БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

ЛИНЕЙНИ ОПЕРАТОРИ С ДОСТАТЪЧНО МНОГО ОТНАПРЕД ДАДЕНИ СОБСТВЕНИ ВЕКТОРИ

Димитър Скордев

В редица работи на Тагамлицки, като например [7], [8] и [9], за намиране на неразложимите елементи на нормирани конуси се използват разлагащи оператори, които са линейни. Поради важността на задачата за намиране на неразложимите елементи на един конус естествено е да се направи опит да се изучат от обща гледна точка свойствата на разлагащите линейни оператори. Такъв опит бе направен в кандидатската дисертация на автора [5] (част от резултатите, които се съдържат в тази дисертация, са публикувани в [3]* и [4]). При известни предположения за дадения конус в [5] се разглежда съвкупността R на операторите, които могат да се представят като линейни комбинации на разлагащи линейни оператори, и се доказват някои теореми за изоморфизъм с алгебри от ограничени непрекъснати функции. При това в раздел II на [5] се занимаваме само с онези оператори от R, които са релативно непрекъснати върху единичната сфера на дадения конус, докато в раздел III изучаваме цялата съвкупност R.

Резултатите, които излагаме в настоящата работа, могат да се разглеждат като обобщение и продължение на изследванията от раздел II на [5]. Ще поясним това съвсем накратко, тъй като възнамеряваме да се спрем по-подробно на този въпрос в една бъдеща работа (впрочем обясненията, които сега ще дадем, ще бъдат достатъчни за изясняването на въпроса, ако при четенето на раздел II от [5] направим допълнителното предположение, че даденият конус е линейно пространство и нормата е четна). От цитираните работи на Тагамлицки се вижда, че намирането на неразложимите елементи с помощта на разлагащи оператори се основава на следното обстоятелство: ако имаме един разлагащ опера-

* Ползваме се от случая, за да извършим една поправка в доказателството на теорема 1 от [3]. Частта от доказателството от думата „последният" на стр. 154, ред 12 отдолу, до края на ред 8 отдолу на същата страница трябва да се замени със следния текст: „Следователно $I_E^{\wedge}$ е подпръстен на $C(\mathbf{M})$ и ако в две точки от $\mathbf{M}$ всяка функция от $I_E^{\wedge}$ приема равни стойности, то в тези точки приема равни стойности и всяка функция от $R^{\wedge}$, която се анулира навсякъде в $\mathbf{M}_E$ — в частност функцията $a^{\wedge}$. Като приложим теоремата на Стоун — Вайерщрас, заключаваме, че $a^{\wedge}$ може да се апроксимира равномерно с функции от $I_E^{\wedge}$".

тор, всички неразложими елементи на дадения конус са собствени вектори на този оператор със собствени числа*, принадлежащи на затворения интервал [0, 1]. Оттук следва, че ако имаме един оператор от съвкупността R, всички неразложими елементи на дадения конус са собствени вектори на този оператор и множеството на съответните им собствени числа е ограничено. Обратно, ако са изпълнени предположенията на раздел II от [5], теорема IX от същия раздел показва, че всеки път, когато в даденото линейно пространство имаме един линеен оператор, който е релативно непрекъснат върху единичната сфера на конуса и за който всички неразложими елементи на конуса са собствени вектори, като при това множеството на съответните им собствени числа е ограничено**, този оператор принадлежи на съвкупността R. Ето защо задачата, която се разглежда в раздел II от [5], може да се схваща като частен случай от задачата за изучаване на линейните оператори, които в известен смисъл имат достатъчно много отнапред дадени собствени вектори и освен това удовлетворяват определено изискване за непрекъснатост. Последната задача може да се постави при предположения, които са по-малко ограничителни от предположенията в гореспоменатия раздел на [5]*** — нещо, което правим в настоящата работа. Основните резултати се намират в нейния втори раздел****. Част от тях, като например теоремите II. 2, II. 3, II. 4, II. 8, II. 9 и II. 13, могат да се разглеждат като обобщения на някои резултати от раздел II на [5] (в настоящата работа няма да уточняваме смисъла на тези думи). Други резултати от настоящата статия, като например лема II, теоремите II. 6, II. 7 и II. 15 и следствията от последните две теореми, нямат съответни в [5]. Теорема II. 5 също не може да се схваща като обобщение на някой резултат от [5]; тя обаче може да се разглежда като обобщение на един резултат на Тагамлицки, доказан с други средства и изложен на лекциите по функционален анализ, прочетени в Софийския университет през учебната 1958/59 г. Аналогична бележка важи и за теорема II. 14, но в този случай обобщението е частично и освен това може да се покаже, че то е само привидно.

I

Този раздел играе помощна роля. В него се въвеждат някои понятия и означения и се доказват някои предложения, нужни за по-нататъшното изложение. В § 1 се въвежда понятието обобщено реално банахово пространство, а в § 2 на всяко такова пространство се съпоставя по една

---

* В настоящата работа се придържаме към следната дефиниция на понятията собствен вектор и собствено число: ако в едно линейно пространство имаме един оператор A, за един вектор x от това пространство казваме, че е собствен вектор на A със собствено число a, ако $x \neq 0$ и е изпълнено равенството $Ax = ax$.

** Може да се покаже, че предположението за ограниченост на множеството на собствените числа следва от останалите предположения.

*** Едно от предположенията в раздел II на [5] е, че единичната сфера на дадения конус е компактна.

**** Работата се състои от два раздела, означени с римски цифри; разделите от своя страна се разпадат на параграфи. Теоремите и лемите в отделните раздели имат отделна номерация. Когато споменаваме дадена теорема или лема вън от раздела, в който се намира последната, пред номера на предложението поставяме номера на раздела, където се намира то; в противен случай пишем само номера на предложението.

алгебра от линейни оператори, като тази алгебра също се снабдява със структура на обобщено банахово пространство.

§ 1. Под обобщено реално банахово пространство (думата „реално" обикновено ще изпускаме) ние ще разбираме наредена тройка (X, Σ, N), за която са изпълнени следните условия:

1) X е линейно пространство над полето на реалните числа.

2) Σ е система от четни полунорми, дефинирани в X, които не се анулират едновременно в никоя точка на X, различна от началото.

3) N е четна норма, дефинирана в X.

4) Единичната сфера на X относно N е ограничена и пълна относно системата Σ.

Забележка 1. Единична сфера на линейното пространство X относно нормата N наричаме, както обикновено, множеството на онези елементи x на X, за които е изпълнено неравенството $N(x) \leqq 1$. Ограничеността на това множество относно Σ означава, че всички полунорми от Σ са ограничени в това множество. Изискването това множество да бъде пълно относно Σ означава, че искаме всяка обобщена редица от елементи на въпросното множество, която е фундаментална относно Σ, да клони относно Σ към някой елемент на същото множество.

Забележка 2. При дефиницията на понятието обобщено реално банахово пространство допускаме полунормите от Σ и нормата N да имат за дефиниционна област някое линейно пространство, по-голямо от пространството X. Това правим, за да не става нужда да променяме Σ и N, когато преминаваме от едно линейно пространство към някое негово подпространство.

Ще разгледаме няколко примера за тройки (X, Σ, N), които представляват обобщени банахови пространства.

Пример 1. Нека X е линейно пространство над полето на реалните числа, а N нека е четна норма в X, относно която X е банахово пространство. Разглежданият пример се получава, ако означим с Σ системата с единствен елемент нормата N.

Пример 2. Нека X е пространството на безкрайните редици от реални числа

$$x=(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots),$$

за които редът $\sum_{i=1}^{\infty} x^{(i)}$ е сходящ. Системата Σ нека се състои от един единствен елемент, а именно нормата p, дефинирана чрез равенството

$$p(x)=\sum_{i=1}^{\infty} \varkappa_i \ x^{(i)}$$

където $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ е дадена ограничена редица от положителни числа. Нормата N нека се определя посредством равенството

$$N(x)=\sum_{i=1}^{\infty} | x^{(i)}$$

Пример 3. Нека T е произволно топологично пространство. Да означим, както обикновено, с $C(T)$ пространството на всички реални функции, които са дефинирани, ограничени и непрекъснати в пространството T. Нека X е спрегнатото пространство на пространството $C(T)$ относно равномерната норма, т. е. относно нормата

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(t)| : t \in T\}$$

(с други думи, нека X се състои от всевъзможните линейни функционали, дефинирани в $C(T)$, които са непрекъснати относно споменатата норма). За всяка функция φ от $C(T)$ да дефинираме полунорма p_φ в X с помощта на равенството

$$p_\varphi(f) = |f(\varphi)|$$

и нека Σ е съвкупността на полунормите p_φ, където φ пробягва $C(T)$. С N да означим спрегнатата норма на нормата $\|\varphi\|$ т. е. нека N се дефинира посредством равенството

$$N(f) = \sup\{|f(\varphi)| : \varphi \in C(T), \|\varphi\| \leqq 1\}.$$

Сега ще отбележим някои свойства на обобщените банахови пространства.

Лема 1. Ако (X, Σ, N) е обобщено банахово пространство и $p \in \Sigma$, то съществува такова неотрицателно число λ, че за всяко x от X е изпълнено неравенството

$$p(x) \leqq \lambda N(x).$$

Доказателство. Достатъчно е с λ да означим една горна граница на полунормата p в единичната сфера на X относно N.

Лема 2. Ако (X, Σ, N) е обобщено банахово пространство, то при всеки избор на неотрицателното число ϱ множеството на онези x от X, за които $N(x) \leqq \varrho$, е пълно относно Σ.

Доказателство. Използваме Σ-пълнотата на единичната сфера на X относно N.

Лема 3. Ако (X, Σ, N) е обобщено банахово пространство, то при всеки избор на неотрицателното число ϱ множеството на онези x от X, за които $N(x) \leqq \varrho$, е затворено относно Σ.

Доказателство. Използваме лема 2.

От лемите 1, 2 и 3 следва

Лема 4. Ако (X, Σ, N) е обобщено банахово пространство, то X е банахово пространство относно нормата N.

Доказателство. Нека редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots \tag{1}$$

от елементи на X да бъде фундаментална относно нормата N. В такъв случай тя е ограничена относно тази норма. От лема 1 следва, че редицата (1) е фундаментална и относно Σ. Лема 2 позволява да твърдим, че тази редица клони относно Σ към някакъв елемент x_0 на X. Ще покажем, чо x_0 е граница на (1) и относно нормата N. Нека ε е произволно положително число. Избираме числото ν по такъв начин, че всеки път, когато номерата m и n са по-големи от ν, да бъде изпълнено неравенството

$$N(x_m - x_n) \leqq \varepsilon.$$

На m даваме фиксирана стойност, по-голяма от ν, и разглеждаме редицата

$$x_m - x_1,\ x_m - x_2,\ x_m - x_3, \ldots$$

За всички членове на тази редица с номера, по-големи от ν, стойността на нормата N не надминава ε, а редицата клони относно Σ към елемента $x_m - x_0$. С помощта на лема 3 заключаваме, че е в сила неравенството

$$N(x_m - x_0) \leqq \varepsilon.$$

И така показахме, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова ν, че при $m > \nu$ е в сила неравенството $N(x_m - x_0) \leqq \varepsilon$. С това доказателството е завършено.

Ще отбележим още следното свойство:

Лема 5. Ако (X, Σ, N) е обобщено банахово пространство, а X_0 е Σ-затворено линейно подпространство на X, то (X_0, Σ, N) също е обобщено банахово пространство.

Доказателство. Единичната сфера на X_0 относно N представлява сечение на X_0 с единичната сфера на X относно N, откъдето следва, че ако заменим X с X_0, условието 4) от дефиницията на понятието обобщено банахово пространство ще бъде изпълнено. Очевидно останалите три условия също ще бъдат изпълнени.

§ 2. Ако $\Xi = (X, \Sigma, N)$ е обобщено банахово пространство, с L_Ξ ще означаваме съвкупността на онези линейни изображения на X в X, които са релативно непрекъснати относно Σ върху единичната сфера на X относно N. С други думи, един линеен оператор A с дефиниционна област X и стойности, принадлежащи на X, ние ще причисляваме към съвкупността L_Ξ точно тогава, когато за всяка обобщена редица $\{x_\gamma\}$ от елементи на единичната сфера на X относно N и за всеки елемент x_0 на тази единична сфера е в сила импликацията: ако редицата $\{x_\gamma\}$ клони към x_0 относно Σ, то редицата $\{Ax_\gamma\}$ клони относно Σ към елемента Ax_0. Съвкупността L_Ξ не е празна, тъй като тя съдържа например единичния оператор I, дефиниран чрез равенството

$$Ix = x.$$

Очевидно всяка линейна комбинация с реални коефициенти от елементи на L_Ξ пак принадлежи на L_Ξ. Следователно съвкупността L_Ξ е линейно пространство над полето на реалните числа.

