БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

АСИМПТОТИЧНО ПОВЕДЕНИЕ НА РЕШЕНИЕТО НА УРАВНЕНИЕТО НА ВИНЕР—ХОПФ, ЧИЕТО ЯДРО Е ВЕРОЯТНОСТНА ПЛЪТНОСТ

Апостол Обретенов

В настоящата работа се разглежда асимптотичното поведение на решението $G(x)$ на уравнението на Винер — Хопф

$$G(x)=\int_0^{\infty} p(x-y)G(y)dy \tag{1}$$

при следните предположения:

(а) ядрото $p(x)$ е симетрична вероятностна плътност;

(б) исканото решение $G(x)$ е функция, дефинирана на $0 \leq x < +\infty$, непрекъсната отдясно и $G(0)>0$.

Известно е [1], че при тези предположения и освен това, ако $p(x)$ има краен втори момент

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx, \tag{в}$$

то решението $G(x)$ е единствено (с точност до мултипликативна константа). При такъв избор на ядрото $p(x)$ в (1) функцията $G(x)$ има вероятностно тълкуване.

Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ са независими и еднакво разпределени случайни величини с плътност на разпределение $p(x)$. Да означим с S_k сумата

$$S_k=x_1+x_2+\cdots+x_k$$

и

$$M_n=\max_{1\leq k\leq n} S_k.$$

Да разгледаме марковския процес, дефиниран по следния начин:

$$T_0=0,\ T_{n+1}=(T_n+x_{n+1})^+,\ x^+=\begin{cases} x, & x>0. \\ 0, & x\leq 0. \end{cases}$$

Полачек [2] доказа, че разпределенията на величините M_n и T_n съвпадат. Спитцер [3] показа, че ако предположението (а) отслабим, като вместо симетричност на $p(x)$ искаме само

$$(a_1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=0,$$

решението $G(x)$ на (1) е единствена инвариантна мярка на процеса $\{T_n\}$ (вж. теореми 1.1 и 2.1). В същата работа (теорема 1) Спитцер доказва следната

Теорема. При условията (a_1), (б) и (в) за функцията $G(x)$ имаме при всяко $h>0$

$$(2) \qquad \lim_{x\to\infty} [G(x+h)-G(x)]=h2^{1/2}\sigma^{-1}.$$

Граничното съотношение (2) в същност е едно твърдение от тауберов тип, тъй като за $G(x)$ имаме [1] представянето

$$\int_{0-}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dG(x)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda^2+u^2}\lg[1-\varphi(u)]du\right\},$$

където $\varphi(u)$ е характеристичната функция на случайната величина x_i, т. е.

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\,p(x)dx.$$

От (2) веднага следва, че $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-1}G(x)=2^{1/2}\sigma^{-1}$, или

$$G(x)\sim 2^{1/2}\sigma^{-1}x.$$

Основният резултат на настоящата работа е следният.

Теорема 1. При предположение, че са изпълнени условията (а), (б) и ако $p(x)$ има краен трети момент, т. е.

$$(2) \qquad M|x_i|^3=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^3p(x)dx<+\infty,$$

то

$$(2_1) \qquad \lim_{x\to\infty}[G(x)-2^{1/2}\sigma^{-1}x]=2^{1/2}d\sigma^{-1}+c,$$

където c и d са константите

$$c=\exp\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\frac{1}{2}-P(S_k<0)\right],$$

$$d=\lim_{t\to 1-0}\left[\sigma 2^{-1/2}(1-t)^{-1/2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}M(S_k;S_k\leq 0)\right].$$

По такъв начин теорема 1 представя по-пълно асимптотичното поведение на функцията $G(x)$, отколкото даденото чрез (2), обаче при наличност на по-силно предположение за съществуването на трети момент. В процеса на доказателството на горната теорема се установява и следната, представляваща самостоятелен интерес

Теорема 2. Нека $F(x)$ е неизродена симетрична функция на разпределение, за която

$$\int_0^{\infty} x^3 dF(x) < +\infty.$$

Ако $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ са еднакво разпределени и независими случайни величини с функция на разпределение $F(x)$, редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2}\left[(2\pi)^{-1/2} - M((k^{1/2}\sigma)^{-1}S_k;\ S_k \geqq 0)\right] \tag{3}$$

е сходящ.

