begin{cases} S_F(x) & \text{за} \quad x\in\sigma_{i,a}, \\ \dfrac{a_i+b_i}{2} & \text{за} \quad x\in\tau_{i,a}, \\ b_i & \text{за} \quad x=\dfrac{2\pi}{3}i\pm 2a. \end{cases}$$

На всеки елемент F от $F^1_{2\pi}$ ще съпоставим точковата съвкупност F_a, състояща се от всички точки (x, y), за които x е произволно реално число, а $J_{F_a}(x)\leqq y\leqq S_{F_a}(x)$. От дефиницията на F_a следва непосредствено, че $F_a\in F^1_{2\pi}$ и

(1) $$r(F, F_a)\leqq 4a.$$

Разделяме интервала $[0, 2\pi]$ на подинтервалите Δ_i, дефинирани по следния начин:

$$\Delta_i=\left[\frac{2\pi}{3}(i-1), \frac{2\pi}{3}i\right].$$

Съвкупността от всички точки $(x, y)\in F_a$, за които $x\in\Delta_i$, означаваме с $F_{i,a}$. Въвеждаме още означенията

$$\delta_{i,a}=\left[\frac{2\pi}{3}(i-1)+a, \frac{2\pi}{3}i-a\right],$$

$$\theta_{i,a}=\left[\frac{2\pi}{3}i-a, \frac{2\pi}{3}i+a\right].$$

Съвкупността от всички $(x, y)\in F_a$, за които $x\in\delta_{i,a}$, ще означим с $\widetilde{F}_{i,a}$
В сила е следната

Л е м а 1. Съществува тригонометричен полином $T_{(ix)}(x)\in H^T_n$, който удовлетворява условията

(2) $$r(\widetilde{F}_{i,a}, \underset{a}{T^{(i)}})\leqq 2c_1\frac{\ln n}{n},$$

където с $\underset{a}{T^{(i)}}$ е означена графиката на тригонометричния полином $T^{(i)}(x)$ в интервала $\delta_{i,a}$,

(3) $$\left|\frac{a_{i-1}+b_{i-1}}{2}-T^{(i)}(x)\right|\leqq c_1\frac{\ln n}{n} \quad \text{за} \quad x\in\theta_{i-1,a},$$

(4) $$\left|\frac{a_i+b_i}{2}-T^{(i)}(x)\right|\leqq c_1\frac{\ln n}{n} \quad \text{за} \quad x\in\theta_{i,a},$$

като по дефиниция $a_0=a_3$, $b_0=b_3$, $\theta_{0,a}=\theta_{3,a}$,

(5) $$|T^{(i)}(x)|\leqq 2 \quad \text{за} \quad -\infty<x<\infty.$$

Доказателство. Да разгледаме трансформацията

$$\Gamma^i: \begin{cases} u=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{2\pi}{3}(i-1)\right), \\ v=y. \end{cases}$$

Чрез нея $F_{i,\alpha}$ се трансформира в една съвкупност $D_{i,\alpha} \in F^1_{\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]}$.
Да означим с $\bar{D}_{i,\alpha}$ съвкупността от всички точки (u, v), които удовлетворяват едно от условията 1) —3):

$$1) \quad u \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right], \quad v = \frac{a_i + b_i}{2};$$

$$2) \quad u \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \quad (u, v) \in D_{i,\alpha};$$

$$3) \quad u \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \ 1\right], \quad v = \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2}.$$

Очевидно $\bar{D}_{i,\alpha} \in F^1_{[-1,1]}$.

От теорема 1 следва, че съществува алгебричен полином $P^{(i)}(u) \in H_n$ такъв, че

$$r(\bar{D}_{i,\alpha}, P^{(i)}) \leq c_1 \frac{\ln n}{n}, \tag{6}$$

където с $P^{(i)}$ е означена графиката на полинома $P^{(i)}(u)$ в интервала $[-1, 1]$.

Означаваме с $\tilde{D}_{i,\alpha}$ съвкупността на точките $(u, v) \in \bar{D}_{i,\alpha}$, за които $u \in \left[-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]$. От дефиницията на F_α и $\bar{D}_{i,\alpha}$ следва, че ако $u \in \left[-1, -\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\right]$, то към $\bar{D}_{i,\alpha}$ принадлежат точно точките $\left(u, \frac{a_i+b_i}{2}\right)$, а ако $u \in \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right), 1\right]$, то към $\bar{D}_{i,\alpha}$ принадлежат точно точките $\left(u, \frac{a_{i-1}+b_{i-1}}{2}\right)$. Оттук, като вземем пред вид неравенствата

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} \geq 2c_1 \frac{\ln n}{n} \tag{6}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} > 2c_1 \frac{\ln n}{n}$$