От дефиницията на съвкупността L_Ξ веднага следва

Лема 6. Ако един оператор принадлежи на съвкупността L_Ξ, където $\Xi = (X, \Sigma, N)$ е обобщено банахово пространство, той е релативно непрекъснат относно Σ върху всяко ограничено относно N подмножество на X.

Съществена роля в по-нататъшните разглеждания ще играе следното твърдение:

Теорема 1. Ако $\Xi = (X, \Sigma, N)$ е обобщено банахово пространство, то всеки оператор от съвкупността L_Ξ е непрекъснат относно нормата N, т. е. за всеки оператор A от L_Ξ съществува такова неотрицателно число λ, че за всяко x от X е в сила неравенството

$$N(Ax) \leqq \lambda N(x). \tag{2}$$

Доказателство. Ще си послужим с теоремата за затворената графика ([2], гл. III, теорема 7). Нека $A \in L_{\Xi}$ и нека една редица от елементи на X

$$(3) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots$$

клони относно нормата N към даден елемент x_0, като същевременно редицата

$$(4) \qquad Ax_1, Ax_2, Ax_3, \ldots$$

клони относно N към някакъв елемент y_0. Ако покажем, че $y_0 = Ax_0$, затвореността на графиката на A относно нормата N ще бъде установена, а това заедно с лема 4 ще бъде достатъчно, за да можем да твърдим, че A е непрекъснат относно N. За да се убедим, че $y_0 = Ax_0$, прилагаме най-напред лема 1, от която следва, че редиците (3) и (4) клонят съответно към x_0 и y_0 и относно Σ. От друга страна, редицата (3) е ограничена относно нормата N; това заедно с лема 6 ни позволява да твърдим, че редицата (4) клони относно Σ към Ax_0 и следователно $y_0 = Ax_0$. Теоремата е доказана.

Следствие 1. Ако $A \in L_{\Xi}$, където $\Xi = (X, \Sigma, N)$ е обобщено банахово пространство, образът на единичната сфера на X относно N посредством оператора A представлява ограничено относно N подмножество на X.

С помощта на горното следствие и на лема 6 получаваме

Следствие 2. Ако операторите A и B принадлежат на съвкупността L_{Ξ}, където Ξ е обобщено банахово пространство, операторът AB, дефиниран чрез равенството

$$(AB)x = A(Bx),$$

също принадлежи на L_{Ξ}.

Следствие 2 от теорема 1 показва, че за всяко обобщено банахово пространство Ξ линейното пространство L_{Ξ} в същност представлява една алгебра над полето на реалните числа. Тази алгебра притежава единичен елемент, а именно операторът I.

В L_{Ξ} ще дефинираме една норма N^* по следния начин: ако $A \in L_{\Xi}$, с $N^*(A)$ ще означаваме най-малкото неотрицателно число λ, за което неравенството (2) от теорема 1 е изпълнено при всеки избор на x в X (тук, както и нататък в този параграф предполагаме, че $\Xi = (X, \Sigma, N)$ е някакво фиксирано обобщено банахово пространство). Свойствата на норми, които се дефинират по подобен начин, са добре известни. Ще отбележим изрично само следното свойство на въведената норма, от което ще имаме нужда в раздел II:

Лема 7. Ако $A \in L_{\Xi}$, $x \neq 0$ и $Ax = \alpha x$, където α е реално число, то $|\alpha| \leq N^*(A)$.

Доказателство. От една страна, имаме

$$N(Ax) = N(\alpha x) = |\alpha| \,.\, N(x),$$

а, от друга,

$$N(Ax) \leq N^*(A) \,.\, N(x).$$

Следователно вярно е неравенството

$$|\alpha| \, . N(x) \leqq N^*(A) \, . N(x),$$

откъдето след съкращаване на $N(x)$ получаваме желаното заключение.

Ще имаме нужда и от една система от полунорми в линейното пространство L_Ξ, която сега ще дефинираме. За целта най-напред ще отбележим, че е вярно следното твърдение:

Лема 8. Ако $p \in \Sigma$, то съществува такова неотрицателно число λ, че при всеки избор на оператора A от L_Ξ и на елемента x от X е в сила неравенството

$$p(Ax) \leq \lambda N^*(A) \, . N(x).$$

Доказателство. Нека $p \in \Sigma$. Избираме неотрицателното число λ по такъв начин, че за всяко x от X да бъде изпълнено неравенството

$$p(x) \leqq \lambda N(x).$$

Такова число λ съществува според лема 1. Ако A е произволен оператор от L_Ξ и x е произволен елемент на X, ще имаме

$$p(Ax) \leq \lambda N(Ax) \leqq \lambda N^*(A) \, . N(x).$$

Следствие. Ако $p \in \Sigma$ и $A \in L_\Xi$, то съществува такова неотрицателно число a, че за всяко x от X е изпълнено неравенството

$$p(Ax) \leqq aN(x). \tag{5}$$

Ако p е произволна полунорма от Σ и A е произволен оператор от L_Ξ, с $p^*(A)$ ще означаваме най-малкото неотрицателно число a, за което неравенството (5) е изпълнено при всеки избор на x в X. Очевидно имаме

Лема 9. Ако $p \in \Sigma$, то p^* е четна полунорма в L_Ξ и съществува такова неотрицателно число λ, че при всеки избор на A в L_Ξ е изпълнено неравенството

$$p^*(A) \leqq \lambda N^*(A).$$

Да означим с Σ^* съвкупността от полунормите p^*, където $p \in \Sigma$. От дефиницията на полунормите p^* следва непосредствено, че при всеки избор на p в Σ, на A в L_Ξ и на x в X е изпълнено неравенството

$$p(Ax) \leq p^*(A) \, . N(x). \tag{6}$$

Като използваме това обстоятелство, получаваме

Лема 10. Полунормите от Σ^* не се анулират едновременно за никой оператор от L_Ξ, различен от нулевия, и всеки път, когато една обобщена редица $\{A_\gamma\}$ от елементи на L_Ξ клони относно Σ^* към някой оператор A_0 от L_Ξ, при всяко фиксирано x от X редицата $\{A_\gamma x\}$ клони към елемента $A_0 x$ относно Σ.

В дефиницията на съвкупността L_Ξ за разглежданите линейни оператори не поискахме да бъдат непрекъснати относно Σ върху цялото пространство X, а поискахме само да бъдат релативно непрекъснати върху неговата единична сфера. Това обстоятелство създаваше дотук само затруднения (например при доказателството, че произведение на два оператора от L_Ξ принадлежи на L_Ξ). Напротив, в лемата, която следва, това обстоятелство ще бъде от полза, защото, ако под L_Ξ бихме разбирали съвкупността на всички линейни изображения на X в X, които са непрекъснати относно Σ върху цялото пространство X, с помощта на пример може да се покаже, че лемата не винаги би била вярна.

Лема 11. Единичната сфера на пространството L_Ξ относно нормата N^* е пълна относно системата от полунорми Σ^*.

Доказателство. Нека $\{A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ е обобщена редица от елементи на L_Ξ, която е фундаментална относно Σ^*, и нека за всяко от Γ е изпълнено неравенството

$$N^*(A_\gamma) \leq 1.$$

Ако $p \in \Sigma$, прилагайки неравенството (6), получаваме, че за всяко x от X и при всеки избор на γ и γ' от Γ ще бъде в сила неравенството

$$p(A_\gamma x - A_{\gamma'} x) \leq p^*(A_\gamma - A_{\gamma'}) \,.\, N(x). \tag{7}$$

Оттук заключаваме, че за всяко фиксирано x от X редицата $\{A_\gamma x\}$ ще бъде фундаментална относно Σ. Нека x е произволен елемент на X. За всяко γ от Γ имаме

$$N(A_\gamma x) \leq N(x).$$

С помощта на лема 2 получаваме, че редицата $\{A_\gamma x\}$ е сходяща относно Σ и клони към някакъв елемент, за който стойността на нормата N не надминава числото $N(x)$. Ако за всяко x от X означим с $A_0 x$ границата, към която клони редицата $\{A_\gamma x\}$ относно системата от полунорми Σ, получаваме едно линейно изображение A_0 на X в X, като при това за всяко x от X ще бъде изпълнено неравенството

$$N(A_0 x) \leq N(x). \tag{8}$$

Ще покажем, че операторът A_0 е релативно непрекъснат относно Σ върху единичната сфера на X относно N. За целта е достатъчно да покажем, че редицата $\{A_\gamma x\}$ клони равномерно към $A_0 x$ при x, принадлежащо на тази единична сфера, т. е. че за всяка полунорма p от Σ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такъв индекс γ_0, че при $\gamma \succ \gamma_0$ неравенството

$$p(A_\gamma x - A_0 x) \leqq \varepsilon \tag{9}$$

да бъде изпълнено за всяко x от единичната сфера. Нека $p \in \Sigma$ и нека $\varepsilon > 0$. Избираме $\gamma_0 \in \Gamma$ по такъв начин, че при $\gamma \succ \gamma_0$ и $\gamma' \succ \gamma_0$ да бъде изпълнено неравенството

$$p^*(A_\gamma - A_{\gamma'}) \leq \varepsilon.$$

Като вземем пред вид неравенството (7), получаваме, че при $\gamma \succ \gamma_0$ и $\gamma' \succ \gamma_0$ за всяко x от X ще имаме

$$p(A_\gamma x - A_{\gamma'} x) \leqq \varepsilon N(x).$$

Ако в това неравенство фиксираме γ и x и извършим граничен преход по γ', получаваме, че при $\gamma \succ \gamma_0$ за всяко x от X е изпълнено неравенството

$$p(A_\gamma x - A_0 x) \leqq \varepsilon N(x) \tag{10}$$

и значи при $N(x) \leq 1$ ще бъде в сила неравенството (9). С това е установена равномерната сходимост на редицата $\{A_\gamma x\}$ при x, принадлежащо на единичната сфера на X, а значи и релативната непрекъснатост на оператора A_0 относно Σ върху тази сфера. По този начин доказахме, че $A_0 \in L_\Xi$. От обстоятелството, че за всяко x от X е в сила неравенството (8), следва, че

$$N^*(A_0) \leq 1.$$

Остава да покажем, че редицата $\{A_\gamma\}$ клони към A_0 относно Σ^*. За целта е достатъчно да отбележим следното: ако $p \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$ и γ_0 е такъв индекс от Γ, че при $\gamma \succ \gamma_0$ неравенството (10) е изпълнено за всяко x от X, то (по дефиницията на полунормата p^*) при $\gamma \succ \gamma_0$ ще имаме

$$p^*(A_\gamma - A_0) \leq \varepsilon.$$

С това доказателството е завършено.

От нещата, които установихме дотук, получаваме

Теорема 3. Наредената тройка (L_Ξ, Σ^*, N^*) представлява обобщено банахово пространство.

Към обобщеното банахово пространство (L_Ξ, Σ^*, N^*) можем да приложим резултатите от § 1. По този начин виждаме например, че L_Ξ е банахово пространство относно нормата N^*. Освен това всеки път, когато имаме някое Σ^*-затворено линейно подпространство R на L_Ξ, можем да твърдим, че наредената тройка (R, Σ^*, N^*) представлява обобщено банахово пространство.

Пространството L_Ξ в настоящата работа играе спомагателна роля, поради което тук няма да се спираме по-подробно на неговите свойства. Ще докажем само още едно твърдение (което ще ни потрябва в раздел II).

Лема 12. Нека M_0 и M_1 са две подмножества на X и нека $0 \overline{\in} M_1$. Да означим с R съвкупността на онези оператори от L_Ξ, които приемат стойност 0 във всяка точка от M_0 и за които всеки елемент на M_1 е собствен вектор. Съвкупността R е затворена относно системата от полунорми Σ^*.

Доказателство. Нека $\{A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ е обобщена редица от елементи на R, която клони относно Σ^* към някакъв оператор A_0 от L_Ξ. Ще покажем, че $A_0 \in R$. Вземаме произволен елемент $x_0 \in M_0$. За всяко γ от Γ имаме

$$A_\gamma x_0 = 0.$$

Според лема 10 обаче редицата $\{A_\gamma x_0\}$ клони относно Σ към елемента $A_0 x_0$. Оттук заключаваме, че

$$A_0 x_0 = 0.$$

Нека $x_1 \in M_1$. Да означим с X_1 множеството на елементите от вида αx_1, където α взема произволни реални стойности. За всяко γ от Γ елементът $A_\gamma x_1$ принадлежи на X_1. Но X_1 е Σ-затворено подмножество на X, а редицата $\{A_\gamma x_1\}$ клони относно Σ към елемента $A_0 x_1$. Следователно $A_0 x_1 \in X_1$, а това означава, че x_1 е собствен вектор на оператора A_0. Тъй като x_0 и x_1 бяха избрани по произволен начин в съответните множества, с това е доказано, че $A_0 \in R$.