Да отбележим, че в (3) величината $(2\pi)^{-1/2}$ е $1/2$ от абсолютния първи момент на нормалното разпределение с параметри $(0, 1)$, а по централната гранична теорема случайната величина $\zeta_k = (k^{1/2}\sigma)^{-1}S_k$ е асимптотично нормална. Така че сходимостта на реда (3) ни дава една оценка за скоростта на сходимост на $M|\zeta_k|$ към съответния момент на нормалното разпределение. Аналогично твърдение имаме, когато вместо моментите разглеждаме полумасите на нормалното и на разпределението на ζ_k. В този случай, както е показано в [3], редът

$$\lg c = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\left[2^{-1} - P(S_k < 0)\right] \tag{4}$$

е сходящ. Въпросът за сходимост на (4) е разглеждан отделно и от други автори. Розен [4] доказа, че (4) е абсолютно сходящ, а в [5] е показано, че ако $M|x_i|^{2+\alpha} < +\infty$, $0 < \alpha < 1$, редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1+\alpha/2}\left[2^{-1} - P(S_k < 0)\right]$$

е също абсолютно сходящ.

Доказателство на теорема 1. Да означим със z случайната величина, определена чрез случайните величини $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$, по следния начин:

$$z = \begin{cases} S_k \text{ на множеството } A_k = (S_1 \leqq 0, S_2 \leqq 0, \ldots, S_{k-1} \leqq 0, S_k > 0), \\ 0 \text{ на } \bar{A}_k. \end{cases}$$

Известно е (вж. (0,5) от [3]), че Лапласовите трансформации на $G(x)$ и на функцията на разпределение на z са свързани чрез равенството

$$\int_{0-}^{+\infty} e^{-\lambda x} dG(x) = \frac{c}{1 - Me^{-\lambda z}}, \tag{5}$$

където c е константата, определена от (4). Да положим $\tilde{G}(x)=c^{-1}G(x)$ и $Z(x)=P(z<x)$. При тези означения равенството (5) ни дава

$$\tilde{G}(x)=1+\int_0^x \tilde{G}(x-t)dZ(t). \tag{6}$$

Може да се покаже по същия начин, както това е направил Такач (вж. [8], стр. 144), че от (2) следва така наречената възлова теорема на възстановяване на Смит [7]:

За произволна неотрицателна функция $Q(t)$, дефинирана за $t\geqq 0$, нерастяща и принадлежаща на $L_1(0, \infty)$, имаме

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dG(x)=\frac{1}{Mz}\int_0^\infty Q(y)dy.$$

Да предположим, че вторият момент на случайната величина z съществува. Тогава функцията $Q(t)$, определена по следния начин,

$$Q(t)=1-\frac{1}{Mz}\int_0^t [1-Z(x)]\,dx,$$

отговаря на условията на възловата теорема. Не е трудно да се пресметне, че

$$\int_0^\infty Q(y)dy=\frac{Mz^2}{2Mz}\cdot$$

Като използваме (6) и вземем пред вид, че $\tilde{G}(0)=1$, намираме

$$\int_0^t Q(t-x)d\tilde{G}(x)-\left[\tilde{G}(t)-\frac{t}{Mz}-1\right]=0$$

и следователно по възловата теорема ще имаме

$$\lim_{t\to\infty}\left[\tilde{G}(t)-\frac{t}{Mz}\right]=\frac{Mz^2}{2(Mz)^2}+1. \tag{7}$$

Първият момент на z е известен [3] и е $Mz=c\sigma 2^{-1/2}$. Така че, ако намерим и Mz^2, ще бъде намерена константата отдясно на (7) и с това ще бъде доказана теорема 1. С други думи, остава да определим Mz^2 и с тази задача ще се занимаем по-нататък.