и дефиницията на хаусдорфово разстояние, получаваме от (6) неравенствата

$$r(\tilde{D}_{i,\alpha}, P^{(i)}_\alpha) \leq c_1 \frac{\ln n}{n}, \tag{7}$$

(тук с $P^{(i)}_d$ е означена графиката на алгебричния полином $P^{(i)}(u)$ в интервала $\left[-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]$),

$$\left|\frac{a_i+b_i}{2} - P^{(i)}(u)\right| \leq c_1 \frac{\ln n}{n} \quad \text{за} \quad u \in \left[-1, -\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right], \tag{8}$$

$$\left|\frac{a_{i-1}+b_{i-1}}{2} - P^{(i)}(u)\right| \leq c_1 \frac{\ln n}{n} \quad \text{за} \quad u \in \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right), 1\right], \tag{9}$$

$$|P^{(i)}(u)| \leq 2 \quad \text{за} \quad u \in [-1, 1]. \tag{10}$$

Да разгледаме тригонометричния полином

$$T^{(i)}(x)=P^{(i)}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}(i-1)\right)\right).$$

Като вземем пред вид неравенството

$$|\arccos u_1-\arccos u_2|\leqq 2|u_1-u_2| \quad \text{за} \quad u_1,\ u_2\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

и дефиницията за хаусдорфово разстояние, от (7), (8), (9) и (10) получаваме неравенствата (2), (3), (4) и (5).

С това лемата е доказана.

Лема 2. Съществува тригонометричен полином $T_n(x)\in H_n^T$, който удовлетворява неравенствата

(11) $$|T_n(x)|\leqq L \quad \text{за} \quad \pi+a\leqq x\leqq 2\pi-a,$$

(12) $$-L\leqq T_n(x)\leqq 1+L \quad \text{за} \quad -a\leqq x\leqq a;\quad \pi-a\leqq x\leqq \pi+a,$$

(13) $$|1-T_n(x)|\leqq L \quad \text{за} \quad a\leqq x\leqq \pi-a,$$

където $L=c_1\frac{\ln n}{n}$.

Доказателство. В [1] е доказано, че съществува алгебричен полином

$$P_n(x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k}a_ix^{2i-1}+1\right),\quad k=\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

такъв, че са изпълнени неравенствата

(14) $$|P_n(x)|\leqq L \quad \text{за} \quad -1\leqq x\leqq -L,$$

(15) $$-L\leqq P_n(x)\leqq 1+L \quad \text{за} \quad -L\leqq x\leqq L,$$

(16) $$|1-P_n(x)|\leqq L \quad \text{за} \quad L\leqq x\leqq 1,$$

където $L=c_1\frac{\ln n}{n}$.

Да означим $T_n(x)=P_n(\sin x)$. Като вземем пред вид, че

$$\arcsin L\leqq\frac{L}{\sqrt{1-L^2}}\leqq 2L<a,\quad L=c_1\frac{\ln n}{n}<\frac{1}{20},$$

от (14), (15) и (16) получаваме неравенствата (11), (12) и (13). С това доказателството на лемата е завършено.

Нека отбележим, че от самото представяне

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{k}a_i(\sin x)^{2i-1}+1\right],\quad k=\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

следва

(17) $$T_n(x)+T_n(x+\pi)=1.$$

Дефинираме следния тригонометричен полином:

$$T(x)=\sum_{i=1}^{3} T^{(i)}(x)T_n\left(x-\frac{2\pi}{3}(i-1)\right)T_n\left(x-\frac{2\pi}{3}(i-1)+\frac{\pi}{3}\right).$$

Очевидно $T(x)\in H_{3n}^{T}$.

Лема 3. Тригонометричният полином $T(x)$ удовлетворява неравенствата

$$|T^{(i)}(x)-T(x)|\leq 14c_1\frac{\ln n}{n} \quad \text{за} \quad x\in\delta_{i,a}, \tag{18}$$

$$\left|T(x)-\frac{a_i+b_i}{2}\right|\leq 16c_1\frac{\ln n}{n} \quad \text{за} \quad x\in\theta_{i,a}. \tag{19}$$

Доказателство. Ще докажем, че неравенствата (18) и (19) са изпълнени в случая, когато $i=1$. Останалите случаи ($i=2$, 3) се разглеждат по аналогичен начин.