II

В този раздел ще предполагаме, че ни е дадено едно обобщено банахово пространство $\Xi=(X, \Sigma, N)$ и освен това е дадено едно такова подмножество M на X, че да бъдат изпълнени следните две условия:

1) $0 \bar{\in} M$.

2) Единичната сфера на X относно N съвпада с най-малкото измежду Σ-затворените изпъкнали подмножества на X, които съдържат множеството M и са симетрични спрямо началото.*

Изхождайки от обобщеното банахово пространство Ξ, дефинираме пространството L_Ξ, разгледано в раздел I, и в него въвеждаме нормата N^* и системата от полунорми Σ^*. Сега ние ще изучаваме съвкупността на онези оператори от L_Ξ, за които всеки елемент на M е собствен вектор; тази съвкупност ще означаваме с $R_{\Xi,M}$. Съвкупността $R_{\Xi,M}$ не е празна, защото съдържа например единичния оператор I.

§ **1.** Ако $A \in R_{\Xi,M}$ и $x \in M$, съществува число α, за което е изпълнено равенството

$$Ax=\alpha x.$$

Числото α е определено еднозначно, когато са дадени операторът A и елементът x; ние ще означаваме това число с $A^\wedge(x)$. По този начин на всеки оператор A от $R_{\Xi,M}$ съпоставихме една реална функция $A^\wedge$ с дефиниционна област M, която удовлетворява равенството

$$Ax=A^\wedge(x)x$$

за всяко x от M. От лема I.7 следва

Лема 1. Ако $A \in R_{\Xi,M}$, то за всяко x от M е в сила неравенството

$$|A^\wedge(x)| \leq N^*(A).$$

Множеството M ще разглеждаме като топологично пространство, като го снабдим с топологията, дефинирана посредством системата от полунорми Σ; с $C_\Sigma(M)$ ще означаваме съвкупността на всички ограничени реални функции с дефиниционна област M, които са непрекъснати относно тази топология. Да означим с $R^\wedge_{\Xi,M}$ съвкупността на функциите $A^\wedge$, отговарящи на всевъзможните оператори A от $R_{\Xi,M}$. В такъв случай имаме

Теорема 1. $R^\wedge_{\Xi,M} \subset C_\Sigma(M)$.

Доказателство. Нека $A \in R_{\Xi,M}$. Ще покажем, че $A^\wedge \in C_\Sigma(M)$. От лема 1 следва, че функцията $A^\wedge$ е ограничена. Остава да покажем, че тя е непрекъсната. Нека $\{x_\gamma\}$ е произволна обобщена редица от елементи на M, която клони (относно Σ) към някой елемент x_0 на M. Ще покажем, че редицата $\{A^\wedge(x_\gamma)\}$ клони към числото $A^\wedge(x_0)$. Тъй като редицата $\{A^\wedge(x_\gamma)\}$ е ограничена, за целта е достатъчно да покажем, че тя няма точка на сгъстяване, различна от $A^\wedge(x_0)$. Нека α е точка на сгъстяване на тази редица. От редицата $\{x_\gamma\}$ избираме такава подредица $\{x_{\gamma_\delta}\}$, че редицата $\{A^\wedge(x_{\gamma_\delta})\}$ да клони към α. От равенството

---

* Оттук, разбира се, следва, че M не е празно и за всяко x от M е изпълнено неравенството $N(x) \leq 1$.

$$Ax_{\gamma_\delta}=A^\wedge(x_{\gamma_\delta})\,.\,x_{\gamma_\delta}$$

чрез граничен преход получаваме

$$Ax_0=ax_0$$

(използваме релативната непрекъснатост на A върху M). От последното равенство обаче следва, че

$$a=A^\wedge(x_0).$$

В общия случай съвкупността $R^\wedge_{\Xi,M}$ е различна от съвкупността $C_\Sigma(M)$. Така например, ако два различни вектора x_1 и x_2 от M са колинеарни, веднага се вижда, че за всеки оператор A от $R_{\Xi,M}$ ще имаме $A^\wedge(x_1)=A^\wedge(x_2)$, което показва, че в този случай $R^\wedge_{\Xi,M}\neq C_\Sigma(M)$ (в $C_\Sigma(M)$ сигурно съществува функция, която в точките x_1 и x_2 приема различни стойности благодарение на обстоятелството, че поне една от полунормите, принадлежащи на Σ, приема стойност, различна от 0, за разликата x_2-x_1). Ще посочим два примера, при които $R^\wedge_{\Xi,M}=C_\Sigma(M)$.

Пример 1. Нека $\Xi=(X, \Sigma, N)$ е пространството, дефинирано в пример 2 от § 1 на раздел I, и нека M е множеството на векторите от X, на които една от координатите е равна на 1, а всички останали са равни на 0. Лесно се проверява, че са изпълнени двете условия, които формулирахме в началото на настоящия раздел. Ако

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ldots$$

е произволна ограничена редица от реални числа, да разгледаме оператора

$$y=Ax,$$

дефиниран в X чрез равенствата

$$y^{(i)}=\lambda_i x^{(i)},\quad i=1, 2, 3, \ldots$$

Не е трудно да се види, че $A\in R_{\Xi,M}$. При това, ако означим с e_k онзи вектор от M, на който k-тата координата е различна от 0, за всяко цяло положително k ще имаме равенството

$$A^\wedge(e_k)=\lambda_k\,.$$

Оттук е ясно, че всяка функция от $C_\Sigma(M)$ има вида $A^\wedge$, където A е някой оператор от $R_{\Xi,M}$, и следователно съвкупностите $R^\wedge_{\Xi,M}$ и $C_\Sigma(M)$ съвпадат.

Пример 2. Нека $\Xi=(X, \Sigma, N)$ е пространството, дефинирано в пример 3 от § 1 на раздел I. Ако t е точка от T и $\varphi\in C(T)$, да положим

$$l_t(\varphi)=\varphi(t).$$

Очевидно функционалът l_t принадлежи на X. Ако означим с M множеството на функционалите l_t, където t пробягва T, пак ще бъдат изпълнени условията 1) и 2), формулирани в началото на настоящия раздел. Нека ψ е произволна функция от съвкупността $C_\Sigma(M)$. Ако за всяко $t\in T$ положим

$$\theta(t)=\psi(l_t),$$

функцията θ ще принадлежи на $C(T)$. Да разгледаме оператора

$$y=Ax,$$

дефиниран в X чрез равенството

$$y(\varphi)=x(\theta\varphi),$$

където φ се мени в $C(T)$. Лесно се вижда, че $A \in R_{\Xi,M}$ и

$$A^{\wedge}(l_t)=\psi(l_t)$$

за всяко t от T. Това показва, че $\psi \in R^{\wedge}_{\Xi,M}$. Понеже ψ беше произволна функция от $C_{\Sigma}(M)$, равенството

$$R^{\wedge}_{\Xi,M}=C_{\Sigma}(M)$$

е установено.

Ще формулираме няколко леми, които изразяват, че $R_{\Xi,M}$ е алгебра с единица над полето на реалните числа, а съответствието $A \to A^{\wedge}$ е хомоморфизъм на тази алгебра в алгебрата $C_{\Sigma}(M)$ (действията с елементи на $C_{\Sigma}(M)$ се дефинират по обичайния начин).

Лема 2. Ако $A \in R_{\Xi,M}$ и λ е реално число, то $\lambda A \in R_{\Xi,M}$ и $(\lambda A)^{\wedge}=\lambda A^{\wedge}$.

Лема 3. Ако $A \in R_{\Xi,M}$ и $B \in R_{\Xi,M}$, то $A+B \in R_{\Xi,M}$ и $(A+B)^{\wedge}=A^{\wedge}+B^{\wedge}$.

Лема 4. Ако $A \in R_{\Xi,M}$ и $B \in R_{\Xi,M}$, то $AB \in R_{\Xi,M}$ и $(AB)^{\wedge}=A^{\wedge}B^{\wedge}$.

Лема 5. $I \in R_{\Xi,M}$ и $I^{\wedge}(x)=1$ за всяко x от M.

Доказателствата на тези леми са тривиални (като се вземе пред вид обстоятелството, че L_{Ξ} е алгебра). Да извършим например проверката на твърдението, изказано в лема 4. Нека A и B са оператори от $R_{\Xi,M}$. Операторът AB ще принадлежи на L_{Ξ}. Да вземем произволно x от M. Имаме

$$(AB)x=A(Bx)=A(B^{\wedge}(x)x)=B^{\wedge}(x).Ax=B^{\wedge}(x)A^{\wedge}(x)x=A^{\wedge}(x)B^{\wedge}(x)x.$$

Тъй като тези равенства са верни за всяко x от M, те показват, че всеки елемент на M е собствен вектор на оператора AB и следователно $AB \in R_{\Xi,M}$. Пак от тези равенства се вижда, че за всяко x от M имаме

$$(AB)^{\wedge}(x)=A^{\wedge}(x)B^{\wedge}(x).$$

Разбира се, от обстоятелството, че съвкупността $R^{\vee}_{\Xi,M}$ представлява хомоморфен образ на алгебрата $R_{\Xi,M}$, следва, че $R^{\vee}_{\Xi,M}$ също е алгебра (подалгебра на $C_{\Sigma}(M)$). Оказва се, че съответствието $A \to A^{\wedge}$ представлява даже изоморфизъм между тези две алгебри. За да се убедим в това, да въведем в пространството $C_{\Sigma}(M)$ равномерната норма

$$\|\psi\|=\sup|\psi(x)|: x \in M.$$

Имаме следната лема, която показва, че изображението $A \to A^{\wedge}$ запазва нормата и следователно е обратимо:

Лема 6. Ако $A \in R_{\Xi,M}$, то $\|A^{\wedge}\|=N^{*}(A)$.

Доказателство. От лема 1 следва, че

$$\|A^{\wedge}\| \leqq N^{*}(A).$$

Сега ще докажем неравенство в обратната посока. За всяко x от M имаме

$$N(Ax)=N(A^{\wedge}(x).x)=|A^{\wedge}(x)|.N(x)\leqq\|A^{\wedge}\|.$$

Да означим с S множеството на онези x от X, за които са в сила неравенствата

$$N(x)\leqq 1,\ N(Ax)\leqq\|A^{\wedge}\|.$$

От лема I.3 и от обстоятелството, че $A \in L_{\Xi}$, следва, че множеството S е затворено относно Σ. Заедно с това S е изпъкнало, симетрично е спрямо началото и съдържа M. От предположението 2), което направихме в началото на настоящия раздел, следва, че единичната сфера на X относно N се съдържа в множеството S и следователно за всяко x от тази единична сфера ще бъде изпълнено неравенството

$$N(Ax) \leqq \| A^{\wedge} \|.$$

Но тогава за всяко x от X ще имаме

$$N(Ax) \leqq \| A^{\wedge} \| . N(x),$$

откъдето следва неравенството

$$N^*(A) \leqq \| A^{\wedge} \|.$$

Резултатите, установени в лемите 2, 3, 4, 5 и 6, могат да се обединят в следната

Теорема 2. Съвкупностите $R_{\Xi,M}$ и $R^{\wedge}_{\Xi,M}$ представляват подалгебри съответно на алгебрите L_{Ξ} и $C_{\Sigma}(M)$, като всяка от тези подалгебри съдържа единичния елемент на съответната алгебра. Съответствието $A \to A^{\wedge}$ представлява изоморфизъм между алгебрите $R_{\Xi,M}$ и $R^{\wedge}_{\Xi,M}$, който същевременно е изометрия относно нормата N^* в $R_{\Xi,M}$ и равномерната норма в $R^{\wedge}_{\Xi,M}$.

Забележка. Факта, че съответствието $A \to A^{\wedge}$ е обратимо, ние получихме като следствие от лема 6. Бихме могли да установим този резултат по-просто така. Разглеждаме произволен оператор A от $R_{\Xi,M}$, за който $A^{\wedge}(x)=0$ за всяко x от M. Нека S е множеството на онези x от единичната сфера на X относно N, за които $Ax=0$. Това множество е Σ-затворено, изпъкнало и симетрично спрямо началото. От друга страна, $M \subset S$ и следователно цялата единична сфера на X се съдържа в S. Оттук заключаваме, че равенството $Ax=0$ е изпълнено за всяко x от единичната сфера, а значи и за всяко x от X. Следователно A е нулевият оператор.