От определението на случайната величина z, ако означим с B_{k-1} събитието

$$B_{k-1}=\{S_1\leq 0,\ S_2\leq 0, \ldots, S_{k-1}\leq 0\},$$

ще имаме

$$Mz^2=\sum_{k=0}^{\infty}M(S_k^2;\ B_{k-1}\{S_k>0\}). \tag{8}$$

Понеже $B_{k-1}\{S_k>0\}=B_{k-1}\overline{B}_k$, то

$$M(S_k^2;\, B_{k-1}\{S_k>0\})=M(S_k^2;\, B_{k-1})-M(S_k^2;\, B_k). \tag{9}$$

От независимостта на x_k от величините $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ следва равенството

$$M(S_k^2;\, B_{k-1})=M(S_{k-1}^2;\, B_{k-1})+\sigma^2 P(B_{k-1}). \tag{10}$$

Да означим с a_n парциалната сума на реда (8). Имайки пред вид (9) и (10), за a_n получаваме

$$a_n=\sigma^2\sum_{k=1}^{n}P(B_{k-1})-M(S_n^2;\, B_n) \tag{11}$$

и вместо (8) ще имаме

$$Mz^2=\lim_{n\to\infty}a_n. \tag{12}$$

Следователно Mz^2 ще съществува, ако редицата с общ член a_n клони към определена граница. От (8) е ясно, че $a_{n+1}\geqq a_n\geqq 0$. Да означим с $a(t)$ сумата на степенния ред

$$a(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n.$$

Ако съотношението (12) е вярно, по известната тауберова теорема на Харди — Литлвуд ще имаме

$$Mz^2=\lim_{t\to 1_{-0}}(1-t)a(t). \tag{13}$$

Асимптотичното поведение на $a(t)$ при $t\to 1_{-0}$ ще намерим, като използваме теорема 6.1 от [6], според която имаме за всяко $0\leqq t<1$ и $\lambda\geqq 0$

$$\sum_{0}^{\infty}t^n M[e^{\lambda S_n};\, B_n]=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}M[e^{\lambda S_k};\, S_k\leqq 0]\right\}. \tag{14}$$

От (14) при $\lambda=0$ следва

$$\sum_{0}^{\infty}t^n P(B_n)=\exp\left[\sum_{1}^{\infty}P(S_k\leqq 0)t^k\right]. \tag{14_1}$$

Тъй като $MS_n^2<+\infty$, от (14) след двукратно диференциране по λ и полагане $\lambda=0$ намираме

$$\sum_{0}^{\infty}M(S_n^2;\, B_n)t^n=\exp\left[\sum_{1}^{\infty}\frac{t^k}{k}P(S_k\leqq 0)\right] \tag{14_2}$$

$$\times\left\{\left[\sum_{1}^{\infty}\frac{t^k}{k}M(S_k;\, S_k\leqq 0)\right]^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}M(S_k^2;\, S_k\leqq 0)\right\}.$$

Като вземем пред вид израза (11) за a_n, равенствата (14_1), (14_2) и че

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}P(B_{k-1})t^k=\frac{1}{1-t}\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)t^n,$$

$$M(S_k^2;\ S_k\leq 0)=k\frac{\sigma^2}{2},$$

за реда $a(t)$ ще имаме следното представяне:

$$a(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sigma^2\sum_{k=1}^{n}P(B_{k-1})-M(S_n;\ B_n)\right\}t^n \tag{15}$$

$$=\exp\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}P(S_k\leq 0)\right]\left\{\frac{\sigma^2}{2(1-t)}-\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}M(S_k;\ S_k\leq 0)\right]^2\right\}.$$

От централната гранична теорема следва

$$k^{-1}M(S_k;\ S_k\leq 0)\sim-\frac{k^{-1/2}\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

при $k\to\infty$; това асимптотично съотношение по абелева теорема ни дава

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}M(S_k;\ S_k\leq 0)\sim\frac{-\sigma}{2^{1/2}(1-t)^{1/2}},\quad t\to 1_{-0}. \tag{16}$$

По-нататък, имайки пред вид, че редът (4) е сходящ, получаваме

$$\exp\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}P(S_k<0)\right]=(1-t)^{-1/2}\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}\left[\frac{1}{2}-P(S_k>0)\right]\right\} \tag{17}$$

$$=c(1-t)^{-1/2}.$$

От (15), като използваме (17), ще имаме

$$a(t)=c(1-t)^{-1/2}\left[\sigma 2^{-1/2}(1-t)^{-1/2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{t^k}{k}M(S_k;\ S_k\leq 0)\right] \tag{18}$$

$$\times\left[\sigma(2-2t)^{-1/2}-\sum_{1}^{\infty}\frac{t^k}{k}M(S_k;S_k\leq 0)\right].$$

