БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

ТРЕХМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА, НЕСУЩИЕ ВПОЛНЕ ГОЛОНОМНУЮ 3-ТКАНЬ ЛИНИЙ КРИВИЗНЫ

Светослав Билчев

Определение. Скажем, что 3-мерная поверхность 4-мерного евклидова пространства несет вполне голономную 3-ткань линий кривизны, если через каждую точку этой поверхности проходят 3 двумерные поверхности таким образом, что любая пара линий кривизны содержится в одной из этих двумерных поверхностей.

Цель нашей работы — вывод условия полной голономности; разделение поверхностей, удовлетворяющих этому условию, на классы, исследование существования каждого класса этих поверхностей и выявление некоторых геометрических свойств.

В работе пользуемся методом внешних форм Картана и в частности теорией пфафовых систем в инволюции.

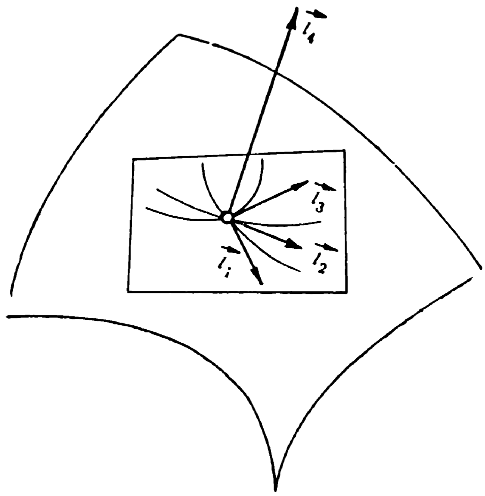
§ 1. Постановка задачи

Рассматриваем 3-мерные поверхности 4-мерного евклидова пространства. Канонизируем репер в каждой точке, так чтобы вектор $\vec{l}_4$ был перпендикулярным касательной плоскости к поверхности в этой точке, а векторы $\vec{l}_i$, $i=1, 2, 3$, направляем вдоль линий кривизны, т. е. получаем

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\omega^4=0,\\ &\omega_1^4=a\omega^1,\\ &\omega_2^4=b\omega^2,\\ &\omega_3^4=c\omega^3. \end{aligned}$$

Структурные формулы евклидова пространства

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i,\quad D\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k.$$



Фиг. 1

Дополним систему (1) ковариантами:

$$\omega^1\wedge\omega_1^4+\omega^2\wedge\omega_2^4+\omega^3\wedge\omega_3^4+\omega^4\wedge\omega_4^4=0;$$

в силу системы (1) это уравнение удовлетворяется тождественно

$$\omega_1^1\wedge\omega_1^4+\omega_1^2\wedge\omega_2^4+\omega_1^3\wedge\omega_3^4+\omega_1^4\wedge\omega_4^4=da\wedge\omega^1$$

$$+a\{\omega^1\wedge\omega_1^1+\omega^2\wedge\omega_2^1+\omega^3\wedge\omega_3^1+\omega_1^4\wedge\omega_4^1\},$$

$$\omega_2^1\wedge\omega_1^4+\omega_2^2\wedge\omega_2^4+\omega_2^3\wedge\omega_3^4+\omega_2^4\wedge\omega_4^4=db\wedge\omega^2$$

$$+b\{\omega^1\wedge\omega_1^2+\omega^2\wedge\omega_2^2+\omega^3\wedge\omega_3^2+\omega^4\wedge\omega_4^2\},$$

$$\omega_3^1\wedge\omega_1^4+\omega_3^2\wedge\omega_2^4+\omega_3^3\wedge\omega_3^4+\omega_3^4+\omega_4^3=dc\wedge\omega^3$$

$$+c\{\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3+\omega^3\wedge\omega_3^3+\omega^4\wedge\omega_4^3\}.$$

Учитывая соотношения $\omega_i^i=0$, $i=2, 2, 3, 4$ (по i нет суммирования) и $\omega_i^j=-\omega_j^i$, $i, j=1, 2, 3, 4$, и подставляя равенства (1), получаем

$$da\wedge\omega^1+(a-b)\omega_1^2\wedge\omega^2+(a-c)\omega_1^3\wedge\omega^3=0,$$

(2) $$(a-b)\omega_1^2\wedge\omega^1+db\wedge\omega^2+(b-c)\omega_2^3\wedge\omega^3=0,$$

$$(a-c)\omega_1^3\wedge\omega^1+(b-c)\omega_2^3\wedge\omega^2+dc\wedge\omega^3=0.$$