От изоморфността на алгебрите $R_{\Xi,M}$ и $R^{\wedge}_{\Xi,M}$ могат да се получат редица следствия. Ще отбележим само едно от тях, а именно това, че операторите от $R_{\Xi,M}$ са два по два комутативни.

Като приложим лема I.12 (при M_0, състоящо се от нулевия елемент на X, и $M_1=M$), получаваме

Лема 7. $R_{\Xi,M}$ е затворена подсъвкупност на L_{Ξ} относно системата от полунорми Σ^*.

Оттук с помощта на теорема I.3 и лема I.5 получаваме

Теорема 3. Наредената тройка $(R_{\Xi,M}, \Sigma^*, N^*)$ представлява обобщено банахово пространство.

Следствие. $R_{\Xi,M}$ е банахово пространство относно нормата N^*.

Като използваме изометричността на съответствието $A \to A^{\wedge}$, оттук получаваме, че $R^{\wedge}_{\Xi,M}$ е банахово пространство относно равномерната норма и следователно имаме

Теорема 4. $R^{\wedge}_{\Xi,M}$ е затворена подсъвкупност на $C_{\Sigma}(M)$ относно равномерната норма.

§ **2.** Сега ще получим някои следствия от установените резултати (по-точно — от теоремите 2 и 4).

Л е м а 8. Нека θ е произволна реална функция, която е дефинирана и непрекъсната в интервала $(-\infty, \infty)$. За всяка функця ψ от $R^\wedge_{\Xi,M}$ функцията φ, която се дефинира в M чрез равенството

$$\varphi(x) = \theta(\psi(x)), \tag{11}$$

също принадлежи на съвкупността $R^\wedge_{\Xi,M}$.

Доказателство. Нека ψ е произволна функция, принадлежаща на $R^\wedge_{\Xi,M}$. С помощта на теоремата на Вайерщрас за апроксимиране на непрекъснати функции с полиноми построяваме редица от полиноми с реални коефициенти $\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t), \ldots$, която клони равномерно към $\theta(t)$ при $t \leq \psi$. При $x \in M$ да положим

$$\varphi_n(x) = \theta_n(\psi(x)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Очевидно редицата от функции

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \cdots$$

клони равномерно върху M към функцията φ, дефинирана чрез равенството (11). Като използваме, че $R^\wedge_{\Xi,M}$ е алгебра, която съдържа константата 1, заключаваме, че за всяко цяло положително n функцията φ_n принадлежи на $R^\wedge_{\Xi,M}$. Оттук и от равномерната затвореност на $R^\wedge_{\Xi,M}$ следва, че функцията φ също принадлежи на $R^\wedge_{\Xi,M}$.

Т е о р е м а 5. Нека R е такава N^*-затворена подсъвкупност на $R_{\Xi,M}$, че произведението* на произволно избран елемент на R с кой да е елемент на $R_{\Xi,M}$ винаги да принадлежи на R. Ако за един оператор A от $R_{\Xi,M}$ операторът A^2 принадлежи на съвкупността R, то и самият оператор A принадлежи на R.

Доказателство. Нека A е оператор от $R_{\Xi,M}$, за който $A^2 \in R$. Да си вземем едно цяло положително число n и да дефинираме една реална функция θ_n в интервала $(-\infty, \infty)$ по следния начин:

$$\theta_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}, & \text{ако} \quad |t| \geqq \dfrac{1}{n}; \\ n^2 t, & \text{ако} \quad |t| < \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Лесно се проверява, че функцията θ_n е непрекъсната навсякъде в интервала $(-\infty, \infty)$. Въз основа на лема 8 можем да твърдим, че съществува оператор B_n, принадлежащ на $R_{\Xi,M}$, за който равенството

$$B_n^\wedge(x) = \theta_n(A^\wedge(x))$$

да бъде в сила за всяко x от M. Полагаме

$$A_n = A^2 B_n.$$

От предположението, което направихме за съвкупността R, следва, че операторът A_n принадлежи на R. За всяко x от M имаме

$$|A_n^\wedge(x) - A^\wedge(x)| = |A^{\wedge 2}(x) B_n^\wedge(x) - A^\wedge(x)| = |A^\wedge(x)|\,|A^\wedge(x)\,\theta_n(A^\wedge(x)) - 1|$$

---

* Редът на множителите не е от значение, понеже алгебрата $R_{\Xi,M}$ е комутативна.

Лесно се проверява обаче, че за всяко реално t е вярно неравенството

$$|t| \cdot |t\,\theta_n(t)-1| < \frac{1}{n}\cdot$$

Оттук заключаваме, че за всяко x от M ще бъде изпълнено неравенството

$$|A_n^\wedge(x)-A^\wedge(x)| < \frac{1}{n}\cdot$$

Следователно ще бъде вярно неравенството

$$\| A_n^\wedge - A^\wedge \| \leqq \frac{1}{n}\cdot$$

Като използваме обстоятелството, че изоморфизмът $C \to C^\wedge$ е изометрия, получаваме

$$N^*(A_n - A) \leqq \frac{1}{n}\cdot \tag{12}$$

Дотук n беше фиксирано цяло положително число. Ако оставим n да се изменя, получаваме една редица от оператори

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

Членовете на тази редица принадлежат на съвкупността R, а от неравенството (12) следва, че редицата клони относно N^* към оператора A, който принадлежи на $R_{\Xi,M}$. Като вземем пред вид, че съвкупността R е N^*-затворена в $R_{\Xi,M}$, заключаваме, че $A \in R$.

Следствие. Нека $x_0 \in X$. Ако за един оператор A от $R_{\Xi,M}$ е изпълнено равенството

$$A^2 x_0 = 0,$$

то ще бъде изпълнено и равенството

$$A x_0 = 0.$$

Доказателство. Достатъчно е да покажем, че ако означим с R съвкупността на онези оператори от $R_{\Xi,M}$, които се анулират в точката x_0, ще бъдат изпълнени предположенията на теорема 5. За целта прилагаме лема I.12 при M_0, състоящо се от точката x_0, и $M_1 = M$. Заключаваме, че съвкупността R е Σ^*-затворена в L_Ξ и толкова повече в $R_{\Xi,M}$. Оттук с помощта на лема I.9 получаваме, че R е N^*-затворена подсъвкупност на $R_{\Xi,M}$. Остава да покажем, че произведението на кой да е елемент A на R с произволно избран елемент B на $R_{\Xi,M}$ принадлежи на съвкупността R. Това обаче се вижда от равенствата

$$(AB)x_0 = (BA)x_0 = B(Ax_0) = B0 = 0.$$

Теорема 6. Ако $A \in R_{\Xi,M}$, то следните три условия са еквивалентни:

а) множеството на стойностите на A съвпада с X;

б) съществува такова число $\varrho > 0$, че за всяко x от M е в сила неравенството $|A^\wedge(x)| \geqq \varrho$;

в) съществува оператор B от $R_{\Xi,M}$, за който е изпълнено равенството $AB = I$.

Доказателство. Тъй като от условието в) очевидно следва условието а), достатъчно ще бъде да докажем, че от а) следва б), а от б) следва в). Да докажем най-напред, че от а) следва б). Нека $A \in R_{\Xi,M}$ и нека множеството на стойностите на A съвпада с X. Най-напред ще покажем, че операторът A е обратим. И наистина нека за един елемент x на X да имаме равенството

$$Ax=0.$$

Избираме такъв елемент y, че да бъде изпълнено равенството

$$Ay=x.$$

В такъв случай ще имаме

$$A^2y=0.$$

С помощта на следствието от теорема 5 оттук получаваме

$$Ay=0,$$

което означава, че

$$x=0.$$

Да разгледаме оператора A^{-1}. Тъй като пространството X е пълно относно нормата N, а операторът A е непрекъснат относно тази норма (лема I.4 и теорема I.1), по една известна теорема ([1], теорема 7) следва, че операторът A^{-1} също ще бъде непрекъснат относно нормата N. Избираме такова положително число λ, че за всеко x от X да бъде в сила неравенството $N(A^{-1}x) \leq \lambda N(x)$. При $x \in M$ имаме

$$Ax=A^{\wedge}(x)x.$$

Като приложим към двете страни на това равенство оператора A^{-1}, получаваме

$$x=A^{\wedge}(x) \, . \, A^{-1}x,$$

откъдето следва, че

$$N(x)=|A^{\wedge}(x)| \, . \, N(A^{-1}x) \leqq |A^{\wedge}(x)| \, . \, \lambda N(x).$$

След съкращаване на $N(x)$ получаваме

$$1 \leqq |A^{\wedge}(x)| \, . \, \lambda.$$

Това показва, че положителното число $1/\lambda$ е една долна граница на функцията $|A^{\wedge}|$. По такъв начин доказахме, че от условието а) следва условието б). Да докажем сега, че от б) следва в). Нека $A \in R_{\Xi,M}$ и нека ϱ е такова положително число, че за всяко x от M да бъде изпълнено неравенството $|A^{\wedge}(x)| \geqq \varrho$. Дефинираме една реална функция θ в интервала $(-\infty, \infty)$ по следния начин:

$$\theta(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{t}, \text{ ако } |t| \geqq \varrho; \\ \dfrac{t}{\varrho^2}, \text{ ако } |t| < \varrho. \end{cases}$$

Функцията θ е непрекъсната навсякъде в интервала $(-\infty, \infty)$. Според лема 8 съществува такъв оператор B от $R_{\Xi,M}$, че за всяко x от M е в сила равенството

$$B^{\wedge}(x) = \theta(A^{\wedge}(x))$$

или все едно равенството

$$B^{\wedge}(x) = \frac{1}{A^{\wedge}(x)}.$$

Това дава

$$(AB)^{\wedge}(x) = A^{\wedge}(x)B^{\wedge}(x) = 1 = I^{\wedge}(x).$$

Тъй като от равенството

$$(AB)^{\wedge} = I^{\wedge}$$

следва равенството

$$AB = I,$$

с това доказателството на теоремата е завършено.

Ако за един оператор A от $R_{\Xi,M}$ е изпълнено условието в) от теорема 6 (или, все едно, кое да е от другите две еквивалентни с него условия), операторът A е обратим, защото поради комутативността на алгебрата $R_{\Xi,M}$ равенството $AB = I$, където A и B принадлежат на $R_{\Xi,M}$, може да се напише и във вида $BA = I$. Обратното твърдение не винаги е вярно: при подходящ избор на Ξ и M може да се случи един оператор A от $R_{\Xi,M}$ да бъде обратим, но условията а), б) и в) от теорема 6 да бъдат нарушени. Така например, ако Ξ и M се дефинират така както в пример 1 след теорема 1, да разгледаме оператора A, съответствуващ по описания в този пример начин на редицата с общ член $\lambda_i = 1/i$. Операторът A принадлежи на $R_{\Xi,M}$ и е обратим, но за него условията а), б) и в) от теорема 6 са нарушени (например условието б) е нарушено поради това, че имаме $A^{\wedge}(e_k) = 1/k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$). Следната теорема посочва един случай, когато за всеки обратим оператор A от съвкупността $R_{\Xi,M}$ са изпълнени трите условия от теорема 6:

Теорема 7. Нека всяка (обикновена) редица от елементи на M притежава ненулева точка на сгъстяване относно Σ. Ако $A \in R_{\Xi,M}$, то изискването операторът A да бъде обратим е еквивалентно със всяко от условията а), б) и в) от теорема 6.

Доказателство. Нека $A \in R_{\Xi,M}$. Вече видяхме, че ако е изпълнено някое от трите условия от теорема 6, операторът A е обратим. Да предположим сега, че A е обратим. Ще покажем, че е изпълнено условието б), откъдето ще следва, че са изпълнени и другите две условия. И наистина, ако допуснем, че б) е нарушено, ще можем да изберем редица

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{13}$$

от елементи на M, за която редицата

$$A^{\wedge}(x_1),\ A^{\wedge}(x_2),\ A^{\wedge}(x_3), \ldots$$

клони към 0. От (13) избираме обобщена подредица $\{x_{n_\gamma}\}$, която клони относно Σ към някой ненулев елемент x_0 на X; очевидно x_0 принадлежи на единичната сфера на X относно N. В равенството

$$Ax_{n_\gamma} = A^\wedge(x_{n_\gamma})x_{n_\gamma}$$

извършваме граничен преход и получаваме

$$Ax_0 = 0,$$

което противоречи на обратимостта на оператора A.