а) Нека $x\in\delta_{1,a}$. Като вземем пред вид неравенствата (5), (11), (12) и (13), получаваме

$$\left|T^{(2)}(x)T_n\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)T_n\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|\leq 4c_1\frac{\ln n}{n} \tag{20}$$

$$\left|T^{(3)}(x)T_n\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)T_n(x-\pi)\right|\leq 4c_1\frac{\ln n}{n}, \tag{21}$$

$$\left|T^{(1)}(x)-T^{(1)}(x)T_n(x)T_n\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|\leq|T^{(1)}(x)|\left|1-T_n(x)T_n\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right| \tag{22}$$

$$\leq|T^{(1)}(x)|\,|1-T_n(x)|+|T^{(1)}(x)|\,|T_n(x)|\left|1-T_n\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|\leq 6c_1\frac{\ln n}{n}.$$

От (20), (21) и (22) следва

$$|T^{(1)}(x)-T(x)|\leq\left|T^{(1)}(x)-T^{(1)}(x)T_n(x)T_n\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

$$+\left|T^{(2)}(x)T_n\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)T_n\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|+\left|T^{(3)}(x)T_n\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)T_n(x-\pi)\right|\leq 14c_1\frac{\ln n}{n},$$

което представлява неравенството (18).

(б) Нека $x\in\theta_{1,a}$. Както и в горния случай се проверява, че неравенството (21) отново е в сила. От леми 1 и 2 и (17) получаваме последователно

$$\left|\frac{a_1+b_1}{2}-T^{(1)}(x)T_n(x)T_n\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-T^{(2)}(x)T_n\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)T_n\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right| \tag{23}$$

$$\leq\left|\frac{a_1+b_1}{2}-T^{(1)}(x)T_n\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-T^{(2)}(x)T_n\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\right|+4|1-T_n(x)|$$

$$+4\left|1-T_n\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|\leq 2\left|\frac{a_1+b_1}{2}-T^{(1)}(x)\right|+2\left|\frac{a_1+b_1}{2}-T^{(2)}(x)\right|+8L\leq 12c_1\frac{\ln n}{n}.$$

От (21) и (23) следва неравенството (19).

С това лемата е доказана.

Лема 4. В сила е неравенството

$$r(T,\ F_a) \leqq 16c_1 \frac{\ln n}{n}, \tag{24}$$

където с T е означена графиката на тригонометричния полином $T(x)$ в интервала $(-\infty,\ \infty)$.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че за всяка точка $a=(x,\ y) \in F_a$ съществува точка $b=(x_1,\ y_1) \in T$ такава, че

$$p(a,\ b)=\max\{|x-x_1|,\ |y-y_1|\} \leqq 16c_1 \frac{\ln n}{n}, \tag{25}$$

и обратно — за всяка точка $a'=(x',\ y') \in T$ съществува точка $b'=(x_1',\ y_1') \in F_a$ такава, че

$$p(a',\ b') \leqq 16c_1 \frac{\ln n}{n}. \tag{26}$$

Оттук, като се използва лема 1.4 от [2], се получава неравенството (24).

а) Нека $a=(x,\ y)$ е произволна точка от F_a. Ако $x \in \delta_{i,a}$, то от (2) следва, че съществува точка $d=(x_1,\ T^{(i)}(x_1))$, $x_1 \in \delta_{i,a}$ такава, че

$$p(a,\ d)=\max\{|x-x_1|,\ |y-T^{(i)}(x_1)|\} \leqq 2c_1 \frac{\ln n}{n}.$$

Оттук и от (18) получаваме

$$|y-T(x_1)| \leqq |y-T^{(i)}(x_1)|+|T^{(i)}(x_1)-T(x_1)| \leqq 16c_1 \frac{\ln n}{n},$$

откъдето се вижда, че ако положим $b=(x_1,\ T(x_1))$, ще бъде изпълнено (25).

Ако $x \in \theta_{i,a}$, от (19) следва, че неравенството (25) ще бъде удовлетворено, ако за b вземем точката $(x,\ T(x))$.

б) Нека $a'=(x',y')$ е произволна точка от T. По напълно аналогичен начин както в а) получаваме, че съществува точка $b'=(x_1',\ y_1')$ такава, че е изпълнено неравенството (26).

С това доказателството на лемата е завършено.

От неравенствата (1) и (24) получаваме

$$r(F,\ T) \leqq r(F,\ F_a)+r(F_a,\ T) \leqq (8\pi+16)c_1 \frac{3\ln 3n}{3n} = c_2 \frac{\ln 3n}{3n},$$

с което доказателството на теорема 2 е завършено.

В [1] е доказано, че теорема 1 не може да се подобри по отношение на порядъка $\frac{\ln n}{n}$. От връзката, която съществува между теореми 1 и 2, следва, че и теорема 2 не може да се подобри по отношение на същия порядък, което е доказано директно в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл. Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от Хаусдорфовски тип. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **55** (1960/61), кн. 1, 1—39.
2. Сендов, Бл. и Б. Пенков. ε-ентропия и ε-капацитет на пространството от непрекъснатите функции. Изв. на Мат. инст. на БАН, **6** (1962), 27—50.
3. Веселинов, В. Аппроксимирование функций при помощи тригонометрических полиномов относительно одной метрики хаусдорфовского типа. Mathematica, 9 (32) (1967), № 1, 185—199.