Из системы (2) по лемме Картана ([1], гл. II, § 7) следует

$$\omega^4=0,\quad \omega_1^4=a\omega^1,\quad \omega_2^4=b\omega^2,\quad \omega_3^4=c\omega^3,$$

$$da=\alpha\omega^1+\beta\omega^2+\gamma\omega^3,$$

$$db=\xi\omega^1+\mu\omega^2+\nu\omega^3,$$

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
dc &= \zeta\omega^1 + \varrho\omega^2 + \varkappa\omega^3, \\
(a-b)\omega_1^2 &= \beta\omega^1 + \xi\omega^2 + \eta\omega^3, \\
(a-c)\omega_1^3 &= \gamma\omega^1 + \eta\omega^2 + \zeta\omega^3, \\
(b-c)\omega_2^3 &= \eta\omega^1 + \nu\omega^2 + \varrho\omega^3.
\end{aligned}
$$

Дальше допустим:

а) что через каждую точку проходит двумерная поверхность, касающаяся плоскости, натянутой на векторы $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$, т. е. уравнение этой поверхности будет $\omega^3=0$, пишем ковариант

$$
\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 + \underbrace{\omega^3 \wedge \omega_3^3}_{0} + \underbrace{\omega^4 \wedge \omega_4^3}_{0} = 0,
$$

или

$$
\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0,
$$

и по лемме Картана получаем

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
\omega_1^3 &= A\omega^1 + B\omega^2, \\
\omega_2^3 &= B\omega^1 + C\omega^2;
\end{aligned}
$$

б) что через каждую точку проходит двумерная поверхность, касающаяся плоскости, натянутой на векторы $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_3$, т. е. следует $\omega^2=0$, пишем ковариант и по лемме Картана следует

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
\omega_1^2 &= K\omega^1 + E\omega^3, \\
\omega_2^3 &= -E\omega^1 + F\omega^3;
\end{aligned}
$$

в) что через каждую точку проходит двумерная поверхность, касающаяся плоскости, натянутой на векторы $\vec{l}_2$ и $\vec{l}_3$; получаем аналогично

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
\omega_1^2 &= G\omega^2 + H\omega^3, \\
\omega_1^3 &= H\omega^2 + I\omega^3.
\end{aligned}
$$

Уравнения (4), (5), (6) дают нам условие полной голономности:

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
&\omega_1^3\big|_{\omega^3=0} = A\omega^1 + B\omega^2, \quad \omega_1^2\big|_{\omega^2=0} = K\omega^1 + E\omega^3, \quad \omega_1^2\big|_{\omega^1=0} = G\omega^2 + H\omega^3, \\
&\omega_2^3\big|_{\omega^3=0} = B\omega^1 + C\omega^2, \quad \omega_2^3\big|_{\omega^2=0} = -E\omega^1 + F\omega^3, \quad \omega_1^3\big|_{\omega^1=0} = H\omega^2 + I\omega^3,
\end{aligned}
$$

где $A, B, C, K, E, F, G, H, I$ — произвольные коэффициенты.

Будем рассматривать 3 класса поверхностей:

I класс — для которых все a, b, c различны;

II класс — для которых $a=c\neq b$ (аналогично рассматриваются случаи $a=b\neq c$, $b=c\neq a$);

III класс — для которых $a=b=c$.

§ 2. Поверхности I класса — a, b, c различны

Удовлетворения условия полной голономности для системы (3) дает

$$\omega_1^3\big|_{\omega^3=0}=\frac{1}{a-c}\gamma\omega^1+\frac{1}{a-c}\eta\omega^2, \qquad \omega_2^3\big|_{\omega^3=0}=\frac{1}{b-c}\eta\omega^1+\frac{1}{b-c}\nu\omega^2,$$

т. е. следует

$$\frac{1}{a-c}\eta=\frac{1}{b-c}\eta;$$

$$\omega_1^2\big|_{\omega^2=0}=\frac{1}{a-b}\beta\omega^1+\frac{1}{a-b}\eta\omega^3, \qquad \omega_2^3\big|_{\omega^2=0}=\frac{1}{b-c}\eta\omega^1+\frac{1}{b-c}\varrho\omega^3,$$

т. е. следует

$$\frac{1}{a-b}\eta=-\frac{1}{b-c}\eta;$$

$$\omega_1^2\big|_{\omega^1=0}=\frac{1}{a-b}\zeta\omega^2+\frac{1}{a-b}\eta\omega^3, \qquad \omega_1^3\big|_{\omega^1=0}=\frac{1}{a-c}\eta\omega^2+\frac{1}{a-c}\zeta\omega^3,$$

т. е. следует

$$\frac{1}{a-b}\eta=\frac{1}{a-c}\eta.$$

Из полученных уравнений следует

$$\eta(b-a)=0, \quad \eta(a-c)=0, \quad \eta(b-c)=0;$$

но $a\neq b\neq c$, $a\neq c$, т. е. эти уравнения удовлетворяются тогда и только тогда, когда $\eta=0$. Вносим это значение в систему (3) и получаем систему, которая после изменения обозначения

$$\left(\frac{\beta}{a-b}\to\beta, \quad \frac{\xi}{a-b}\to\xi, \quad \frac{\gamma}{a-c}\to\gamma, \quad \frac{\zeta}{a-c}\to\zeta, \quad \frac{\nu}{b-c}\to\nu, \quad \frac{\varrho}{b-c}\to\varrho\right)$$