Следствие. Ако всяка (обикновена) редица от елементи на M притежава ненулева точка на сгъстяване относно Σ, то за всеки оператор A от съвкупността $R_{\Xi,M}$ е изпълнена алтернативата на Фредхолм, т. е. налице е точно една от двете възможности:

а) уравнението $Ax=y$ притежава решение относно x при всеки избор на y в X;

б) уравнението $Ax=0$ притежава ненулево решение.

Да наречем един оператор A от $R_{\Xi,M}$ позитивен, ако функцията $A^\wedge$ приема само неотрицателни стойности. Нека $R^+_{\Xi,M}$ е съвкупността на позитивните оператори от $R_{\Xi,M}$. От свойствата на съответствието $A \to A^\wedge$ веднага следва, че съвкупността $R^+_{\Xi,M}$ представлява един изпъкнал конус (т. е. всяка линейна комбинация с неотрицателни коефициенти от елементи на $R^+_{\Xi,M}$ също принадлежи на $R^+_{\Xi,M}$); освен това произведение на два оператора от $R^+_{\Xi,M}$ е винаги елемент на $R^+_{\Xi,M}$. Да отбележим още, че единственият оператор от $R_{\Xi,M}$, който принадлежи на $R^+_{\Xi,M}$ заедно със своя противоположен, е нулевият оператор, както и това, че всеки оператор от $R_{\Xi,M}$ може да се представи като разлика на два оператора от $R^+_{\Xi,M}$. В последното можем да се убедим така: ако $A \in R_{\Xi,M}$ и положим

$$A_1 = \frac{1}{2}(\lambda I + A), \quad A_2 = \frac{1}{2}(\lambda I - A),$$

където λ е реално число, подчинено на условието

$$\lambda \geq N^*(A),$$

то операторите A_1 и A_2 ще принадлежат на съвкупността $R^+_{\Xi,M}$ и ще имаме

$$A_1 - A_2 = A.$$

Оказва се, че съвкупността $R^+_{\Xi,M}$ може да бъде охарактеризирана по следния начин:

Теорема 8. $R^+_{\Xi,M}$ съвпада със съвкупността на операторите от вида A^2, където $A \in R_{\Xi,M}$.

Доказателство. Очевидно за всеки оператор A от $R_{\Xi,M}$ операторът A^2 принадлежи на $R_{\Xi,M}$ и при $x \in M$ имаме

$$(A^2)^\wedge(x) = (A^\wedge)^2(x) = A^\wedge(x))^2 \geqq 0,$$

откъдето следва, че $A^2 \in R^+_{\Xi,M}$. Обратно, нека B е произволен оператор, принадлежащ на $R^+_{\Xi,M}$. Функцията

$$\theta(t)=\sqrt{t}$$

е дефинирана и непрекъсната в интервала $(-\infty, \infty)$. Според лема 8 съществува такъв оператор A от $R_{\Xi,M}$, че за всяко x от M да бъде изпълнено равенството

$$A^\wedge(x)=\theta(B^\wedge(x)).$$

Като вземем пред вид, че всички стойности на функцията $B^\wedge$ са неотрицателни, можем да напишем последното равенство във вида

$$A^\wedge(x)=\sqrt{B^\wedge(x)}.$$

Но тогава за всяко x от M ще имаме равенството

$$(A^\wedge(x))^2=B^\wedge(x)$$

или все едно

$$(A^2)^\wedge(x)=B^\wedge(x).$$

От равенството

$$(A^2)^\wedge=B^\wedge$$

следва равенството

$$A^2=B.$$

С помощта на конуса $R^+_{\Xi,M}$ можем да въведем едно частично нареждане в съвкупността $R_{\Xi,M}$, като за кои да е два елемента A и B на $R_{\Xi,M}$ се условим да пишем $A \geqq B$, ако разликата $A-B$ принадлежи на $R^+_{\Xi,M}$. Очевидно изображението $C \to C^\wedge$ представлява изоморфизъм между $R_{\Xi,M}$ и $R^\wedge_{\Xi,M}$ относно така въведеното частично нареждане на първата съвкупност и естественото частично нареждане във втората. Като използваме това обстоятелство и изометричния характер на изображението $C \to C^\wedge$, виждаме, че за елементите на $R_{\Xi,M}$ нормата N^* може да бъде охарактеризирана по следния начин: ако $A \in R_{\Xi,M}$, то $N^*(A)$ представлява най-малкото от числата λ, за които са изпълнени неравенствата

$$\lambda I \geqq A, \quad \lambda I \geqq -A.$$

Ако приложим лема 8 за функцията

$$\theta(t)=|t|,$$

получаваме

Лема 9. Ако $A \in R_{\Xi,M}$, то съществува такъв оператор B от $R_{\Xi,M}$, че за всяко x от M е вярно равенството

$$B^\wedge(x)=|A^\wedge(x)|.$$

Очевидно операторът B, за който става дума в горната лема, е еднозначно определен, когато е даден операторът A. Ще означаваме оператора B със символа $|A|$. Като използваме свойствата на изображението $C \to C^\wedge$, лесно получаваме

Лема 10. Ако $A \in R_{\Xi,M}$, то операторът $|A|$ представлява точна мажоранта на операторите A и $-A$ при въведеното частично нареждане на съвкупността $R_{\Xi,M}$.

Разбира се, с помощта на лема 10 може да докажем, че всеки два елемента на $R_{\Xi,M}$ имат точна мажоранта и точна миноранта при разглежданото частично нареждане, т. е. вярна е

Теорема 9. Конусът $R_{\Xi,M}$ е миниедрален.

Ще отбележим още следното твърдение, верността на което следва от обстоятелството, че изоморфизмът $C \to C^\wedge$ е изометричен:

Лема 11. Ако $A \in R_{\Xi,M}$, $B \in R_{\Xi,M}$ и $|A| \leq |B|$, то $N^*(A) \leq N^*(B)$.

§ 3. Освен от равномерната норма в пространството $C_\Sigma(M)$ ще имаме нужда и от една система Π от полунорми в това пространство, която сега ще въведем. В пространството X да си изберем едно подмножество U, което е отворено относно Σ, съдържа началото и не покрива M. За произволна функция φ от $C_\Sigma(M)$ да положим

$$q_U(\varphi) = \sup |\varphi(x)|, \quad x \in M - U.$$

Очевидно функцията q_U е една четна полунорма в пространството $C_\Sigma(M)$. С Π ще означаваме съвкупността на всички полунорми q_U, които се получават, когато меним множеството U. Лесно се проверява

Лема 12. Наредената тройка $(C_\Sigma(M), \Pi, Q)$, където Q е равномерната норма в $C_\Sigma(M)$, представлява обобщено банахово пространство.

В § 1 дефинирахме един обратим хомоморфизъм $A \to A^\wedge$ на алгебрата $R_{\Xi,M}$ в алгебрата $C_\Sigma(M)$. Видяхме, че този хомоморфизъм е изометрия относно нормата N^* в $R_{\Xi,M}$ и равномерната норма в $C_\Sigma(M)$. Тъй като във всяка от споменатите две алгебри имаме по една система от полунорми, а именно системите Σ^* и Π, възниква въпросът за непрекъснатостта на изображението $A \to A^\wedge$ и на обратното му изображение относно тези две системи от полунорми.

Теорема 10. Изображението $A \to A^\wedge$ е непрекъснато относно системите от полунорми Σ^* и Π.

Доказателство. Нека $\{A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ е обобщена редица от елементи на $R_{\Xi,M}$, която клони относно Σ^* към някой оператор A_0 от $R_{\Xi,M}$. Ще докажем, че редицата от функции $\{A_\gamma^\wedge\}$ клони относно Π към функцията $A_0^\wedge$. Без ограничение на общността можем да считаме, че A_0 е нулевият оператор, защото в противен случай бихме разгледали редицата $\{A_\gamma - A_0\}$. Щом редицата $\{A_\gamma\}$ клони към нулевия оператор относно Σ^*, за всяка полунорма p от Σ редицата от числа $\{p^*(A_\gamma)\}$ клони към 0. Ще докажем, че за всяка норма q от Π редицата $\{q(A_\gamma^\wedge)\}$ също клони към 0. Нека $q = q_U$, където U е Σ-отворено подмножество на X, съдържа началото и не покрива M. Избираме положително число ε и краен брой полунорми $p_1, p_2, \ldots, p_n$ от Σ по такъв начин, че всеки елемент x на X, който удовлетворява неравенствата

$$(14) \qquad p_i(x) < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

да принадлежи на множеството U. Нека $\gamma \in \Gamma$ и нека x е произволен елемент на $M-U$. Понеже $x \bar{\in} U$, поне едно от неравенствата (14) ще бъде нарушено. Нека това да бъде неравенството, което се получава при $i=i_0$. В такъв случай ще имаме

$$p_{i_0}(A_\gamma x)=p_{i_0}(A_\gamma^\wedge(x)x)=|A_\gamma^\wedge(x)|\,.\,p_{i_0}(x)\geq|A_\gamma^\wedge(x)|\,.\,\varepsilon.$$

Това дава

$$|A_\gamma^\wedge(x)|\leq\frac{1}{\varepsilon}\,p_{i_0}(A_\gamma x)\leq\frac{1}{\varepsilon}\,p_{i_0}^*(A_\gamma)N(x)\leq\frac{1}{\varepsilon}\,p_{i_0}^*(A_\gamma),$$

откъдето следва неравенството

$$|A_\gamma^\wedge(x)|\leq\frac{1}{\varepsilon}\,[p_1^*(A_\gamma)+p_2^*(A_\gamma)+\cdots+p_n^*(A_\gamma)[.$$

Понеже x беше произволен елемент на $M-U$, оттук получаваме, че за всяко γ от Γ е в сила неравенството

$$q_U(A_\gamma^\wedge)\leqq\frac{1}{\varepsilon}\,[p_1^*(A_\gamma)+p_2^*(A_\gamma)+\cdots+p_n^*(A_\gamma)]$$

и следователно редицата $\{q_U(A_\gamma^\wedge)\}$ клони към 0.

Теорема 11. Обратното изображение на изображението $A\to A^\wedge$ е релативно непрекъснато относно системите от полунорми Π и Σ^* върху всяка съвкупност от функции, която се съдържа в съвкупността $R_{\Xi,M}^\wedge$ и е ограничена относно равномерната норма.

Доказателство. Нека $\{A_\gamma,\ \gamma\in\Gamma\}$ е обобщена редица от елементи на $R_{\Xi,M}$, за която редицата от съответните функции $\{A_\gamma^\wedge\}$ е ограничена относно равномерната норма и клони относно Π към функцията $A_0^\wedge$, където $A_0\in R_{\Xi,M}$. Ще покажем, че редицата $\{A_\gamma\}$ клони към оператора A_0 относно Σ^*. От равенството

$$(A_\gamma-A_0)^\wedge=A_\gamma^\wedge-A_0^\wedge$$

следва, че редицата $\{(A_\gamma-A_0)^\wedge\}$ е ограничена относно равномерната норма и клони към константата 0 относно Π, ето защо без ограничение на общността можем да считаме, че A_0 е нулевият оператор. Нека p е произволна полунорма от Σ; ще докажем, че редицата $\{p^*(A_\gamma)\}$ клони към 0. Вземаме си произволно положително число ε. Да означим с α една горна граница на множеството от стойностите на равномерната норма за членовете на редицата $\{A_\gamma^\wedge\}$. В X избираме подмножество U, което е отворено относно Σ, съдържа началото, не покрива M и е такова, че за всяко x от U да бъде изпълнено неравенството

$$\alpha p(x)\leqq\varepsilon.$$

Да означим с β една горна граница на полунормата p в единичната сфера на X относно N. Тъй като редицата $\{A_\gamma^\wedge\}$ клони към константата 0 относно Π, можем да намерим такъв индекс γ_0 от Γ, че при $\gamma\succ\gamma_0$ да бъде в сила неравенството

$$q_U(A_\gamma^\wedge)\beta \leqq \varepsilon.$$

Нека $\gamma \succ \gamma_0$. Вземаме произволно x от множеството M. Ще имаме

$$p(A_\gamma x) = p(A_\gamma^\wedge(x)x) \quad A_\gamma^\wedge(x) \; p(x).$$

Ако $x \in U$, получаваме

$$p(A_\gamma x) \leqq \alpha p(x) \leqq \varepsilon.$$

Ако $x \in M - U$, ще имаме

$$p(A_\gamma x) \leqq q_U(A_\gamma^\wedge)\beta \leqq \varepsilon.$$

Следователно за всяко x от M е изпълнено неравенството

$$p(A_\gamma x) \leq \varepsilon. \tag{15}$$

Да означим с S множеството на всички елементи x от единичната сфера на X относно N, за които е изпълнено горното неравенство. Множеството S е симетрично спрямо началото и изпъкнало; то е Σ-затворено и съдържа M. Следователно S съдържа единичната сфера на X относно N. Значи неравенството (15) ще бъде изпълнено за всяко x от единичната сфера, откъдето следва, че за произволно x от X ще бъде вярно неравенството

$$p(A_\gamma x) \leq \varepsilon N(x).$$

Оттук по дефиницията на полунормата p^* получаваме

$$p^*(A_\gamma) \leqq \varepsilon. \tag{16}$$

И така, за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такъв индекс $\gamma_0 \in \Gamma$, че при $\gamma \succ \gamma_0$ да бъде изпълнено неравенството (16). Това показва, че редицата $\{p^*(A_\gamma)\}$ действително клони към 0. Тъй като p беше произволна полунорма от Σ, с това доказателството е завършено.

