БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

SUR LA MÉTHODE DU REPÈRE MOBILE

Gheorghi Gheorghiev*

On sait que la méthode du repère mobile (M. R. M.) due à Élie Cartan [1, 2] se réfère à l'étude différentielle des surfaces, précisément des variétés intégrables de dimension maximum d'une distribution involutive d'un espace homogène. Elle consiste en deux processus, tous les deux ayant caractère algébrique. Le premier est le prolongement régulier du système qui définit la distribution, par rapport aux pfaffiens indépendants sur la variété étudiée, en tenant compte des équations de structure du groupe fondamental et aussi des équations de la distribution donnée. Le second processus de l'algorytme de Cartan, détermine les „paramètres secondaires" correspondants à chaque étape de la prolongation. Récemment on a montré que la méthode classique de Cartan a une signification globale dès que le groupe et la distribution sont définies globalement [12]. „D'ailleurs, chaque fois quand on part d'un problème global et on utilise un processus algébrique — ici le processus de la prolongation normale d'une algèbre extérieure différentielle — les résultats obtenus ont aussi une signification globale." [7].

Si on rénonce à l'algorythme de Cartan et on conserve seulement les prolongements réguliers, on obtient la méthode de M. G. Laptev [9, 10], laquelle est appliquée avec succès par l'école de Moscou, aux recherches des distributions involutives des espaces où opère un pseudogroupe Lie fini ou infini de transformations. L'auteur, en collaboration ou seul, a étendu aussi à ces cas l'algorythme de Cartan, en l'appliquant partiellement [5] ou entièrement [4].

La communication a pour but de montrer comment on élargit la M. R. M. et ses diverses variantes à l'étude des distributions, définies globalement, involutives ou non involutives, des espaces d'une G-structure; évidemment ici la méthode conserve aussi la signification globale.

§ 1. Les conditions d'intégrabilité d'une G-structure

Soit un variété V_n douée d'un $D_n^1 = GL(n, R)$-structure et ses prologements différentiels successifs V_n^1, $V_n^2, \ldots$, déterminés par la suite des ensembles des pfaffiens définis globalement

---

* Jaşi, Roumanie.

(0) $$\omega^i,\ \omega^i_j,\ \omega^i_{jh},\quad i=1,\dots,n,$$

qui vérifient les équations de structure

(1) $$d\omega^i=\omega^i\wedge\omega^i_j,\quad d\omega^i_j=\omega^h\wedge\omega^i_{lh}+\omega^h_j\wedge\omega^i_h,\dots$$

Si la D^1_n-structure est quelconque, alors (1_1) est remplacée par

(2) $$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j+\frac{1}{2}T^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k,$$

toutes les autres ayant la même forme. Si l'on considère (0) et (1) (mod ω^i) on obtient précisément les formes invariantes et les équations de structure des groupes D^1_n, $D^2_n,\dots$ Ici les seules conditions d'intégrabilité sont $\omega^h\wedge\omega^k\wedge\omega^i_{\dots hk}=0$ [6, 10].

Soit un sousgroupe Lie d'ordre r, $G\subset D^1_n$, ayant $\overline{\omega^{\bar{a}}}=\omega^a\,(\mathrm{mod}\,\omega^i)$ — comme formes de definition et $\pi^a=\omega^a(\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \omega^{\bar{a}})$ comme formes invariantes qui vérifient les équations de structure

(3) $$d\pi^a=\frac{1}{2}C^a_{\beta\gamma}\pi^\beta\wedge\pi^\gamma$$

alors nous avons

(4) $$\bar{\omega}^i_j=C^i_{\bar{a}j}\overline{\omega^{\bar{a}}}+C^i_{aj}\bar{\omega}^a,\quad \bar{a}=n+1,\dots,n+n^2-r;$$
$$a=n+n^2-r+1,\dots,n+n^2.$$