примет вид

$$\begin{aligned}
&\omega^4=0, \quad \omega_1^4=a\omega^1, \quad \omega_2^4=b\omega^2, \quad \omega_3^4=c\omega^3;\\
&da=a\omega^1+(a-b)\beta\omega^2+(a-c)\gamma\omega^3,\\
&db=(a-b)\xi\omega^1+\mu\omega^2+(b-c)\nu\omega^3,\\
(8)\qquad &dc=(a-c)\zeta\omega^1+(b-c)\varrho\omega^2+\varkappa\omega^3,\\
&\omega_1^2=\beta\omega^1+\xi\omega^2,\\
&\omega_1^3=\gamma\omega^1+\zeta\omega^3,\\
&\omega_2^3=\nu\omega^2+\varrho\omega^3.
\end{aligned}$$

Система (8) удовлетворяет условие (7). Дополним эту систему ковариантами последних шести уравнений. Будем исследовать вопрос о существовании интегрального многообразия $\mathfrak{M}_3$ этой системы. Подставляем уравнения системы (8) в полученную систему из ковариантов последних шести уравнений (8), группируем и получаем систему

$$d\alpha\wedge\omega^1+(a-b)d\beta\wedge\omega^2+(a-c)d\gamma\wedge\omega^3+2a\beta\omega^1\wedge\omega^2+2a\gamma\omega^1\wedge\omega^3$$
$$+\{\beta\nu(a-c)+\beta\gamma(c-b)+\varrho\gamma(a-b)\}\omega^2\wedge\omega^3=0,$$
$$(a-b)d\xi\wedge\omega^1+d\mu\wedge\omega^2+(b-c)d\nu\wedge\omega^3+2\mu\xi\omega^1\wedge\omega^2$$
$$+\{(a-c)\nu\xi+(c-b)\gamma\xi+\nu\zeta(b-a)\}\omega^1\wedge\omega^3+2\mu\nu\omega^2\wedge\omega^3=0,$$
$$(a-c)d\zeta\wedge\omega^1+(b-c)d\varrho\wedge\omega^2+d\varkappa\wedge\omega^3+\{\varrho\zeta(b-a)+\beta\zeta(b-c)$$
$$+\xi\varrho(a-c)\}\omega^1\wedge\omega^2+2\varkappa\zeta\omega^1\wedge\omega^3+2\varkappa\varrho\omega^2\wedge\omega^3=0,$$
$$\text{(9)}\qquad d\beta\wedge\omega^1+d\xi\wedge\omega^2+\{\beta^2+\xi^2+ab+\gamma\nu\}\omega^1\wedge\omega^2+(\gamma\varrho+\gamma\beta)\omega^1\wedge\omega^3$$
$$+(\xi\nu-\zeta\nu)\omega^2\wedge\omega^3=0,$$
$$d\gamma\wedge\omega^1+d\zeta\wedge\omega^3+(\gamma\beta+\beta\nu)\omega^1\wedge\omega^2+\{\gamma^2+\zeta^2+ac-\beta\varrho\}\omega^1\wedge\omega^3$$
$$+(\zeta\varrho-\xi\varrho)\omega^2\wedge\omega^3=0,$$
$$d\gamma\wedge\omega^2+d\varrho\wedge\omega^3+(\nu\xi-\gamma\xi)\omega^1\wedge\omega^2+(\beta\zeta+\varrho\zeta)\omega^1\wedge\omega^3$$
$$+\{\nu^2+\varrho^2+bc+\zeta\xi\}\omega^2\wedge\omega^3=0.$$

Обозначим и

$$da=\tilde\omega_1,\quad d\beta=\tilde\omega_2,\quad d\gamma=\tilde\omega_3,\quad d\xi=\tilde\omega_4,$$
$$d\mu=\tilde\omega_5,\quad d\varkappa=\tilde\omega_6,\quad d\nu=\tilde\omega_7,\quad d\zeta=\tilde\omega_8,\quad d\varrho=\tilde\omega_9.$$

Будем высекать ([1], гл. VIII, § 3) по формам базиса $[y_1, y_2, y_3]$, где

$$y_1=\omega^1,\quad y_2=\omega^2,\quad y_3=\omega^1+\omega^2+\omega^3,$$
$$y_1\wedge y_2\wedge y_3=\omega^1\wedge\omega^2\wedge(\omega^1+\omega^2+\omega^3)=0+0+\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\neq0.$$

Полагаем

$$\tilde\omega_g=l_{g1}\omega^1+l_{g2}\omega^2+l_{g3}(\omega^1+\omega^2+\omega^3),\quad g=1, 2, \ldots, 9.$$