З а б е л е ж к а. Твърдението, че обратното изображение на изображението $A \to A^\wedge$ е непрекъснато относно H и Σ^* върху цялата съвкупност $R_{\Xi, M}$, не винаги е вярно и това може да се види от следния пример. Нека пространството Ξ се дефинира така, както в пример 2 от § 1 на раздел I, където обаче редицата от положителни числа $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ е избрана така, че да клони към 0. Нека множеството M се дефинира така, както в пример 1 от § 1 на настоящия раздел, т. е. M е множеството на векторите

$$e_1, \; e_2, \; e_3, \ldots,$$

където с e_k е означен вектор, на който k-тата координата е 1, а всички останали са нули. За всяко цяло положително n да дефинираме оператор $y = A_n x$ в X с помощта на равенствата

$$y^{(i)} = 0 \text{ при } i \neq n,$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{\varkappa_n} x^{(n)}.$$

От казаното при разглеждането на пример 1 от § 1 на настоящия раздел е ясно, че $A_n \in R_{\Xi,M}$ и функцията $A_n^\wedge$ се анулира за всички точки от множеството M с изключение на точката e_n, в която приема стойност $1/\varkappa_n$. Нека U е подмножество на X, което е отворено относно Σ, съдържа началото и не покрива M. Тъй като редицата $e_1, e_2, e_3,$ клони към 0 относно Σ (това се вижда от равенството $p(e_n)=\varkappa_n$), можем да намерим такова число ν, че при $n>\nu$ елементът e_n да принадлежи на U. В такъв случай при $n>\nu$ ще имаме $A_n^\wedge(x)=0$ за всяко x от множеството $M-U$ и следователно ще имаме $q_U(A_n^\wedge)=0$. Това показва, че редицата

$$A_1^\wedge, A_2^\wedge, A_3^\wedge, \ldots$$

клони към константата 0 относно системата Π. От друга страна, за всяко цяло положително n имаме

$$p(A_n e_n)=1,\ p(A_n e_n)\leq p^*(A_n)N(e_n),\ N(e_n)=1,$$

което показва, че

$$p^*(A_n)\geqq 1$$

и следователно редицата

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

не клони към нулевия оператор относно Σ^*.

Ако R е подсъвкупност на $R_{\Xi,M}$, да се условим да означаваме с $R^\wedge$ съвкупността на функциите от вида $A^\wedge$, където $A \in R$. Ако съвкупността R е Σ^*-затворена в $R_{\Xi,M}$ (или, все едно, в L_Ξ, тъй като $R_{\Xi,M}$ е затворена в L_Ξ), това в общия случай не е достатъчно, за да можем да твърдим, че съвкупността $R^\wedge$ е Π-затворена в $R^\wedge_{\Xi,M}$. Така например, ако Ξ и M са същите, както в горната забележка, а R е съвкупността на онези оператори A от $R_{\Xi,M}$ за които е в сила неравенството $p^*(A)$ 1, то R очевидно е Σ^*-затворена подсъвкупност на $R_{\Xi,M}$; съвкупността $R^\wedge$ обаче не е Π-затворена в $R^\wedge_{\Xi,M}$, тъй като функциите $A_n^\wedge$, $n=1, 2, 3, \ldots$, разгледани в горната забележка, принадлежат на $R^\wedge$, докато константата 0 не принадлежи на тази съвкупност. В специалния случай обаче, когато R е подалгебра на $R_{\Xi,M}$, от Σ-затвореността на R в $R_{\Xi,M}$ следва Π-затвореността на $R^\wedge$ не само в $R^\wedge_{\Xi,M}$, а даже и в $C^\wedge_\Sigma(M)$ (вж. теорема 12). В частност съвкупността $R^\wedge_{\Xi,M}$ е Π-затворена в $C_\Sigma(M)$ (това твърдение очевидно представлява усилване на теорема 4).

За доказателството на теорема 12 ще имаме нужда от две леми. Втората от тях (лема 14) представлява частично обобщение на лема 8; в специалния случай от теорема 12, когато $R=R_{\Xi,M}$, вместо лема 14 може да бъде използвана лема 8.

Лема 13. Нека R е Σ^*-затворена подсъвкупност на $R_{\Xi,M}$. Ако една обобщена редица от функции, принадлежащи на $R^\wedge$, е ограничена относно равномерната норма и клони относно системата от полунорми Π към някоя функция φ_0 от $C_\Sigma(M)$, то функцията φ_0 също принадлежи на R.

Доказателство. Нека обобщената редица $\{A_\gamma^\wedge, \gamma \in \Gamma\}$, където $A_\gamma \in R$ за всяко $\gamma \in \Gamma$, е ограничена относно равномерната норма и клони относно системата от полунорми Π към една функция ψ_0 от $C_{\Sigma}(M)$. От обстоятелството, че изображението $A \to A^{\wedge}$ запазва нормата, следва, че редицата от оператори $\{A_\gamma\}$ е ограничена относно нормата N^*. Ще покажем, че тази редица е фундаментална относно системата Σ^*. Преди всичко ясно е, че редицата от функции $\{A_\gamma^{\wedge}\}$ е фундаментална относно системата Π. Съвкупността от разликите $A_{\gamma'}^{\wedge} - A_{\gamma''}^{\wedge}$, където $\gamma' \in \Gamma$ и $\gamma'' \in \Gamma$, е ограничена относно равномерната норма и се съдържа в $R_{\Xi,M}^{\wedge}$ поради равенството

$$A_{\gamma'}^{\wedge} - A_{\gamma''}^{\wedge} = (A_{\gamma'} - A_{\gamma''})^{\wedge}.$$

От теорема 11 следва, че обратното изображение на изображението $A \to A^{\wedge}$ ще бъде релативно непрекъснато относно Π и Σ^* върху споменатата съвкупност от разлики. Нека $p \in \Sigma$ и нека $\varepsilon > 0$. Въз основа на казаното можем да изберем такава Π-околност W на нулата* в $R_{\Xi,M}^{\wedge}$, че всеки път, когато функцията $A_{\gamma'}^{\wedge} - A_{\gamma''}^{\wedge}$ принадлежи на $W (\gamma' \in \Gamma, \gamma'' \in \Gamma)$, да бъде изпълнено неравенството

$$p^*(A_{\gamma'} - A_{\gamma''}) < \varepsilon. \tag{17}$$

Избираме $\gamma_0 \in \Gamma$ по такъв начин, че при $\gamma' \succ \gamma_0$ и $\gamma'' \succ \gamma_0$ разликата $A_{\gamma'}^{\wedge} - A_{\gamma''}^{\wedge}$ да принадлежи на W. В такъв случай при $\gamma' \succ \gamma_0$ и $\gamma'' \succ \gamma_0$ ще бъде изпълнено неравенството (17). С това фундаменталността на редицата $\{A_\gamma\}$ относно Σ^* е доказана. Оттук и от ограничеността на тази редица относно N^* с помощта на теорема 3 и лема I.2 заключаваме, че редицата $\{A_\gamma\}$ клони относно Σ^* към някой оператор A_0, принадлежащ на $R_{\Xi,M}$. Като приложим теорема 10, получаваме, че редицата $\{A_\gamma^{\wedge}\}$ клони относно Π към функцията $A_0^{\wedge}$. Но $\{A_\gamma^{\wedge}\}$ клони същевременно и към функцията ψ_0. Следователно ψ_0 съвпада с $A_0^{\wedge}$. Операторът A_0 принадлежи на съвкупността R поради Σ^*-затвореността на последната в $R_{\Xi,M}$; това показва, че $\psi_0 \in R^{\wedge}$, което трябваше да се докаже.

Лема 14. Нека R е N^*-затворена подалгебра на $R_{\Xi,M}$ (съдържаща или несъдържаща оператора I) и нека θ е произволна реална функция, която е дефинирана и непрекъсната в интервала $(-\infty, \infty)$ и удовлетворява условието $\theta(0) = 0$. За всяка функция ψ от $R^{\wedge}$ функцията φ, която се дефинира в M чрез равенството

$$\varphi(x) = \theta(\psi(x)), \tag{18}$$

също принадлежи на съвкупността $R^{\wedge}$.

Доказателство. Очевидно съвкупността $R^{\wedge}$ представлява подалгебра на алгебрата $R_{\Xi,M}^{\wedge}$. От обстоятелството, че изоморфизмът $A \to A^{\wedge}$ запазва нормата, следва, че $R^{\wedge}$ е равномерно затворена в $R_{\Xi,M}^{\wedge}$. Оттук и от теорема 4 следва, че $R^{\wedge}$ е затворена относно равномерната норма и в съвкупността $C_{\Sigma}(M)$. Вземаме произволна функция ψ, принадлежаща на $R^{\wedge}$. Построяваме редица от полиноми с реални коефициенти

$$\theta_1(t),\ \theta_2(t),\ \theta_3(t), \ldots$$

---

* Константата 0 очевидно принадлежи на разглежданата съвкупност от разлики.

по такъв начин, че редицата да клони равномерно към $\theta(t)$ при $|t| \leq |\psi$ и освен това за всяко цяло положително n да бъде изпълнено условието $\theta_n(0)=0$. При $x \in M$ полагаме

$$\varphi_n(x)=\theta_n(\psi(x)), \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Редицата

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

клони равномерно върху M към функцията φ, дефинирана чрез равенството (18). Обаче членовете на тази редица принадлежат на съвкупността $R^\wedge$. Оттук, като използваме равномерната затвореност на $R^\wedge$ в $C_\Sigma(M)$, заключаваме, че функцията φ също принадлежи на $R^\wedge$.

Сега сме готови да докажем

Теорема 12. Ако R е Σ^*-затворена подалгебра на $R_{\Xi,M}$, то съвкупността $R^\wedge$ е Π-затворена в $C_\Sigma(M)$.

Доказателство. Нека R е Σ^*-затворена подалгебра на $R_{\Xi,M}$ и $\{\psi_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ е произволна обобщена редица от елементи на $R^\wedge$, която клони относно Π към някоя функция ψ_0 от $C_\Sigma(M)$. Ще докажем, че $\psi_0 \in R^\wedge$. За целта да положим $\lambda = \|\psi_0\|$ и да означим с θ реалната функция, която се дефинира в интервала $(-\infty, \infty)$ с помощта на равенството

$$\theta(t)=\frac{1}{2}(|\lambda+t|-|\lambda-t|).$$

Тази функция е непрекъсната и удовлетворява условието $\theta(0)=0$. За всяко γ от Γ въвеждаме функция φ_γ, дефинирана в M с помощта на равенството

$$\varphi_\gamma(x)=\theta(\psi_\gamma(x)).$$

Тъй като съвкупността R е N^*-затворена в $R_{\Xi,M}$ (това следва от Σ^*-затвореността на R с помощта на лема I.9), можем да приложим лема 14 и да заключим, че $\varphi_\gamma \in R^\wedge$ за всяко γ от Γ. Очевидно за всяко γ от Γ и за всяко x от M имаме

$$\varphi_\gamma(x)=\begin{cases}\psi_\gamma(x), & \text{ако } |\psi_\gamma(x)| \leq \lambda;\\ \lambda, & \text{ако } \psi_\gamma(x)>\lambda;\\ -\lambda, & \text{ако } \psi_\gamma(x)<-\lambda.\end{cases}$$

Оттук е ясно, че за всяко γ от Γ и за всяко x от M е в сила неравенството

$$|\varphi_\gamma(x)| \leq \lambda.$$

Следователно редицата $\{\varphi_\gamma\}$ е ограничена относно равномерната норма. Като използваме, че за всяко x от M имаме

$$|\psi_0(x)| \leq \lambda,$$

лесно проверяваме, че за всяко γ от Γ и за всяко x от M ще имаме

$$|\varphi_\gamma(x)-\psi_0(x)| \leq |\psi_\gamma(x)-\psi_0(x)|.$$

Оттук следва, че за всяка полунорма q от Π и за всяко γ от Γ ще бъде в сила неравенството

$$q(\varphi_\gamma-\psi_0) \leq q(\psi_\gamma-\psi_0).$$

Това ни дава право да заключим, че редицата $\{\varphi_\gamma\}$ клони към ψ_0 относно Π. От лема 13 следва, че $\psi_0 \in R^\lambda$. Теоремата е доказана.