Si les coefficients C sont constants pour tous les points $x\in V_n$ et aussi $[C^i_{aj}]$ matrice du rang r, les éléments de laquelle sont des solutions du système

(5) $$C^i_{aj}C^j_{\beta k}-C^i_{\beta j}C^j_{ak}=C^\gamma_{a\beta}C^i_{\gamma k},$$

alors sur V_n sera définie globalement la G-structure $B=E_0(V_n,G)$; la variété B et ses prolongements normaux successifs B^1, $B^2,\dots$ sont donnés par la suite des ensembles des formes ω^i, ω^a, $\omega^{a_1},\dots$ qui vérifient les suivantes de structure [4, 11]:

$$d\omega^i=\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k+C^i_{ja}\omega^j\wedge\omega^a,$$

(6) $$d\omega^a=\frac{1}{2}C^a_{\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma+C^a_{\alpha j}\omega^\beta\wedge\omega^j+\frac{1}{2}C^a_{ij}\omega^i\wedge\omega^j+C_{ja_1}\omega^j\wedge\omega^{a_1},$$

$$d\omega^{a_1}=C^{a_1}_{\beta_1}\omega^{\beta_1}\wedge\omega^\gamma+\dots+C^{a_1}_{ja_2}\omega^j\omega^{a_2},\dots$$

Nous nous proposons d'établir les conditions d'intégrabilité de la G-structure concernant les premières deux étapes; on utilisera la notation $dC^{\cdot}_{\cdot\cdot}=C^{\cdot}_{\cdot\cdot,j}\omega^j+C^{\cdot}_{\cdot\cdot,a}\omega^a+\cdots$ pour les dérivées pfaffiennes des coefficients.

En différentiant extérieurement (6_1) et en tenant compte de (6), on obtient hors de (5), les suivantes formules d'intégrabilité:

(7) $$C^i_{a[h}C_{j]a_1}=0,\quad C^i_{(hj,k)}+C^i_{m(h}C^m_{jk)}+C^i_{a(h}C^a_{jk)}=0,$$
$$C^i_{jk,a}+C^i_{ah}C^h_{jk}-C^i_{h[j}C^h_{k]a}-C^i_{\beta[k}C^\beta_{j]a}=0.$$

D'ici on peut essayer d'énoncer un théorème d'existence pour les G-structures, qui aurait un caractère local, parce que, outre d'autres, elles s'appuie sur le théorème fondomental des systèmes Pfaff en involution.

En différentiant (6_2) et en tenant compte de (6), on obtient encore les suivantes conditions:

$$C^{a}_{\beta(\lambda}C^{\beta}_{\mu\nu)}=0, \quad C^{a}_{a_1[i}C^{a_1}_{j]a_2}=0, \quad C^{a}_{(ij,h)}+C^{a}_{k(i}C^{k}_{jh)}+C^{a}_{\beta(i}C^{\beta}_{jh)}+C^{a}_{a_1(i}C^{a_1}_{jh)}=0,$$

$$C^{a}_{hj,a_1}+C^{a}_{\beta[h}C^{\beta}_{j]a_1}+C^{a}_{\beta_1[h}C^{\beta_1}_{j|a_1}+C^{a}_{ia_1}C^{i}_{hj}=0,$$

$$C^{a}_{\beta h,a_1}+C^{a}_{\beta_1 h}C^{\beta_1}_{a_1\beta}-C^{a}_{\gamma\beta}C^{\gamma}_{a_1 h}+C^{a}_{ia_1}C^{i}_{\beta h}=0, \tag{8}$$

$$C^{a}_{h[\beta,\gamma]}+C^{a}_{\lambda[\gamma}C^{\lambda}_{\beta]h}+C^{a}_{i\beta[}C^{i}_{\gamma]h}-C^{a}_{\lambda h}C^{\lambda}_{\beta\gamma}-C^{a}_{a_1 h}C^{a_1}_{\beta\gamma}=0,$$

$$C^{a}_{\beta[h,j]}+C^{a}_{hj,\beta}+C^{a}_{i[h}C^{i}_{j]\beta}-C^{a}_{\gamma[h}C^{\gamma}_{j]\beta}+C^{a}_{a_1[j}C^{a_1}_{h]\beta}+C^{a}_{\gamma\beta}C^{\gamma}_{hj}+C^{a}_{i\beta}C^{i}_{hj}=0.$$