Для высечения элемента $\mathcal{E}_1$ полагаем $y_3=y_2=0$, т. е. $\omega^2=\omega^1+\omega^2+\omega^3=0$ или $\omega^2=0$, $\omega^3=\omega^{-1}$ и $\tilde\omega_g=l_{g1}\omega^1$, $g=1, 2, \ldots, 9$. Подстановка этих уравнений в систему (9) удовлетворяет ее автоматически, т. е. все коэффциенты l_{g1} — параметрические. Даем им произвольные, но вполне определенные значения l^0_{g1} и получаем первый элемент цепи — $\mathcal{E}^0_1$, т. е. произвол $r_1=q$. Чтобы построить $\mathcal{E}_2$, полагаем $\omega^1+\omega^2+\omega^3=y_3=0$, т. е. имеем

$$\tilde\omega_g=l^0_{g1}\omega^1+l_{g2}\omega^2,\quad g=1, 2, \ldots, 9,\quad \omega^2=-\omega^1-\omega^2,$$

потому что $\mathcal{E}_2$ должен проходить через $\mathcal{E}^0_1$. Вносим эти выражения в систему (9). Получаем

$$\text{(10)}\qquad \Delta_i\omega^1\wedge\omega^2=0,\quad i=1, 2, \ldots, 6,$$

где

$$\Delta_1=-l_{12}+(a-b)l^0_{21}+(a-c)l_{32}-(a-c)l^0_{31}+2a\beta=2a\gamma+\beta\nu(a-c)$$

$$+\beta\gamma(c-b)+\varrho\gamma(a-b),$$

$$\Delta_2=-(a-b)l_{42}+l^0_{51}+(b-c)l_{72}-(b-c)l^0_{71}+2\mu\xi+(c-a)\nu\xi$$

$$+(b-c)\gamma\xi+(a-b)\nu\zeta+2\mu\nu,$$

$$\Delta_3=-(a-c)l_{82}+(b-c)l^0_{91}+l_{62}-l^0_{61}+\varrho\zeta(b-a)+\beta\zeta(b-c)$$

$$+\xi\varrho(a-c)-2\varkappa\zeta+2\varkappa\varrho,$$

$$\Delta_4=-l_{22}+l^0_{41}+\beta^2+\xi^2+ab+\gamma\nu-\gamma\varrho-\gamma\beta+\xi\nu-\zeta\nu,$$

$$\Delta_5=-l_{32}+l_{82}-l^0_{81}+\gamma\beta-\beta\nu-\gamma^2-\zeta^2-ac+\beta\varrho+\zeta\varrho+\xi\varrho,$$

$$\Delta_6=l^0_{71}+l_{92}-l^0_{91}+\nu\xi-\gamma\xi-\beta\zeta-\varrho\zeta+\nu^2+\varrho^2+bc+\xi\zeta.$$

Но ω^1 и ω^2 независимые формы, т. е. $\omega^1\wedge\omega^2\neq 0$ или следует $\Delta_i=0$, $i=1, 2, \ldots, 6$. Отсюда выражаем l_{12}, l_{72}, l_{22}, l_{92}, l_{82}, l_{62} через остальные коэффициенты -- остаются параметрические l_{32}, l_{42}, l_{52}. Даем им произвольные, но вполне определенные значения l^0_{32}, l^0_{42}, l^0_{52}, т. е. произвол $r_2=3$, получаем $\mathcal{E}_2$. Высекаем элемент $\mathcal{E}_3$:

$$\tilde{\omega}_g=l^0_{g1}\omega^1+l_{g2}\omega^2+l_{g3}(\omega^1+\omega^2+\omega^3)=(l^0_{g1}+l_{g3})\omega^1+(l_{g2}+l_{g3})\omega^2+l_{g3}\omega^3,$$

где

$$l_{i2}=l^0_{i2},\ i=3, 4, 5,\quad l_{j2}=l'_{j2}(l^0_{j1}, l^0_{i2}),\quad j=1, 2, 6, 7, 8, 9.$$

Подставляем выражения $\tilde{\omega}_g$ $(g=1, 2, \ldots, 9)$ в систему (9). Получаем систему

$$\Delta_{i12}\omega^1\wedge\omega^2+\Delta_{i13}\omega^1\wedge\omega^3+\Delta_{i23}\omega^2\wedge\omega^3=0,\quad i=1, 2, \ldots, 6,$$

где

(11) $\Delta_{112}=-l'_{12}-l_{13}+(a-b)l^0_{21}+(a-b)l_{23}+2a\beta,$

(12) $\Delta_{113}=-l_{13}+(a-c)l^0_{31}+(a-c)l_{33}+2a\gamma,$

(13) $\Delta_{123}=-(a-b)l_{23}+(a-c)l^0_{32}+(a-c)l_{33}+\beta\nu(a-c)+\beta\gamma(c-b)+\varrho\gamma(a-b),$

(14) $\Delta_{212}=-(a-b)l^0_{42}-(a-b)l_{43}+l^0_{51}+l_{53}+2\mu\xi,$

(15) $\Delta_{213}=-(a-b)l_{43}+(b-c)l^0_{71}+(b-c)l_{73}+(a-c)\nu\xi+(c-b)\gamma\xi+\nu\zeta(b-a),$