Съотношението (16) ни дава за последния множител от дясната страна на (18) по теорема от абелев тип следната асимптотика:

$$\sigma 2^{-1/2}(1-t)^{-1/2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}M(S_k;\ S_k\leq 0)\sim 2^{1/2}\sigma(1-t)^{-1/2}. \tag{19}$$

Да означим с d границата

$$d=\lim_{t\to 1_{-0}}\left[\sigma 2^{-1/2}(1-t)^{-1/2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}M(S_k;\ S_k\leq 0)\right]. \tag{20}$$

Това, че тази граница съществува, е в същност твърдението на формулираната в началото теорема 2, която ще докажем по-сетне. Засега да приемем, че d съществува. В такъв случай граничните съотношения (19) и (20) ни дават за $a(t)$ от (18)

$$a(t) \sim 2^{1/2} c d \sigma (1-t)^{-1} \tag{21}$$

и по (13) намираме

$$Mz^2 = 2^{1/2} c d \sigma.$$

С това теорема 1 е доказана, като константата отдясно в (2_1) се получава от (7), заествайки Mz и Mz^2 с равните им изрази.

Доказателство на теорема 2. Доказателството ще проведем, като ползваме метода на доказателството, дадено от Розен [4] за сходимостта на реда (4). Ще използваме и следния резултат, получен там:

1. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ е редица от независими еднакво разпределени случайни величини с неизродена функция на разпределение. Нека I_n е даден интервал от реалната ос, с дължина mI_n. Тогава, ако $mI_n \leq n^a$, $0 < a < 1/2$, то $P(S_n \in I_n) \leq K n^{a-1/2}$, където K е константа, независеща от n и I_n.

Нека $F(x)$ е симетрична функция на разпределение с краен трети момент, а $\varphi(t)$ — нейната характеристична функция. Ако означим със σ^2 втория момент на $F(x)$, то при достатъчно малки стойности на t, $|t| < \delta$, ще имаме за $\varphi(t)$ тейлорово развитие

$$\varphi(t) = 1 - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + t^3 R(t),$$

където $R(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Лема. При горните предположения за $F(x)$ интегралът

$$\int_0^\delta \frac{|R(t)|}{t} dt$$

е сходящ.

Доказателство. Горната лема представлява с несъществени изменения лема 3 от [4]. Без ограничение може да предположим $\delta = 1$. Понеже $F(x)$ е симетрична функция, за $R(t)$ имаме представянето

$$R(t) = t^{-3} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\cos xt + \frac{(xt)^2}{2} - 1\right] dF(x).$$

Нека $\varepsilon > 0$ и произволно. Тогава

$$\int_\varepsilon^1 \frac{|R(t)|}{t} dt = \int_\varepsilon^1 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\cos xt + \frac{(xt)^2}{2} - 1\right] dF(x) \right| t^{-4} dt$$

и след размяна на реда на интегрирането ще получим

$$(22)\qquad \int_{\varepsilon}^{1} \frac{|R(t)|}{t}\,dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{\varepsilon}^{1}\left|\cos xt+\frac{(xt)^2}{2}-1\right| t^{-4}\,dt\right\} dF(x).$$

Смяната е законна, понеже $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) < +\infty$. Като използваме неравенствата

$$\left|\cos u+\frac{u^2}{2}-1\right| \leq \frac{u^4}{4!} \text{ при } |u| \leqq 1,$$

$$\left|\cos u+\frac{u^2}{2}-1\right| < 3u^2 \text{ при } |u| > 1,$$

за интеграла

$$I(\varepsilon, x)=\int_{\varepsilon}^{1}\left|\cos xt+\frac{(xt)^2}{2}-1\right| t^{-4}\,dt$$

ще получим следните оценки:

I. Ако $|x| \leq 1$,

$$(23)\qquad I(\varepsilon, x) \leqq \frac{1}{4!}\int_{\varepsilon}^{1}(xt)^4 t^{-4} \leqq \frac{x^4}{4!}.$$

II. Ако $|x|>1$, при $1<|x|<\frac{1}{\varepsilon}$ имаме

$$(24)\qquad I(\varepsilon, x)=\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{|x|}}+\int_{\frac{1}{|x|}}^{1} \leq \frac{x^4}{4!}\left(\frac{1}{|x|}-\varepsilon\right)+3x^2\int_{\frac{1}{|x|}}^{1} t^{-2}dt \leq C\,|x|^3,$$

а при $|x| \geqq \frac{1}{\varepsilon}$

$$(25)\qquad I(\varepsilon, x)<3\int_{\varepsilon}^{1}\frac{(xt)^2}{t^4}\,dt=3x^2\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)<3\,|x|^3.$$

От (22) и неравенствата (23), (24) и (25) следва

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{|R(t)|}{t}\,dt \leq \text{const}.\int_{-\infty}^{\infty}|x|^3\,dF(x)<+\infty$$

за всяко $\varepsilon>0$, което ни дава казаното твърдение.