A l'avenir toutes les conditions d'intégrabilité obtenues, c'est-à-dire (5), (7), (8) seront appelées les formules de Jacobi, parce qu'elles généralisent les identités bien connues de Jacobi pour les groupes et pseudogroupes de Lie.

§ 2. La méthode du repère mobile (M. R. M.)

Maintenant nous nous proposons d'esquisser l'étude différentielle des sousvariétés d'une variéte V_n douée d'une G-structure. Nous rappelons premièrement qu'une surface plongée dans V_n est l'image d'une représentation régulière non dégénérée d'une variété différentiable S_p dans V_n, où chaque voisinage coordonné $\Sigma \subset S_p$ est représenté dans V_n par les équations $x^i=x^i(t^a)$, $a=1,\ldots,p$, ayant la matrice $[x^i_{,a}(t)]$ de rang p partout. En éliminant t, on arrive au système Pfaff de la forme

$$\theta^{i'}=\omega^{i'}-A^{i'}_{b}\omega^{b}=0, \tag{9}$$

les solutions locales duquel nous donnent la représentation des voisinages Σ dans V_n.

Le problème proposé revient à l'étude des solutions globales de dimension maximum de la distribution (D_p) définie par (9) où les coefficients $A^{i'}_{b}$ sont des fonctions du point $P \in B$; par conséquence (9) sont les équations de définition de la variété V_p (qui satisfont aux conditions initiales) exprimées localement. Soient maintenant deux voisinages U et $\widetilde{U}$ de B, correspondant aux voisinages de recouvrement U^0 et $\widetilde{U}^0$ de V_n; nous aurons évidemment $\widetilde{\theta}^{i'}=L^{i'}_{j'}\theta^{j'}$ Puisque les formes ω^a, $\omega^{i'}$ sont définies globalement sur B, il en résulte que $L^{i'}_{j'}=\delta^{i'}_{j'}$ et donc $\widetilde{A}^{i'}_{j'}=A^{i'}_{j'}$. Par conséquent les premiers membres de la distribution (9) sont définis globalement sur B. Donc une distribution de la variété V_n (indifféremment si elle est involutive ou non involutive) admet sur B une représentation globale, ce qui exprime, en particulier, qu'une sousvariéte $V_p \subset V_n$ admet sur B une représentation globale sous la forme (9).

La différentielle extérieure de (9), compte tenu de (6) et de (9) même, nous conduit aux formules

$$(10) \qquad d\theta^{i'} = \frac{1}{2} \overset{1}{B}{}^{i'}_{j'k'} \theta^{j'} \theta^{k'} + \overset{2}{B}{}^{i'}_{j'a} \theta^{j'} \wedge \omega^a$$

$$+ \frac{1}{2} \overset{3}{B}{}^{i'}_{ab} \omega^a \wedge \omega^b + (\overset{2}{B}{}^{i'}_{ab} \omega^a - dA^{i'}_b) \wedge \omega^b + \overset{1}{B}{}^{i'}_{aj'} \omega^a \wedge \theta^{j'}$$

où les coefficients B avec trois indices sont des polynômes en $A^{i'}_b$ des degrés indiqués ci-dessus; par exemple

$$(11) \qquad B^{i'}_{ab} = C^{i'}_{ab} + C^{i'}_{aj'} A^{j'}_b - A^{i'}_a (C^a_{ab} + C^a_{aj'} A^{j'}_b).$$

Nous rappelons exprès que les quantités $C^{\cdot}_{a\cdot}$ qui sont inclues en (11), sont des constantes, puisque cela joue un rôle essentiel en tout ce qui suit.