§ 4. В този параграф ще докажем някои теореми, отнасящи се до случая, когато множеството $M \bigcup \{0\}$ е компактно относно Σ. Последното условие е изпълнено например, ако множеството M е компактно относно Σ; такъв ще бъде случаят с пример 2 от § 1 на настоящия раздел при предположение, че топологичното пространство T е компактно. Ако се спрем на пример 1 от § 1 на настоящия раздел, като редицата от положителни числа $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3,$ изберем така, че да клони към 0, то множеството M няма да бъде компактно относно Σ, защото редицата $e_1, e_2, e_3,$. ще клони към 0 относно Σ; множеството $M \bigcup \{0\}$ обаче ще бъде Σ-компактно.

Ако Φ е една съвкупност от функции с обща дефиниционна област, за две точки x_1 и x_2 от последната да се условим да казваме, че са неотделими посредством Φ, ако за всяка функция φ от Φ имаме равенството $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$ (ако това равенство е нарушено за някоя функция φ от Φ, ще казваме, че x_1 и x_2 са отделими посредством Φ). При доказателството на основната теорема от настоящия параграф ще използваме теоремата на Стоун — Вайерщрас [6], която в случая ще бъде удобно да формулираме по следния начин:

Нека T е компактно топологично пространство и нека Φ е алгебра от непрекъснати реални функции с дефиниционна област T Ако една реална функция е дефинирана и непрекъсната в T, приема равни стойности във всеки две точки от T, които са неотделими посредством Φ, и се анулира във всяка точка от T, в която се анулират всички функции от Φ, то тази функция може да се апроксимира равномерно с функции, принадлежащи на Φ.

Основната теорема от настоящия параграф е следната:

Теорема 13. Нека множеството $M \bigcup \{0\}$ е компактно относно Σ и нека R е Σ^*-затворена подалгебра на $R_{\Sigma,M}$. Ако една функция от съвкупността $C_\Sigma(M)$ приема равни стойности във всеки две точки от M, които са неотделими посредством съвкупността R^λ, и се анулира във всяка точка от M, в която се анулират всички функции от R^λ, то тази функция принадлежи на R^λ.

Доказателство. От теорема 12 следва, че R^λ е една Π-затворена подалгебра на $C_\Sigma(M)$. Нека ψ е функция, която принадлежи на $C_\Sigma(M)$, и нека ψ приема равни стойности във всеки две точки от M, които са неотделими просредством R^λ, и се анулира във всяка точка от M, в която се анулират всички функции от R^λ. От теоремата на Стоун — Вайерщрас следва, че върху всяко Σ-компактно подмножество на M функцията ψ може да се апроксимира равномерно с функции, принадлежащи на R^λ. В пространството X да си вземем едно Σ-отворено множество U, което съдържа началото и не покрива M. Очевидно множеството $M-U$ ще бъде компактно относно Σ. Ако $\varepsilon>0$, да означим с $\varphi_{U,\varepsilon}$ една такава функция от R^λ, че неравенството

$$(19) \qquad |\varphi_{U,\varepsilon}(x)-\psi(x)| \leq \varepsilon$$

да бъде изпълнено за всяко x от $M-U$. В множеството Γ на чифтовете (U, ε) въвеждаме частично нареждане, като считаме, че (U_2, ε_2) следва (U_1, ε_1), ако $U_2 \subset U_1$ и $\varepsilon_2<\varepsilon_1$. По такъв начин получаваме една обобщена редица от функции $\{\varphi_{U,\varepsilon}\}$. Ще покажем, че тази редица клони към функцията ψ относно системата от полунорми Π; оттук и от Π затвореността на $R^{\wedge}$ в $C_{\Sigma}(M)$ ще следва, че $\psi \in R^{\wedge}$. Нека q_0 е произволна полунорма на Π и нека ε_0 е произволно положително число. Полунормата q_0 има вида q_{U_0}, където U_0 е Σ-отворено подмножество на X, U_0 съдържа началото и не покрива M. Разглеждаме произволен чифт (U, ε) от Γ, който следва чифта (U_0, ε_0). От обстоятелството, че $U \subset U_0$, следва, че $M-U_0 \subset M-U$ и следователно за всяко x от $M-U_0$ ще бъде изпълнено неравенството (19). Оттук следва неравенството

$$q_0(\varphi_{U,\varepsilon}-\psi) \leqq \varepsilon.$$

Обаче числото ε е по-малко от числото ε_0. Следователно ще имаме

$$q_0(\varphi_{U,\varepsilon}-\psi) < \varepsilon_0.$$

С това доказателството е завършено.

Следствие 1. Нека множеството $M \cup \{0\}$ е компактно относно Σ и нека R е Σ^*-затворена подалгебра на $R_{\Xi,M}$, която съдържа оператора I. Ако една функция от съвкупността $C_{\Sigma}(M)$ приема равни стойности във всеки две точки от M, които са неотделими посредством съвкупността $R^{\wedge}$, то тази функция принадлежи на $R^{\wedge}$.

Доказателство. При направените предположения съвкупността $R^{\wedge}$ съдържа константата 1 и следователно множеството на точките от M, в които се анулират всички функции от $R^{\wedge}$, е празно.

Следствие 2. Нека множеството $M \cup \{0\}$ е компактно относно Σ. Ако една функция от съвкупността $C_{\Sigma}(M)$ приема равни стойности във всеки две точки от M, които са неотделими посредством съвкупността $R^{\wedge}_{\Xi,M}$, то тази функция принадлежи на $R^{\wedge}_{\Xi,M}$.

Доказателство. Прилагаме следствие 1 при $R=R_{\Xi,M}$.

Следствие 3. Нека множеството $M \cup \{0\}$ е компактно относно Σ. Ако всеки две различни точки от M са отделими посредством $R^{\wedge}_{\Xi,M}$ то

$$R^{\wedge}_{\Xi,M} = C_{\Sigma}(M).$$

Доказателство. Използуваме следствие 2.

Следствие 4. Нека множеството $M \cup \{0\}$ е компактно относно Σ и нека R е Σ^*-затворена подалгебра на $R_{\Xi,M}$, която не съдържа оператора I. В такъв случай съществува поне една точка от M, в която се анулират всички оператори от R.

Доказателство. Един оператор A от $R_{\Xi,M}$ се анулира в дадена точка от M точно тогава, когато функцията $A^{\wedge}$ се анулира в тази точка. Ако допуснем, че не съществува точка от M, в която се анулират всички оператори от R, то няма да съществува точка от M, в която се анулират всички функции от $R^{\wedge}$. Но тогава според теорема 13 константата 1 ще принадлежи на $R^{\wedge}$, а това противоречи на предположението, че $I \overline{\in} R$.

С помощта на следствие 4 от теорема 13 получаваме

Теорема 14. Нека множеството $M \cup \{0\}$ е компактно относно Σ. Ако един оператор от съвкупността $R_{\Xi,M}$ се анулира в някоя точка от X, различна от началото, той се анулира в поне една точка от M.

Доказателство. Нека $A \in R_{\Xi,M}$, $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, $Ax_0=0$. Означаваме с R съвкупността на всички оператори от $R_{\Xi,M}$, които се анулират в точката x_0. Очевидно R е подалгебра на $R_{\Xi,M}$; според лема I.12 R е Σ^*-затворена. Операторът I не принадлежи на R, понеже $x_0 \neq 0$. Следователно съществува точка от M, в която се анулират всички оператори от R и в частност операторът A.

Следствие. Ако множеството $M \cup \{0\}$ е компактно относно Σ, то за да бъде един оператор A от $R_{\Xi,M}$ обратим, необходимо и достатъчно е A да не се анулира в никоя точка от M (или, все едно, функцията $A^\wedge$ да не се анулира в никоя точка от M).

В случая, когато $M \cup \{0\}$ е Σ-компактно, Σ^*-затворените подалгебри на $R_{\Xi,M}$ могат да се охарактеризират по един прост начин.

Теорема 15. Нека множеството $M \cup \{0\}$ е компактно относно Σ и нека R е Σ^*-затворена подалгебра на $R_{\Xi,M}$. Съществуват подмножества M_0 и M_1 на X такива, че

а) $M \subset M_1$ и $0 \notin M_1$;

б) R съвпада със съвкупността на онези оператори от L_Ξ, които приемат стойност 0 във всяка точка от M_0 и за които всеки елемент на M_1 е собствен вектор.

При това множествата M_0 и M_1 могат да бъдат избрани така, че да бъдат изпълнени и следните допълнителни условия:

в) $M_0 \subset M$;

г) всеки елемент на M_1 може да се представи във вида $\frac{1}{2}(y+z)$, където y и z са елементи на множеството $M \cup \{0\}$;

д) множествата $M_0 \cup \{0\}$ и $M_1 \cup \{0\}$ са компактни относно Σ.

Доказателство. С M_0 нека означим множеството* на онези точки от M, в които се анулират всички оператори от R. За да дефинираме множеството M_1, да означим с G множеството* на всички елементи от вида $\frac{1}{2}(y+z)$, където y и z са елементи на M, отделими посредством $R^\wedge_{\Xi,M}$, но неотделими посредством $R^\wedge$; с M_1 ще означим множеството на ненулевите елементи от Σ-затворената обвивка на сумата $M \cup G$. Тъй като елементът 0 не принадлежи нито на M, нито на G, имаме включването $M \cup G \subset M_1$. Условията а) и в) очевидно са изпълнени. Нека M' е множеството на елементите от вида $\frac{1}{2}(y+z)$, където $y \in M \cup \{0\}$, $z \in M \cup \{0\}$ и y и z са неотделими посредством $R^\wedge$ в случай, че $y \neq 0$ и $z \neq 0$. Очевидно $M \cup G \subset M'$. Ще покажем, че множеството M' е компактно относно Σ. И наистина, нека $\{x_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ е произволна обобщена редица от елементи на M'. За всяко γ от Γ намираме елементи y_γ и z_γ от $M \cup \{0\}$ такива, че да бъде изпълнено равенството

$$x_\gamma = \frac{1}{2}(y_\gamma + z_\gamma)$$

и освен това y_γ и z_γ да бъдат неотделими посредством $R^\wedge$ в случай, че $y_\gamma \neq 0$ и $z_\gamma \neq 0$. Поради Σ-компактността на множеството $M \cup \{0\}$ от редицата $\{x_\gamma\}$ можем да изберем такава подредица $\{x_{\gamma_\delta}, \delta \in \Delta\}$, че редиците $\{y_{\gamma_\delta}\}$ и $\{z_{\gamma_\delta}\}$ да клонят относно Σ съответно към някакви елементи y_0 и

* Това множество може да бъде и празно.