Да докажем сега, че редът (3) е абсолютно сходящ. Без ограничение на общността за улеснение може да предположим $\sigma=1$. С елементарни пресмятания лесно се проверява, че

$$(26)\qquad \int_0^\infty \frac{1-e^{-n\frac{t^2}{2}}}{n^{1/2}t^2}\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

От анализа е известно, че

$$(27)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}\,dt=|x|.$$

Като имаме пред вид стойностите на интегралите (26) и (27), за всяко $\delta>0$ ще имаме равенството

$$(28)\qquad n^{-1/2}|x|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}+I_1(x)+I_2(x),$$

където с $I_1(x)$ и $I_2(x)$ сме означили интегралите

$$I_1(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\delta \frac{e^{-n\frac{t^2}{2}}-\cos xt}{n^{1/2}t^2}\,dt,$$

$$I_2(x)=\frac{2}{\pi}\int_\delta^\infty \frac{e^{-n\frac{t^2}{2}}-\cos xt}{n^{1/2}t^2}\,dt.$$

От (28) намираме

$$(29)\qquad M(n^{-1/2}S_n;\ S_n\geq 0)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\int_0^\infty I_1(x)dF_n(x)+\int_0^\infty I_2(x)dF_n(x),$$

където $F_n(x)$ е функцията на разпределение на случайната величина S_n. По-нататък ще ни потрябват някои оценки за $I_1(x)$ и $I_2(x)$, които ще дадем предварително. От (26) и (27) намираме

$$(30)\qquad |I_1(x)|<\frac{|x|+1}{n^{1/2}}\,.$$

За $I_2(x)$ имаме оценката

$$(31)\qquad |I_2(x)|<\frac{4}{\pi n^{1/2}}\int_\delta^\infty t^{-2}\,dt=C(\delta)n^{-1/2}.$$

От друга страна, понеже

$$\left|\int_u^\infty \frac{\cos v}{v^2}\,dv\right|\leq Cu^{-2},$$

за $I_2(x)$ получаваме и следната оценка за $x>0$:

$$(32)\qquad n^{-1/2}|I_2(x)|\leq\frac{C}{x\delta^2}+\int_\delta^\infty e^{-n\frac{t^2}{2}}t^{-2}dt<C(\delta)\left[\frac{1}{x}+e^{-n\frac{\delta^2}{2}}\right].$$

Ще покажем, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \int_{0}^{\infty} I_2(x)\, dF_n(x) \tag{33}$$

е абсолютно сходящ. Действително нека $0 < \alpha < 1/2$. Тогава, като приложим твърдението 1. и използваме оценката (31), получаваме

$$\left| \int_{0}^{n^{\alpha}} I_2(x)\, dF_n(x) \right| \leq C(\delta) n^{-1/2} \int_{0}^{n^{\alpha}} dF_n(x) \leq KC(\delta) n^{\alpha-1}, \tag{34}$$

а от неравенството (32) намираме

$$\left| \int_{n^{\alpha}}^{\infty} I_2(x) dF_n(x) \right| < C(\delta) n^{-1/2} \left[\int_{n^{\alpha}}^{\infty} x^{-1}\, dF_n(x) + e^{-n\frac{\delta^2}{2}} \right] \tag{35}$$

$$< C(\delta) n^{-1/2} \left(n^{-\alpha} + e^{-n\frac{\delta^2}{2}} \right).$$

Неравенствата (34) и (35) дават сходимостта на (33).