De (10) on obtient immédiatement

$$(10') \qquad d\theta^{i'} (\bmod \theta^{j'}) = \overline{d\theta}^{i'} = \frac{1}{2} B^{i'}_{ab} \omega^a \wedge \omega^b + (B^{i'}_{ab} \omega^a - dA^{i'}_b) \wedge \omega^b.$$

Vu que $D_p \subset V_n$, $\overline{d\theta}^{i'}$ appartiendra à l'anneau des formes $R(\omega^a)$ de (10') il suit

$$(12_0) \qquad B^{i'}_{ab} \omega^a - a A^{i'}_b = A^{i'}_{bc} \omega^c (\bmod \theta^{i'}).$$

Autrement dit, vu que $D_p \subset V_n$, de (10') il en résulte

$$(12) \qquad \overline{d\theta}^{i'}(d, \delta) = 0$$

d'où

$$(12') \qquad (B^{i'}_{ab} \pi^a - \delta A^{i'}_b) \omega^b = 0$$

où d est un déplacement sur D_p et δ — dans l'intérieur du groupe G. Puisque sur V_p nous avons $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^p \neq 0$, de (12') il en résulte

$$(13) \qquad \delta A^{i'}_b - B^{i'}_{ab} \pi^a = 0.$$

En regardant les formes de ces formules il en résulte que (13) nous donnent une représentation du groupe G dans l'espace des coefficients $A^{i'}_b$, précisément une représentation de G sur la variété grassmannienne des p-planes V_{Q_1} plongée dans $E_n^{*[p]}$. La représentation étant algébrique, elle aura en général les absolus de divers ordres [8], selon le rang de la matrice $[B^{i'}_{ab}]$ considérée de type $[p(n-p), r]$. En donnant des valeurs constantes convenables aux tout au plus possible de coefficients $A^{i'}_b$ jusqu'à ce que l'on épuise tous les „paramètres secondaires" u^a du groupe G qui entrent en (13); le reste des coefficients, notés par J^{s_1}, deviennent les invariants du premier orde de la variété V_p. Si le point $P \in V_{Q_1}$ avec ces coordonnées n'est pas situé sur un des absolus de l'espace V_{Q_1}, la variété $V_p \subset V_n$ sera alors de type générique; en cas contraire elle sera de type spécial. Dans le point P les formules (13) deviennent

$$(13') \qquad B^{i'}_{ab}\pi^a = 0$$

— les équations de définition du sous-groupe stationnaire H de point P. Si la distribution D_p est involutive, en utilisant (12_0), la condition d'involutivité $d\theta^{i'} (\mathrm{mod}\, \theta^{j'}) = 0$ nous donne

$$(14) \qquad B^{i'}_{bc} - A^{i'}_{bc} + A^{i'}_{cb} = 0.$$

Si D_p est générique, les coefficients $A^{i'}_{bc}$ sont arbitraires.

En effectuant un changement convenable du corepère sur G, les relations (13′) deviennent

$$(13'') \qquad \pi^{a'} = 0, \quad a' = n+1, \ldots, n+r \quad (r' \leq \gamma),$$

ce qui conduit aux suivantes équations de la prolongation de la

$$(15) \qquad \theta^{a'} = \omega^{a'} - A^{a'}_b \omega^b = 0, \quad \theta^{s_1} = dJ^{s_1} - B^{s_1}_a \omega^a = 0.$$

Si la D_p est involutive, les formules (14) établissent certaines relations entre les coefficients $A^{a'}_b$ et $B^{s_1}_a$. On suit une nouvelle application de l'algorythme de Cartan aux équations (15), etc. Cet algorythme nous conduit à la détermination d'une suite de groupes $H, H^1, \ldots$, où H est un sous-groupe de G, H^1 de G^1 etc.; plus précisément, les inclusions sont mises en évidence par le suivant schéma:

$$(16) \qquad \begin{array}{ccccc} G & & G^1 = G \,\&\, A_1 & & G^2 = G^1 \,\&\, A_2 \\ \cup & & \cup & & \cup \\ H & & H \,\&\, A_1 & & H^1 \,\&\, A_2 \\ & & \cup & & \cup \\ & & H^1 & & H^2 \\ & & \cup & & \cup \\ H & \supset & H^1_1 & \supset & H^2_1 \end{array}$$

La dernière suite se réfère séparément à la considération des équations (15_2).