(16) $\Delta_{223}=-l_{53}+(b-c)l'_{72}+(b-c)l_{73}+2\mu\nu,$

(17) $\Delta_{312}=-(a-c)l'_{82}-(a-c)l_{83}+(b-c)l^0_{91}+(b-c)l_{93}+\varrho\zeta(b-a)+\beta\zeta(b-c)$
$+\xi\varrho(a-c),$

(18) $\Delta_{313}=-(a-c)l_{83}+l^0_{61}+l_{63}+2\varkappa\zeta,$

(19) $\Delta_{323}=-(b-c)l_{93}+l'_{62}+l_{63}+2\varkappa\varrho,$

(20) $\Delta_{412}=-l'_{22}-l_{23}+l^0_{41}+l_{43}+\beta^2+\xi^2+ab+\gamma\nu,$

(21) $$\Delta_{413}=-l_{23}+\gamma\varrho+\gamma\beta,$$

(22) $$\Delta_{423}=-l_{43}+\xi\nu-\zeta\nu,$$

(23) $$\Delta_{512}=-l^0_{32}-l_{33}+\gamma\beta-\beta\nu,$$

(24) $$\Delta_{513}=-l_{33}+l^0_{81}+l'_{82}+\gamma^2+\zeta^2+ac-\beta\varrho,$$

(25) $$\Delta_{523}=l'_{82}+l_{83}+\zeta\varrho-\xi\varrho,$$

(26) $$\Delta_{612}=l^0_{71}+l_{73}+\nu\xi-\gamma\xi,$$

(27) $$\varphi_{613}=l^0_{91}+l_{93}+\beta\zeta+\varrho\zeta.$$

(28) $$\Delta_{623}=-l_{73}+l'_{92}+l_{93}+\nu^2+\varrho^2+bc+\xi\zeta.$$

Из уравнений (21), (22), (23), (25), (26), (27), (11), (14), (18) выражаем соответно l_{23}, l_{43}, l_{33}, l_{83}, l_{73}, l_{93}, l_{13}, l_{53}, l_{63} через l^0_{g1}, $g=1, 2, \ldots, 9$; l^0_{i2}, $i=3, 4, 5$; l'_{j2}, $j=1, 2, 6, 7, 8, 9$. Тождественность уравнений (12), (13), (15), (16), (17), (19), (20), (24), (28) в силу полученных значений коэффициентов проверяется несложно. Следовательно, $r_3=0$, т. е. все уравнения удовлетворяются тождественно. Или мы получили, что все коэффициенты l_{g3}, $g=1, 2, \ldots, 9$, выразились через геометрические коэффициенты l^0_{g1}, $g=1, 2, \ldots, 9$; l^0_{i2}, $i=3, 4, 5$, а они остаются произвольными, т. е. произвол предшествующих параметрических l^0_{g1} и l^0_{i2} ничем не стеснен и по теореме Кэлера (II) ([1], гл. VIII, § 6) следует, что цепь регулярна, система — в инволюции, и интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ существует с произволом трех функций двух переменных, так как $r_1=9$, $r_2=3$, $r_3=0$, или характеры

$$s=9,$$
$$s_1=r_1-r_2=9-3=6,$$
$$s_2=r_2-r_3=3-0=3,$$
$$s_3=r_3=0.$$

§ 3. Поверхности II класса — $a=c\neq b$

Из системы (3) ввиду независимости форм ω^1, ω^2 и ω^3 получаем

$$\gamma=\eta=\zeta=0,\quad a=\zeta,\quad \beta=\varrho,\quad \gamma=\varkappa,$$

т. е.

$$\gamma=\varkappa=\eta=a=\zeta=0,\quad \beta=\varrho.$$

Таким образом система (3) переходит в систему

$$\omega^4=0,\quad \omega^4_1=a\omega^1,\quad \omega^4_2=b\omega^2,\quad \omega^4_3=a\omega^3,$$
$$da=\beta\omega^2,$$
$$db=\xi\omega^1+\mu\omega^1+\mu\omega^2+\nu\omega^3,$$

$$(a-b)\omega_1^2=\beta\omega^1+\xi\omega^2,$$
$$(b-a)\omega_2^3=\gamma\omega^2+\beta\omega^3.$$

Меняем обозначения:

$$\frac{1}{a-b}\beta=\alpha,\quad \frac{1}{a-b}\xi=\beta,\quad \frac{1}{b-a}\nu=\gamma,\quad \frac{1}{a-b}\mu=\varkappa,$$

т. е. получаем систему

$$(29)\qquad \begin{aligned} &\omega^4=0,\quad \omega_1^4=a\omega^1,\quad \omega_2^4=b\omega^2,\quad \omega_3^4=a\omega^3,\\ &da=(a-b)\alpha\omega^2,\\ &db=(a-b)[\beta\omega^1+\varkappa\omega^2-\gamma\omega^3],\\ &\omega_1^2=\alpha\omega^1+\beta\omega^2,\\ &\omega_2^3=\gamma\omega^2-\alpha\omega^3.\end{aligned}$$