Да изследваме реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \int_{0}^{\infty} I_1(x) dF_n(x). \tag{36}$$

Нека $\sum'_N$ е N-тата му парциална сума. От независимостта на величините $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ и от това, че са еднакво разпределени, имаме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos xt\, dF_n(x) = \varphi^n(t). \tag{37}$$

Имайки пред вид равенството (37), след като сменим реда на интегрирането във всеки един от членовете на сумата $\sum'_N$, получаваме

$$\sum{}'_N = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\delta} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-n\frac{t^2}{2}} - \varphi^n(t)}{nt^2}\, dt. \tag{38}$$

Тъй като за стойностите на t от интервала $(0, \delta)$ са валидни равенствата

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(t) &= \frac{t^2}{2} - t^3 R(t), \\ 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} &= \frac{t^2}{2} - t^3 R_1(t), \end{aligned} \tag{39}$$

то очевидно, ако изберем числото δ толкова малко, че да е изпълнено неравенството

$$|tR(t)| < 1/2,$$

ще може според (39) да си осигурим $0<\varphi(t)<1$. Да положим за краткост в писането $s=e^{-t^2/2}$, $u=\varphi(t)$ и нека q е числото, определено по следния начин:

$$q=\max\left[\sup_{\delta_1\leq t\leq\delta}\varphi(t),\ e^{-\delta_1^2/2}\right], \tag{40}$$

където δ_1 е произволно и $0<\delta_1<\delta$. От това, че за всички цели неотрицателни стойности на N и за всяко t от интервала (δ_1, δ) е изпълнено неравенството

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{s^n-u^n}{nt^2}\right|\leq 2t^{-2}\sum_{n=1}^{N}\frac{q^n}{n}=-t^{-2}\lg(1-q)^2, \tag{41}$$

следва

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\delta_1}^{\delta}\sum_{1}^{N}\frac{s^n-u^n}{nt^2}\,dt=\int_{\delta_1}^{\delta}t^{-2}\lg\frac{1-u}{1-s}\,dt=\int_{\delta_1}^{\delta}t^{-2}\lg\frac{1-2tR(t)}{1-2tR_1(t)}\,dt. \tag{42}$$

Лесно се вижда, че съществува константа C такава, че

$$\left|t^{-2}\lg\frac{1-2\,tR(t)}{1-2tR_1(t)}\right|\leq C(|R(t)|+|R_1(t)|)t^{-1}$$

и поради това от (42) ще имаме

$$\lim_{N\to\infty}\left|\int_{\delta_1}^{\delta}\sum_{1}^{N}\frac{s^n-u^n}{nt^2}\,dt\right|\leq C\int_{\delta_1}^{\delta}(|R(t)|+|R_1(t)|)\,t^{-1}\,dt. \tag{43}$$

Но според доказаната лема

$$I=\int_{0}^{\delta}(|R(t)|+|R_1(t)|)\,t^{-1}\,dt<+\infty,$$

като сходимостта на $\int_{0}^{\delta}|R_1|\,t^{-1}dt$ следва от това, че и $R_1(t)$ е аналогична функция на $R(t)$, получена за случая, когато функцията на разпределение $F(x)$ е нормалното разпределение (0, 1). Неравенството (43) ни дава оценката

$$\left|\sum_{1}^{N}\int_{\delta_1}^{\delta}\frac{s^n-u^n}{nt^2}\,dt\right|\leq\varepsilon_1+CI, \tag{44}$$

вярна за всички достатъчно големи стойности на N и за всяко $\delta_1>0$. При $\delta_1\to 0$ от (44) и (40) заключаваме, че

$$\lim_{N\to\infty} \sum\nolimits_N^+ < +\infty$$

т. е. редът (36) е сходящ.

От сходимостта на редовете (33), (36) и от (29) следва сходимостта и на реда (3). С това теорема 2 е доказана.

Сега можем да се върнем на предположението за съществуването на границата d от (20) и да попълним тази непълнота в доказателството на теорема 1.

Понеже за всяко k имаме $MS_k=0$, чрез тъждествени преобразувания получаваме

$$b(t)=\sigma 2^{-1/2}(1-t)^{-1/2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}M(S_k\,;\,S_k<0) \tag{45}$$

$$=\left[2^{-1/2}(1-t)^{-1/2}-\sum_{k=1}^{\infty}(2\pi k)^{-1/2}t^k\right]\sigma+\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1/2}t^k[\sigma(2\pi)^{-1/2}-M(k^{-1/2}S_k;\,S_k\geqq 0)].$$