En général, l'algorythme de Cartan poursuit à l'infini, mais pour une caractérisation de la distribution, précisément de la variété intégrale V_p il est suffisant de poursuivre le processus jusqu'à l'épuisement ou jusqu'à la stabilisation des paramètres du groupe G^1, puisque deux sections successives $V_n \to B \to B^1$ déterminent une connexion linéaire de la variété V_n; en passant à la restriction sur V_p, on obtient une connexion invariante de la V_p ou une classe de telles connexions (si lesparamètres de G^1 ne peuvent pas être épuisés).

En tenant compte que les équations initiales (9) de la distribution ont une signification globale, tandis que la M. R. M. est un algorythme algébrique, il s'ensuit que les invariants de divers ordres de la variété intégrale sont des fonctions définies globalement sur V_p.

Les problèmes fondamentaux d'applications et de déformations des sous-variétés plongées dans une variété douée d'une G-structure sont évidemment liés à la suite $H, H^1, \ldots$ des sous-groupes et à la suite $J^{s_1}, J^{s_2}, \ldots$ des invariants; on pourrait énoncer des théorèmes fondamentaux analogues à celles de Cartan [2] avec la spécification qu'ils auront un caractère global.

Cas particulier. Si V_n est un espace homogène G/H^0 à groupe fondamental G, la M. R. M. nous conduit alors à la suite de sous-groupes de G: $G \supset H^0 \supset H^1 \supset \cdots \supset H^s$. Si $H^s = e$, on a un repère canonique, mais si $H^s \neq e$, V_p est elle-même un espace homogène à groupe fondamental g — certain sous-groupe de G. Si V_n est un espace où opère un pseudogroupe Lie infini, on obtient les résultats de [4].

§ 3

Dans ce paragraphe nous montrerons comment s'étendent les diverses variantes de la M. R. M. à l'étude des distributions $D_p \subset V_n$ douée d'une G-structure.

1) La méthode de M. G. Laptev [9, 10]. Soit une distribution involutive (9) définie globalement sur V_n' d'un D_n^1-structure (§ 1); la différentielle extérieure de (9), en tenant compte des équations de structure (9) devient

$$d\theta^{i'} = \theta^{j'} \wedge (\omega_{j'}^{i'} = A_b^{i'} \omega_{j'}^b) + \omega^a \wedge \Delta A_a^{i'} \tag{17}$$

où

$$\Delta A_a^{i'} = dA_a^{i'} + \omega_a^{i'} + \omega_{j'}^{i'} A_a^{j'} - \omega_a^b A_b^{i'} - A_b^{i'} \omega_{j'}^b A_a^{j'}. \tag{18}$$

La condition d'involutivité de la distribution s'exprime ainsi:

$$\Delta A_a^{i'} = A_{ab}^{i'} \omega^b + A_{aj'}^{i'} \theta^{j'} \tag{19}$$

avec

$$A_{ab}^{i'} = A_{ba}^{i'}; \tag{19'}$$

cette dernière condition n'a pas lieu si D_p est quelconque. Les formules (19) montrent l'important fait que le système (9) est prolongeable régulièrement par rapport aux formes ω^a $(\mathrm{mod}\, \theta^{i'})$ [9]. En procédant de la même manière avec le système (19), on arrive à