z_0 от $M \bigcup \{0\}$. Очевидно подредицата $\{x_{\gamma_\delta}\}$ ще клони относно Σ към елемента $x_0 = \frac{1}{2}(y_0 + z_0)$. Ако поне един от елементите y_0 и z_0 е равен на 0, $x_0 \in M'$. Нека $y_0 \neq 0$ и $z_0 \neq 0$. Тогава съществува такъв индекс δ_0 от Δ, че за всяко δ, което следва δ_0, да бъдат изпълнени неравенствата $y_{\gamma_\delta} \neq 0$ и $z_{\gamma_\delta} \neq 0$. Вземаме произволна функция φ от съвкупността $R^\wedge$. Когато δ следва δ_0, имаме равенството

$$\varphi(y_{\gamma_\delta}) = \varphi(z_{\gamma_\delta}).$$

Като използваме непрекъснатостта на функцията φ в точките y_0 и z_0, оттук получаваме

$$\varphi(y_0) = \varphi(z_0).$$

Следователно y_0 и z_0 са неотделими посредством $R^\wedge$ и значи $x_0 \in M'$. По този начин показахме, че от всяка обобщена редица от елементи на M' може да се избере подредица, която клони относно Σ към някой елемент на M'. С това Σ-компактността на M' е установена. От последната следва, че Σ-затворената обвивка на $M \bigcup G$ се съдържа в M' и е Σ-компактна. Следователно $M_1 \subset M'$ и значи условието г) е изпълнено. Верността на твърдението д) също се проверява лесно. Действително от обстоятелството, че операторите от R са релативно Σ-непрекъснати върху M, следва, че множеството M_0 е Σ-затворено в M. Оттук заключаваме, че множеството $M_0 \bigcup \{0\}$ е Σ-затворено в $M \bigcup \{0\}$ и следователно $M_0 \bigcup \{0\}$ е компактно относно Σ. От друга страна, множеството $M_1 \bigcup \{0\}$ съвпада с множеството, което се получава, когато към Σ-затворената обвивка на $M \bigcup G$ прибавим* елемента 0; следователно $M_1 \bigcup \{0\}$ също е компактно относно Σ. Остана да проверим верността на твърдението б). Да означим с R' съвкупността на онези оператори от L_Ξ, които приемат стойност 0 във всяка точка от M_0 и за които всеки елемент на M_1 е собствен вектор. Вземаме произволен оператор A от R. От дефиницията на множеството M_0 следва, че операторът A се анулира във всички точки на M_0. Да вземем произволен елемент x на M_1; ще покажем, че x е собствен вектор на A. По-горе показахме, че $M_1 \subset M'$; следователно $x \in M'$. Представяме x във вида

$$x = \frac{1}{2}(y + z),$$

където $y \in M \bigcup \{0\}$, $z \in M \bigcup \{0\}$ и y и z са неотделими посредством $R^\wedge$ в случай, че $y \neq 0$ и $z \neq 0$. Ако $y \neq 0$ и $z \neq 0$, ще имаме

$$Ax = \frac{1}{2}(Ay + Az) = \frac{1}{2}[A^\wedge(y)y + A^\wedge(z)z] = A^\wedge(y) \cdot \frac{1}{2}(y + z) = A^\wedge(y)x.$$

Ако единият от елементите y и z е равен на 0, другият непременно принадлежи на M, защото в противен случай бихме получили, че $x = 0$, което не е вярно. При това положение обаче верността на твърдението, че x е собствен вектор на A, следва от обстоятелството, че x е колинеарен с елемент на M. От доказаното се вижда, че $A \in R'$. Но A беше произволен оператор от R, следователно $R \subset R'$. Нека сега A е произволен

* Разбира се, не е изключено елементът 0 по начало да принадлежи на Σ-затворената обвивка на $M \bigcup G$.

оператор от R'. От обстоятелството, че $M \subset M_1$, следва, че $A \in R_{\Xi,M}$. Да разгледаме функцията $A^\wedge$. Тя принадлежи на $C_\Sigma(M)$. Нека y и z са точки от M, които са неотделими посредством $R^\wedge$; ще покажем, че $A^\wedge(y) = A^\wedge(z)$. Ако y и z са неотделими посредством $R^\wedge_{\Xi,M}$, това е очевидно. Ако пък y и z са отделими посредством $R^\wedge_{\Xi,M}$, елементът $\frac{1}{2}(y+z)$ принадлежи на G и значи принадлежи на M_1. Следователно съществува такова число α, че

$$A\left(\frac{1}{2}(y+z)\right) = \alpha \cdot \frac{1}{2}(y+z).$$

Това дава

$$A^\wedge(y)y + A^\wedge(z)z = \alpha y + \alpha z.$$

Тъй като y и z са линейно независими (това следва от тяхната отделимост посредством $R_{\Xi,M}$), оттук получаваме

$$A^\wedge(y) = \alpha, \quad A^\wedge(z) = \alpha,$$

откъдето следва равенството

$$A^\wedge(y) = A^\wedge(z).$$

И така функцията $A^\wedge$ приема равни стойности във всеки две точки от M, които са неотделими посредством $R^\wedge$. Ако си вземем точка x_0 от M, в която се анулират всички функции от $R^\wedge$, в тази точка ще се анулират всички оператори от R и следователно x_0 ще принадлежи на M_0. Но тогава ще имаме $Ax_0 = 0$, което дава $A^\wedge(x_0) = 0$. Следователно функцията $A^\wedge$ се анулира във всяка точка от M, в която се анулират всички функции от $R^\wedge$. От теорема 13 следва, че $A^\wedge \in R^\wedge$, а оттук пък заключаваме, че $A \in R$. Понеже A беше произволен оператор от R', с това е доказано, че $R' \subset R$. Преди това доказахме включване в обратната посока; следователно $R = R'$ и значи твърдението б) е вярно.

Следствие. Нека множеството $M \cup \{0\}$ е Σ-компактно, нека R е Σ^* затворена подалгебра на $R_{\Xi,M}$ и нека $A \in L_\Xi$. Ако операторът A се анулира за всеки елемент на X, за който се анулират всички оператори от R, и ако всеки общ собствен вектор на операторите от R е собствен вектор на A, то $A \in R$.

Забележка. Доказателството на теорема 15 би се опростило отчасти, ако с M_1 бихме означили множеството на ненулевите елементи от вида $\frac{1}{2}(y+z)$, където $y \in M \cup \{0\}$, $z \in M \cup \{0\}$ и y и z са неотделими посредством $R^\wedge$ в случай, че $y \neq 0$ и $z \neq 0$. Ние обаче означихме с M_1 друго множество с цел множество M_1 да се получи по възможност по-малко. Различието между двата начина на дефиниране на множеството M_1 се вижда ясно в случая, когато всеки два различни елемента на M са отделими посредством $R^\wedge$.

Теорема 15 действително характеризира Σ^*-затворените подалгебри на $R_{\Xi,M}$ (при предположение, че $M \cup \{0\}$ е Σ-компактно), защото, ако $M_0 \subset X$, $M_1 \subset X$ и M_0, M_1 и R удовлетворяват условията а) и б) от теорема 15, не е трудно да се види, че R е подалгебра на $R_{\Xi,M}$, а от лема I.12 следва, че съвкупността R е Σ^*-затворена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Banach, S. Sur les fonctionnelles linéaires, II. Studia Math., **1** (1929), 223—239.
2. Banach, S. Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.
3. Скордев, Д. Върху ограничените линейни оператори в линейните пространства с частично нареждане. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **54** (1959/60), кн. 1, 151—166.
4. Скордев, Д. О некоторых полуупорядоченных пространствах. ДАН СССР, **138** (1961), 553—555.
5. Скордев, Д. Върху някои пръстени от линейни оператори (Дисертация). Софийски университет, 1963.
6. Stone, M. H. The generalized Weierstrass approximation theorem. Math. Mag., **21** (1948), 167—184, 237—254.
7. Тагамлицки, Я. Изследвания върху Абелевия интерполационен ред. Год. на Соф унив., Природо-мат. фак., **46** (1949/50), кн. 1, 385—443.
8. Тагамлицки, Я. Върху геометрията на конусите в Хилбертовите пространства. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **47** (1950/51, 1951/52), кн. 1, ч. II, 85—107.
9. Тагамлицки, Я. Допълване на конуси и приложение към проблемата за обобщение на понятието функция (III). Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., **50** (1955/56), кн. 1, ч. I, 135—163.

Постъпила на 1. XII. 1967 г.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ДОСТАТОЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ НАПЕРЕД ЗАДАННЫХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Димитр Скордев

Резюме

Пусть X — вещественное линейное пространство и пусть в X дана некоторая норма N, а также и некоторая система Σ из полунорм, которые не обращаются одновременно в нуль ни для какого ненулевого элемента X. Будем предполагать, что единичный шар S пространства X, соответствующий норме N, ограничен и полон относительно Σ. Обозначим через Ξ тройку (X, Σ, N), а через L_Ξ — совокупность всех линейных отображений пространства X в себя, сужения которых на множестве S непрерывны относительно Σ. Доказываем, что все операторы из L_Ξ непрерывны относительно нормы N, что дает возможность рассматривать L_Ξ как нормированное пространство.

Пусть дано некоторое множество M из элементов X, которое удовлетворяет следующим условиям:

а) $0 \notin M$;

б) Σ-замкнутая уравновешенная выпуклая оболочка множества M совпадает с S.

Через $R_{\Xi,M}$ обозначаем совокупность тех операторов из L_Ξ, для которых каждый элемент M является собственным вектором. Оказывается, что совокупность $R_{\Xi,M}$ — алгебра (обладающая единичным элементом). Каждому оператору A из $R_{\Xi,M}$ ставим в соответствие вещественную функцию $A^\wedge(x)$, определенную для каждого x из M при помощи равенства

$$Ax = A^\wedge(x)x.$$

Пусть $R^\wedge_{\Xi,M}$ — совокупность всех функций вида $A^\wedge$, где $A \in R_{\Xi,M}$. Показываем, че $R^\wedge_{\Xi,M}$ является подалгеброй алгебры $C_\Sigma(M)$, состоящей из всех ограниченных Σ-непрерывных вещественных функций, определенных на множестве M, а отображение $A \to A^\wedge$ представляет собой изометрический изоморфизм между $R_{\Xi,M}$ и $R^\wedge_{\Xi,M}$. Изучаем и другие свойства отображения $A \to A^\wedge$, а также и совокупности $R^\wedge_{\Xi,M}$ и некоторых ее подсовокупностей. Так например $R^\wedge_{\Xi,M}$ оказывается замкнутой подсовокупностью $C_\Sigma(M)$ относительно сходимости, равномерной на любом множестве вида $M - U$, где U — Σ-окрестность нуля в X. Если множество $M \cup \{0\}$ компактно относительно Σ, это свойство совокупности $R^\wedge_{\Xi,M}$ дает возможность применить теорему Стоуна — Вейерштрасса. Получаются и некоторые результаты о совокупности $R_{\Xi,M}$, которые формулируются без упоминания отображения $A \to A^\wedge$ и совокупности $R^\wedge_{\Xi,M}$. Устанавливаем например (при первоначальных предположениях о множестве M), что если область значений некоторого оператора из $R_{\Xi,M}$ совпадает со всем пространством X, то этот оператор имеет обратный, который также принадлежит $R_{\Xi,M}$. Если каждая последовательность элементов M имеет ненулевую точку сгущения относительно Σ, то для операторов из $R_{\Xi,M}$ имеет место альтернатива Фредгольма.

LINEAR OPERATORS WITH SUFFICIENTLY MANY A PRIORI GIVEN EIGENVECTORS

Dimiter Skordev

Summary

Let X be a real linear space and let a norm N be given in X as well as a system Σ of seminorms which do not vanish simultaneously for any non-zero element of X. The unit ball S of X is assumed to be bounded and complete with respect to Σ. We denote by Ξ the triple (X, Σ, Λ) and by L_Ξ — the set of all linear mappings of X into itself the restrictions of which on S are continuous with respect to Σ. All operators which belong to L_Ξ are proved to be continuous with respect to N and this enables us to consider L_Ξ as a normed space.

Let M be a set of elements of X which satisfies the following two conditions:

a) $0 \overline{\in} M$;

b) the Σ-closed equilibrated convex hull of M coincides with S.

We denote by $R_{\Xi,M}$ the set of that operators belonging to L_Ξ which have the property that all the elements of M are their eigenvectors. The set $R_{\Xi,M}$ turns out to be an aglebra (possessing a unit). To each $A \in R_{\Xi,M}$

we make to correspond the real-valued function $A^\wedge(x)$ which is defined for every $x \in M$ by means of the equation

$$Ax = A^\wedge(x)x.$$

Let $R^\wedge_{\Xi,M}$ be the set of all the functions $A^\wedge$, where $A \in R_{\Xi,M}$. We show that $R^\wedge_{\Xi,M}$ is a subalgebra of the algebra $C_\Sigma(M)$ consisting of all bounded Σ-continuous real-valued functions defined on M and the mapping $A \to A^\wedge$ is an isometric isomorphism between $R_{\Xi,M}$ and $R^\wedge_{\Xi,M}$. We study some other properties of the mapping $A \to A^\wedge$ as well as some of the set $R^\wedge_{\Xi,M}$ and of certain subsets of it. For example, $R^\wedge_{\Xi,M}$ turns out to be a closed subset of $C_\Sigma(M)$ with respect to convergence which is uniform on each set of the form $M-U$, where U is a Σ-neighbourhood of the origin in X. If the set $M \cup \{0\}$ is compact with respect to Σ, this property of the set $R^\wedge_{\Xi,M}$ enables us to apply the Stone-Weierstrass theorem. Some results about $R_{\Xi,M}$ are obtained which can be formulated without making mention of the mapping $A \to A^\wedge$ and of the set $R^\wedge_{\Xi,M}$. For example, we establish (under the original hypotheses on M) that every operator in $R_{\Xi,M}$ which maps X on to the whole X possesses an inverse operator which also belongs to $R_{\Xi,M}$. If every sequence of elements of M has a non-zero cluster point with respect to Σ, then for the operators which belong to $R_{\Xi,M}$ the Fredholm alternative holds.