Да означим с $\Delta_1(t)$ и $\Delta_2(t)$ степенните редове

$$\Delta_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)}-k^{-1/2}\right\}t^k+2^{-1/2}, \tag{46}$$

$$\Delta_2(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1/2}t^k[\sigma(2\pi)^{-1/2}-M(k^{-1/2}S_k\,;\,S_k\geqq 0)]. \tag{47}$$

От (45) се вижда лесно, че

$$b(t)=\Delta_1(t)+\Delta_2(t). \tag{48}$$

По теоремата на Абел за степенни редове редът $\Delta_2(t)$ клони към определена граница при $t\to 1_{-0}$, понеже според теорема 2 имаме $\Delta_2(1)<+\infty$. $\Delta_1(t)$ също клони към определена граница. Действително с помощта на формулата на Стирлинг намираме

$$\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)}-k^{-1/2}=-\frac{1}{8\,k^{3/2}}+O(k^{-5/2}),$$

което, като вземем пред вид в израза (46) за $\Delta_1(t)$, ще ни дава сходимостта на реда $\Delta_1(1)$. Следователно пак по теоремата на Абел границата $\lim\limits_{t\to 1-0}\Delta_1(t)$ съществува. От (48) следва съществуването и на $\lim\limits_{t\to 1-0}b(t)$, което е и граничното съотношение (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Spitzer, F. The Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability density. Duke Math. J., **24** (1957), 327--344.
2. Spitzer, F. A Tauberian theorem and its probability interpretation. Trans. Am. Math. Soc., **94** (1960), 150—169.

3. Pollaczek, F. Functions characteristiques de certaines repartittions définies au moyen de la notion d'ordre. Compt. rend. Acad. Sci., Paris, **234** (1952), 2334—2336.
4. Rosén, B. On the asymptotic distribution of sums of independent identically distributed random variables. Ark. Mat., **4** (1962), 323—332.
5. Baum, L. and M. Katz. On the influence of moments on the asymptotic distribution o sums of random variables. Ann. Math. Statist., **34** (1963), 1042—1044.
6. Spitzer, F. A combinatorial lemma and its application to probability theory. Trans. Amer. Math. Soc., **82** (1956), 323—333.
7. Smith, W. Asymptotic renewal theorems. Proc. Roy. Soc., Edinburgh. Sect. A, **64** (1954), 9—48.
8. Смит, В. Теория восстановления. Математика, **5**:3 (1961), 95—150.

Постъпила на 2. III. 1965 г.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА — ХОПФА, ЯДРО КОТОРОГО ЕСТЬ ВЕРОЯТНОСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ

Апостол Обретенов

Резюме

Исследуется асимптотическое поведение решения $G(x)$ уравнения (1) Винера — Хопфа, причем решение удовлетворяет требованию (б). При предположениях (а) и (г) для ядра $p(x)$ уравнения (1) доказывается (теорема 1), что

$$\lim_{x\to\infty}[G(x)-2^{1/2}\sigma^{-1}x]=2^{1/2}d\sigma^{-1}+c,$$

где c и d — постоянные, определенные соответственно из (4) и (20).

Доказывается и следующее утверждение (теорема 2):

Если $F(x)$ — невырожденная симметричная функция распределения, имеющая конечный третий момент, и $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-M(k^{-1/2}\sigma S_k;\ S_k\geqq 0)\right]$$

абсолютно сходится.

Способы доказательств преимущественно те же, что и в работах [3] и [4].

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE SOLUTION OF THE WIENER-HOPF EQUATION WHOSE KERNEL IS A PROBABILITY DENSITY

Apostol Obretenov

Summary

An investigation is made of the asymptotic behaviour of the solution $G(x)$ of Wiener-Hopf equation (1), the solution satisfying (b). Under assumptions (a) and (d) for the kernel $p(x)$ of (1), it is proved (theorem 1) that

$$\lim_{x\to\infty} [G(x) - 2^{1/2}\sigma^{-1}x] = 2^{1/2}d\sigma^{-1} + c,$$

c and d being constants determined from (4) and (20) respectively.

The following assertion is also proved (theorem 2):

If $F(x)$ is a non-degenerate symmetrical distribution function with a finite third moment, and if $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ are independent and equally distributed random variables with distribution function $F(x)$, then the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - M(k^{-1/2}\sigma S_k;\, S_k \geq 0) \right]$$

is a convergent one.

The methods used in carrying out the proofs are mainly those of [3] and [4].