$$\Delta A_{b_1 b_2}^{i'} = A_{b_1 b_2 b_3}^{i'} \omega b_3 (\mathrm{mod}\ \theta^{i'}) \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \Delta A_{b_1 b_2}^{i'} = {} & dA_{b_1 b_2}^{i'} + \omega_{b_1 b_2}^{i'} + \omega_{b_1 j'}^{i'} A_{b_2}^{j'} + \omega_{j'}^{i'} A_{b_1 b_2}^{j'} + A_{b_1}^{j'} (\omega_{j' b_2}^{i'} + \omega_{j' h'}^{i'} A_{b_2}^{h'}) - A_{ab_2}^{i'} \omega_{b_1}^a \\ & - A_{ab_2}^{i'} A_{q_1}^{j'} \omega_{j'}^a - A_a^{i'} \omega_{j_1}^a A_{b_1 b_2}^{j'} - A_{b_1 a}^{i'} (\omega_{b_2}^a + \omega_{h_1}^a A_{b_2}^{h_1}) - A_a^{i'} (\omega_{b_1 b_2}^a + \omega_{b_1 h'}^a A_{b_2}^{h'}) \\ & - A_a^{i'} (\omega_{j' b_2}^a + \omega_{i' h'}^a A_{b_2}^{h'}) A_{b_1}^{j'}. \end{aligned} \tag{21}$$

Les prolongements successifs d'ordre supérieur seront

$$\Delta A_{b_1 \ldots b_s}^{i'} = A_{b_1 \ldots b_s b_{s+1}}^{i'} \omega^{b_{s+1}} (\mathrm{mod}\ \theta^{i'}) \tag{22}$$

où

$$\Delta A_{b_1 \ldots b_s}^{i'} = dA_{b_1 \ldots b_s}^{i'} + \omega_{b_1 \ldots b_s}^{i'} + \cdots \tag{23}$$

Si l'on considère la formule (18) $(\mathrm{mod}\, \omega^I)$ on obtient

$$\delta A_a^{i'} + \bar{\omega}_a^{i'} + \bar{\omega}_{j'}^{i'} A_a^{j'} - A_a^{j'} \omega_{j'}^b A_b^{i'} = 0 \tag{24}$$

— précisément la représentation du groupe D_n^1 sur la variété grassmannienne V_{Q_1} de p-plans qui appartient à $E = T_x (x \in V_n)$. De (24) on voit que cette représentation est localement projective; si l'objet $(A_b^{i'})$ est précisé, alors les relations (24) correspondantes sont les équations du sous-groupe stationnaire $G_1 \subset D_n^1$ de cet objet. On en déduit une interprétation pour (18): sur V_p on construit l'EF: $\mathcal{E} = E(V_p, D_n^1, V_{G_1})$ du groupe structural D_n^1, la fibre type étant la variété grassmannienne des p-plans de l'espace E. En ce qui concerne les formules (20) (mod ω^i), c'est-à-dire $\Delta A_{b_1 q_2}^{i'}$ (mod ω^i) $=0$, elles nous donnent la représentation du groupe $D_n^2 = D_n^1 \& A_1$ [6] sur la variété grassmanniene V_{G_2} des p-plans de l'espace $E' = T_{u'}(u' \in V_n^1)$; les équations (20) ont donc comme interprétation: on construit sur V_p l'EF: $\mathcal{E}^1$-$E(V_p, D_n^2, V_{G_2})$ etc. Par conséquent, pour l'étude de la géométrie différentielle d'une distribution $D_p \subset V_h$ on associe une suite de l'EF $\mathcal{E}, \mathcal{E}^1, \ldots$ ayant la même base V_p, les groupes structuraux $D_n^1, D_n^2, \ldots$ et les fibres type — les variétés grassmanniennes des p-plans, dans les espaces $E, E^1, \ldots$ Nous avons désigné par $G_1, G_2, \ldots$ les sous-groupes stationnaires des objets grassmanniens correspondants, l'étude desquels nous la ferons dans une Note prochaine.