Постъпила на 26. I. 1967 г.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В МЕТРИКЕ ХАУСДОРФА

Васил А. Попов и Васил М. Веселинов

Резюме

В [1] Б. Сендов определяет и изучает наилучшее приближение $E_n^*(F)$ ограниченного множества точек F алгебраическими полиномами степени n в метрике Хаусдорфа. Он доказывает следующую теорему:

Теорема 1. Если $F \in F^M_{[a,b]}$, то для каждого натурального числа n выполнено неравенство

$$E_n^*(F) \leqq c\,\frac{\ln n}{n},$$

где постоянная c не зависит от n. Через $F^M_{[a,b]}$ обозначена совокупность всех замкнутых ограниченных множеств точек плоскости xOy, выпуклых относительно оси y, проекция которых на ось x совпадает с отрезком $[a, b]$, и их ординаты заключены в интервале $[0, M]$, $M>0$.

В [3] рассматривается аналогичный вопрос о наилучшем приближении E_n^{T*} периодических множеств точек посредством тригонометрических полиномов n-ного порядка в той же метрике. Получен следующий результат:

Теорема 2. Если $F \in F^M_{2\pi}$, то для каждого натурального числа n выполнено неравенство

$$E_n^{T*}(F) \leqq c^*\,\frac{\ln n}{n},$$

где постоянная c^* не зависит от n. $F^M_{2\pi}$ обозначает совокупность всех замкнутых множеств точек плоскости xOy, выпуклых относительно оси y, их проекция на ось x совпадает с ней, которые 2π-периодичны, т. е. если $(x, y) \in F$, то и $(x+2k\pi, y) \in F$ для $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и их ординаты принадлежат интервалу $[0, M]$, $M>0$.

Легко показать, что теорема 1 следует из теорем 2. В этой работе доказывается, что и теорема 2 следует из теоремы 1. Задача усложняется из-за некоторых особенностей рассматриваемой метрики.

Авторы считают, что приложенный метод доказательства может быть использован и в других вопросах метрики Хаусдорфа.

SUR L'APPROXIMATION DE FONCTIONS AU MOYEN DE POLYNÔMES ALGEBRIQUES ET TRIGONOMETRIQUES DANS LA METRIQUE DE HAUSDORFF

Vassil A. Popov, Vassil M. Vesselinov

Résumé

En [1] Bl. Sendoff défirit et examine la meilleure approximation $E_n^*(F)$ d'un ensemble de points borné F au moyen de polynômes algébriques de $n^{\text{ème}}$ degré dans la métrique de Hausdorff. Il a démontré le théorème fondamental suivant:

Théorème 1. Si $F \in F^M_{[a,b]}$, alors pour chaque nombre naturel n est valable l'inégalité

$$E_n^*(F) \leqq c \frac{\ln n}{n},$$

où la constante c ne dépend pas de n. Par $F^M_{[a,b]}$ on désigne la totalité d'ensembles de points bornés et fermés dans le plan xOy qui sont convexes par rapport à l'axe y, leur projection sur l'axe x coïncide avec l'intervalle $[a, b]$ et leurs ordonnées appartiennent à $[0, M]$ $M>0$.

En [3] on examine le question analogue de la meilleure approximation E_n^{T*} des ensembles périodiques de points au moyen de polynômes trigonométriques de $n^{\text{ème}}$ degré dans la même métrique. On a obtenu le résultat suivant:

Théorème 2. Si $F \in F^M_{2\pi}$, alors pour chaque nombre nafurel n est valable l'inégalité

$$E_n^{T*}(F) \leqq c^* \frac{\ln n}{n},$$

où c^* ne dépend pas de n. $F^M_{2\pi}$ désigne la totalité d'ensembles de points fermés dans le plan xOy que sont convexes par rappont à l'axe y, leur projection sur l'axe x coïncidant avec elle, qui sont 2π-périodiques c'est-à-dire si $(x, y) \in F$ alors $(x+2k\pi, y) \in F$ pour $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ et leurs ordonnées appartiennent à $[0, M]$, $M>0$.

Il est facile de démontrer que le théorème 1 résulte du théorème 2.

Dans le présent travail il est démontré que le théorème 2 résulte du théorème 1. Ce problème est plus difficile que le précédent à cause de certaines particularités de la métrique de Hausdorff.

Les auteurs pensent que la méthode de démonstration peut être utilisée dans d'autres problèmes de la métrique considérée.