Прибавляем уравнение

$$\omega_1^3=u\omega^1+v\omega^2+w\omega^3.$$

Требования удовлетворения условий полной голономности дает

$$\omega_1^3\big|_{\omega^3=0}=u\omega^1+v\omega^2,\quad \omega_2^3\big|_{\omega^3=0}=0\,.\,\omega^1+\gamma\omega^2,$$

т. е. $v=0$;

$$\omega_1^2\big|_{\omega^1=0}=\beta\omega^2+0\,.\,\omega^3,\quad \omega_1^3\big|_{\omega^1=0}=v\omega^2+w\omega^3,$$

т. е. $v=0$;

$$\omega_1^2\big|_{\omega^2=0}=\alpha\omega^1+0\,.\,\omega^3,\quad \omega_2^3\big|_{\omega^2=0}=-0\,.\,\omega^1-\alpha\omega^3$$

т. е. выполнено.

Или система

$$(30)\qquad \begin{aligned} &\omega^4=0,\quad \omega_1^4=a\omega^1,\quad \omega_2^4=b\omega^2,\quad \omega_3^4=a\omega^3\\ &da=(a-b)\alpha\omega^2,\\ &db=(a-b)[\beta\omega^1+\varkappa\omega^2-\gamma\omega^3],\\ &\omega_1^2=\alpha\omega^1+\beta\omega^2,\\ &\omega_1^3=u\omega^1+w\omega^3,\\ &\omega_2^3=\gamma\omega^2-\alpha\omega^3\end{aligned}$$

удовлетворяет условие полной голономности.

Будем исследовать вопрос о существовании интегрального многообразия $\mathfrak{M}_3$ системы (30). Высекаем цепь по формам базиса $[\omega^1, \omega^2, \omega^3]$, т. е. ищем интегральное многообразие, на котором выполняется $\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\neq 0$.

Система ковариантов $D\Theta_s=0$, $s=1, 2, \ldots, 8$, где

$$\Theta_1=\omega_1^4-a\omega^1,\qquad \Theta_5=\omega_1^3-u\omega^1-w\omega^3,$$
$$\Theta_2=\omega_2^4-b\omega^2,\qquad \Theta_6=\omega_2^3-\gamma\omega^2+\alpha\omega^3,$$

$$\Theta_3 = \omega_3^4 - a\omega^3, \qquad \Theta_7 = da - (a-b)a\omega^2,$$

$$\Theta_4 = \omega_1^2 - a\omega^1 - \beta\omega^2, \qquad \Theta_8 = db - (a-b)[\beta\omega^1 + \varkappa\omega^2 - \gamma\omega^3],$$

имеет $g=6$ независимых форм

$$\widetilde{\omega}_g: \ da, \ d\beta, \ d\gamma, \ d\varkappa, \ du, \ dw, \quad g=1, \ 2, \dots, 6.$$

Мы увидим ниже, что число независимых квадратичных уравнений $s_1 = s$ и так как $g = s_1 + s_2 + s_3$, следует $s_2 = 1$, $s_3 = 0$, ибо при невозрастающих характеров, если $s_2 = 0$, следует $s_3 = 0$, или

$$s_1 + s_2 + s_3 = 5 + 0 + 0 = 5 \neq q = 6,$$

т. е.

$$s_1 = 5, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 0.$$

Тогда число Картана Q равняется

$$Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 5 + 2 . 1 + 3 . 0 = 7.$$

Продифференцируя систему (30) и подставляя формы ω_1^2, ω_1^3, ω_2^3, da, db, получаем

$$d\omega^2 = 0,$$

$$(31) \quad \begin{aligned} & d\beta \wedge \omega^1 + d\varkappa \wedge \omega^2 - d\gamma \wedge \omega^3 + \beta\varkappa\omega^1 \wedge \omega^2 + (\beta u - \gamma w)\omega^1 \wedge \omega^3 + \gamma\varkappa\omega^2 \wedge \omega^3 = 0, \\ & d\alpha \wedge \omega^1 + d\beta \wedge \omega^2 + (ab + \gamma u + a^2 + \beta^2)\omega^1 \wedge \omega^2 + (\beta\gamma - \gamma u)\omega^2 \wedge \omega^3 = 0, \\ & d\gamma \wedge \omega^2 - da \wedge \omega^3 + (\beta\gamma - \beta u)\omega^1 \wedge \omega^2 + (ab - \beta w + a^2 + \gamma^2)\omega^2 \wedge \omega^3 = 0 \\ & du \wedge \omega^1 + dw \wedge \omega^3 + (au - a\gamma)\omega^1 \wedge \omega^2 + (a^2 + \alpha^2 + u^2 + \omega^2)\omega^1 \wedge \omega^3 \\ & \qquad + (a\beta - \alpha\omega)\omega^2 \wedge \omega^3 = 0. \end{aligned}$$