2) Sur la méthode du repérage et d'autres variantes [3, 5, 6]. Dans les problèmes concrets sur les distributions D_p soumises aux conditions supplémentaires, par exemple, si D_p contient une sous-distribution $D_q \subset D_p \subset V_n$, ces conditions nous conduisent, en général, à la restriction du groupe structural, à un de ses sous-groupes $\bar{G} \subset G$; si $\bar{G}$ est donné par

$$\pi^{\bar{a}} = 0 \tag{25}$$

l'ensemble de paramètres u^a de G peut être décomposé en deux sous-ensembles $(u^{\bar{a}}, u^{a'})$ qui entraîne la décomposition suivante

$$\pi^a = A^a_{\bar{a}} \pi^{\bar{a}} + A^a_{a'} \pi^{a'}. \tag{26}$$

L'idée maîtresse de la méthode du repérage consiste dans la considération de la représentation du groupe $\bar{G}$ (au lieu de G) dans l'espace V_{G_1}. Pour cela, dans le système (13), en tenant compte de (26), s'opère la décomposition

$$\delta A_b^{i'} + B_{ab}^{i'} A^a_{\bar{a}} \pi^{\bar{a}} + B_{ab}^{i'} A^a_{a_1} \pi^{a'} = 0. \tag{27}$$

L'application partielle de l'algorythme de Cartan se passe de la manière suivante: on laisse $\pi^{\bar{a}}$ arbitraires et on donne des valeurs constantes aux $A_b^{i'}$ jusqu'à l'épuisement des paramètres du groupe $\bar{G}$ qui entrent dans (27); le processus continue de la même manière.

La forme des relations (27) suggère une autre possibilité: de maintenir $\pi^{a'}$ et de déterminer $\pi^{\bar{a}}$ qui entrent dans (27) en donnant des valeurs constantes aux $A_b^{i'}$; le processus continue jusqu'à l'épuisement des paramètres $u^{\bar{a}}$ — système complet des intégrales primes de (25).

Avant de passer à l'application relative de cette dernière variante, je me permets d'attirer l'attention qu'il n'est pas recommandable d'absolutiser une des variantes — pour un problème concret on applique la variante propice; de plus, le choix des coefficients $A_b^{i'}$, $A_{b_1 b_2}^{i'}$, auquels on donne des valeurs constantes, doit être fait selon les besoins du problème.

Application. On sait que les coefficients T^i_{jk} des équations (2) sont les composantes d'un tenseur; elles vérifient les conditions d'immobilité suivantes [6]:

$$\delta T^i_{jk} + \overline{\omega}^i_h T^h_{jk} - \overline{\omega}^h_j T^i_{hk} - \overline{\omega}^h_k T^i_{jk} = 0. \tag{28}$$

Pour la détermination de l'invariant J de la G-structure, en utilisant (4), (28) deviennent

$$\delta T^i_{jk} + B^i_{jk\overline{a}} \overline{\overline{\omega}}^{\overline{a}} + B^i_{jka} \overline{\omega}^a = 0, \tag{29}$$

où $B^i_{jka} = C^i_{ah} T^h_{jk} - C^h_{aj} T^i_{hk} - C^h_{ak} T^i_{jh}$.

Si $u^{\overline{a}}$ est un système complet des intégrales premières des équations $\overline{\pi}^a = 0$ et u^a — les paramètres du groupe G, on donne les valeurs constantes à une partie des composantes T^i_{jk} jusqu'à la détermination de tous les $u^{\overline{a}}$; alors (29) deviennent

$$\delta \tau^i_{jk} + B^i_{jka} \pi^a = 0 \tag{30}$$

où $\tau^i_{jk}(x^h, u^a)$ sont les composantes (une partie desquelles ont les valeurs données) de l'invariant cherché.