Пусть

$$da = A\omega^2, \quad d\beta = A_1\omega^1 + A_2\omega^2 + A_3\omega^3,$$

$$d\gamma = B_2\omega^1 + B_2\omega^2 + B_3\omega^3, \quad d\varkappa = C_1\omega^1 + C_2\omega^2 + C_3\omega^3,$$

$$du = E_1\omega^1 + E_2\omega^2 + E_3\omega^3, \quad dw = F_1\omega^1 + F_2\omega^2 + F_3\omega^3.$$

Подставляем эти равенства в систему (31). Пользуясь независимостью базисных форм, т. е. $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$, получаем

$$-A_2 + C_1 + \beta\varkappa = 0, \quad B_1 + \beta\gamma - \beta n = 0,$$

$$-A_3 - B_1 + \beta u - \gamma\omega = 0, \quad -B_3 - A + ab + \beta\omega + a_2 + \gamma^2 = 0,$$

$$-C_3 - B_2 + \gamma\varkappa = 0, \quad -E_2 + au - a\gamma = 0,$$

$$-A + A_1 + ab + \gamma u + a^2 + \beta^2 = 0, \quad -E_3 + F_1 + a^2 + \alpha^2 + u^2 + \omega^2 = 0,$$

$$-A_3 + \beta\gamma - \gamma u = 0, \quad E_2 + a\beta - a\omega = 0.$$

Если $A_2 = B$, $B_2 = C$, $C_2 = K$, $E_2 = E$, $F_2 = F$, $F_3 = H$, то

$$da = A\omega^2,$$

$$d\beta = [A - (ab + \gamma u + \sigma^2 + \beta^2)]\omega^1 + B\omega^2 + (\beta\gamma - \gamma u)\omega^3$$

$$d\gamma=(\beta u-\beta\gamma)\omega^1+C\omega^2+(ab+\beta\omega+\alpha^2+\gamma^2-A)\omega^3,$$
$$d\varkappa=(B-\beta\varkappa)\omega^1+K\omega^2+(-C+\gamma\varkappa)\omega^3,$$
$$du=E\omega^1+(au-a\gamma)\omega^2+(F+a^2+\alpha^2+u^2+w^2)\omega^3,$$
$$d\omega=F\omega^1+(aw-a\beta)\omega^2+H\omega^3.$$

Следовательно, наиболее общий интегральный элемент $\mathcal{E}_3$ зависит от 7 параметров: A, B, C, K, E, F, H, т. е. $N=7$. Или $N=Q=7$, т. е. число Картана совпадает с числом произвольных параметров наиболее общего интегрального элемента $\mathcal{E}_3$. Следовательно ([1], гл. VIII, § 11), цепь регулярна, система в инволюции и интегральное многообразие $\mathfrak{M}_3$ существует и зависит от одной функции двух аргументов ($s_2=1$).

Поверхности II класса являются огибающими однопараметрических семейств гиперсфер.

Действительно, в этом случае $da=(a-b)a\omega^2$ и точка

$$\vec{P}=\vec{A}+\frac{1}{a}\vec{l}_4,$$

$$d\vec{P}=d\vec{A}-\frac{da}{a^2}\vec{l}_4+\frac{1}{a}d\vec{l}_4,$$

$$d\vec{P}=\omega^1\vec{l}_1+\omega^2\vec{l}_2+\omega^3\vec{l}_3-\frac{a(a-b)}{a^2}\vec{l}_4\omega^2+\frac{1}{a}(\omega_4^1\vec{l}_1+\omega_4^2\vec{l}_2+\omega_4^3\vec{l}_3),$$

$$d\vec{P}=\left(\omega^1+\frac{1}{a}\omega_4^1\right)\vec{l}_1+\left(\omega^2+\frac{1}{a}\omega_4^2\right)\vec{l}_2+\left(\omega^3+\frac{1}{a}\omega_4^3\right)\vec{l}_3-\frac{a(a-b)}{a^2}\vec{l}_4\omega^2;$$

но $\omega_i^j=-\omega_j^i$ и $\omega_1^4=a\omega^1$, $\omega_3^4=a\omega^3$, $\omega_2^4=b\omega^2$, т. е.

$$d\vec{P}=\left[\frac{a-b}{a}\vec{l}_2-\frac{a-b}{a^2}a\vec{l}_4\right]\omega^2,$$

т. е. поверхность голономности $\omega^2=0$ принадлежить касательной гиперсфере с центром в точке $\vec{P}$ (если $\omega^2=0$, то $a\vec{P}=0$) и радиусом $1/a$.

§ 4. Поверхности III — $a=b=c$

Из системы (3) ввиду независимости форм ω^1, ω^2, ω^3 получаем

$$\beta=\zeta=\eta=\gamma=\eta=\zeta=\eta=\nu=\varrho=0,\quad \alpha=\xi=\zeta,\quad \beta=\mu=\varrho,\quad \gamma=\nu=\varkappa$$

или

$$\alpha=\beta=\xi=\gamma=\eta=\zeta=\mu=\varrho=\varkappa=\nu=0,$$

т. е. система (3) переходить в систему

$$\omega^4=0,$$
$$\omega_1^4=a\omega^1,$$
$$\omega_2^4=a\omega^2, \tag{32}$$

$$\omega_3^4 = a\omega^3,$$

$$da = 0.$$

Система вполне интегрируемая, т. е. в инволюции, так как внешнее дифференцирование не дает никаких новых уравнений — система замкнута.

Случай 1. Постоянная $a \equiv 0$, т. е. имеем

$$\omega^4 = 0,$$

$$\omega_1^4 = 0,$$

$$\omega_2^4 = 0,$$

$$\omega_3^4 = 0.$$

Следует

$$d\vec{l}_4 = \omega_4^1 \vec{l}_1 + \omega_4^2 \vec{l}_2 + \omega_4^3 \vec{l}_3 = -\omega_1^4 \vec{l}_1 - \omega_2^4 \vec{l}_2 - \omega_3^4 \vec{l}_3 = 0,$$

т. е. нормаль к гиперповерхности имеет фиксированное направление или поверхность есть плоскость.

Случай 2. Постоянная $a \neq 0$. Рассматриваем точку

$$\vec{P} = \vec{A} + \frac{1}{a}\vec{l}_4, \tag{33}$$

где A — точка нашей гиперповерхности.

Продифференцируем (33):

$$d\vec{P} = d\vec{A} + \frac{1}{a} d\vec{l}_4,$$

$$d\vec{P} = \omega^1 \vec{l}_1 + \omega^2 \vec{l}_2 + \omega^3 \vec{l}_3 + \frac{1}{a}\{\omega_4^1 \vec{l}_1 + \omega_4^2 \vec{l}_2 + \omega_4^3 \vec{l}_3\},$$

$$d\vec{P} = \left(w^1 - \frac{1}{a}\omega_1^4\right)\vec{l}_1 + \left(\omega^2 - \frac{1}{a}\omega_2^4\right)\vec{l}_2 + \left(\omega^3 - \frac{1}{a}\omega_3^4\right)\vec{l}_3.$$

Из равенства (32) следует $d\vec{P} = 0$, т. е. точка P неподвижна или имеем сферу с центром P и радиусом $1/a$. Таким образом все поверхности этого класса получены; они зависят от пяти произвольных постоянных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Финников, С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва, 1948.
2. Картан, Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. Москва, 1962.
3. Картан, Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. Москва, 1963.

Поступила 29. III. 1968 г.

ТРИМЕРНИ ПОВЪРХНИНИ В ЧЕТИРИМЕРНОТО ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО, НОСЕЩИ НАПЪЛНО ХОЛОНОМНА 3-ТЪКАН ОТ ЛИНИИ НА КРИВИНАТА

Светослав Билчев

(Резюме)

Разглеждат се тримерни повърхнини в четиримерното евклидово пространство. Каноничният репер в произволна точка се избира така, че $\vec{l}_4$ е перпендикулярен на допирателната равнина към повърхнината в тази точка, а векторите $\vec{l}_i$, $i=1, 2, 3$, са насочени по линиите на кривината.

В зависимост от коефициентите a, b, c, влизащи в равенствата (2), се разглеждат три класа повърхнини. Повърхнините от първи клас се характеризират с $a \neq b \neq c \neq a$. Доказва се, че тези повърхнини съществуват с произвол от три функции на две променливи. Повърхнините от втори клас се характеризират с $a=c \neq b$. Доказва се, че тези повърхнини съществуват и зависят от една функция на две променливи. Повърхнините от трети клас се характеризират с $a=b=c$. Тези повърхнини съществуват и зависят от пет произволни константи.

Изследването е извършено с метода на Картан.

THREE-DIMENSIONAL SURFACES IN THE FOUR-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE, CARRYING A TOTALLY HOLONOMIC 3-NET OF LINES OF CURVATURE

Svetoslav Bilčev

(Summary)

The author considers the three-dimensional surfaces in the four-dimensional Euclidian space. The canonical frame at an arbitrary point has been chosen in such a way that $\vec{l}_4$ is normal to the tangent plane to the surface at this point and the vectors $\vec{l}_i$, $i=1$, 2, 3, have the directions of the lines of curvature.

Three classes of surfaces are examined according to the coefficients a, b, c in the equations (2). The surfaces of the first class are characterized by $a \neq b \neq c \neq a$. It is proved that these surfaces exist and depend on three functions of two variables. For the surfaces of the second class the conditions $a=c \neq b$ hold. It is proved that these surfaces exist and depend on a function of two variables. The surfaces of the third class are characterized by $a=b=c$. These surfaces exist and depend on five arbitrary constants.

Cartan's method is used in the investigation.