Bien entendu qu'on peut choisir les T^i_{jk} auxquels on donne les valeurs constantes appartenant à certain sous-ensemble, par exemple (T^a_{bc}), $a, b, c = 1, \ldots, p$. Le principal est que ce sous-ensemble doit former un sous-objet, ou l'on doit l'encadrer dans un tel sous-ensemble, c'est-à-dire de déterminer un sous-groupe de G ôu de H, $H^1, \ldots$

Si les composantes τ^i_{jk} de l'invariant J dépendent des paramètres u^a du groupe G (c'est ce qui a lieu en général), en appliquant alors en continuation l'algorythme de Cartan aux équations (30), on arrive à l'épuisement des paramètres u^a qui entrent dans (30); une partie des τ^i_{jk} auront les valeurs constantes et le reste J^{s_1} seront seulement des fonctions de x^i.

Ceux-ci (J^{s_1}) seront précisément les invariants de la variété V_n par rapport au groupe structural G. En écrivant les formules analogues aux (15_2), c'est-à-dire $dJ^{s_1} - B^{s_1}_i \omega^i = 0$, on pourrait continuer le processus de la détermination des invariants $J^{s_2}, \ldots$, d'ordres supérieurs de la V_n par rapport à G; le processus s'arrête évidemment après l'épuisement ou la stabilisation des paramètres u^a du groupe.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartan, E. La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile. Bull. Sc. math., **34**, 1910, 250—284.
2. Cartan, E. La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle. Paris, Gauthier-Villars. 1937.
3. Chtcherbakov, R. N. Sur la méthode du réperage des variétés. Recueil géométrique, Université de Tomsk, **3**, 1963, 5—11.
4. Gheorghiev, Gh. Observaţii asupra metodei reperului mobil. An. şt. Univ. Iaşi, s. n. XII, 1966, 85—118.

5. Gheorghiev, Gh. et I. Popa. Sur la méthode du repérage et la théorie des variétés équiparamétriques. B. R. Acad. Sci., Paris, **263**, 1966, 911—914.
6. Gheorghiev, Gh. Sur les groupes de Lie associés aux prolongements réguliers d'une variété différentiable; application aux G-structures. C. R. Acad. Sci., Paris.
7. Gheorghiev, Ch. Sur les prolongements réguliers des espaces finis et les groupes de Lie associés. C. R. Acad., Sci., Paris.
8. Gheorghiev, Gh. Sur les représentations linéaires et projectives des groupes de Lie. Recueil géométrique d'Ukraine, Kharkov.
9. Laptev, G. F. La méthode de la théorie de groupes dans les recherches de la géométrie différentiell, Travaux du 3-ème Congrès de mathématiques de l'U. R. S. S. (1965), **2**, 409—418.
10. Laptev, G. F. La géométrie différentielle des variétés immergées. etc. Travaux de la Soc. math. de Moscou, **2**, 1953, 275, 382.
11. Ślebodziński, N. Formes extérieurs et leurs applications. II. Warszawa, 1963.
12. Vaisman, I. Une remarque sur la méthode de Cartan dans la géométrie différentielle. (Sous presse).

Reçu le 5. X. 1967

ВЪРХУ МЕТОДА НА ПОДВИЖНИЯ РЕПЕР

Георги Георгиев (Яш, Румъния)

(Резюме)

Методът на подвижния репер на Картан се отнася до диференциалногеометричното изследване на интегралните многообразия от максимален брой измерения на едно инволюторно разпределение в дадено хомогенно пространство. В настоящата работа се показва как методът на подвижния репер и на неговите различни варианти се разширява за изучаване на инволюторните или неинволюторните разпределения, които са дефинирани глобално в пространство на една G-структура.

О МЕТОДЕ ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА

Георги Георгиев (Яш, Румыния)

(Резюме)

Метод подвижного репера Картана относится к дифференциально-геометрическому исследованию интегральных многообразий максимальной размерности одного инволютивного распределения в данном однородном пространстве. В настоящей работе показывается, как метод подвижного репера и его разных вариантов расширяется для изучения инволютивных или неинволютивных распределений, определенных в целом в пространстве одной G-структуры.