БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

АПРОКСИМИРАНЕ НА ИЗПЪКНАЛИ МНОЖЕСТВА

Васил А. Попов

В тази работа ние ще разгледаме някои въпроси, свързани с апроксимирането на изпъкнали фигури в равнината. Ще наричаме n-ъгълник многоъгълника, който има n или по-малко върха. Съвкупността от всички изпъкнали n-ъгълници в равнината ще бележим с L_n.

Всички изпъкнали фигури, които ще разглеждаме, ще предполагаме затворени и ограничени. Периметър на изпъкналата фигура K ще наричаме дължината на граничната ѝ крива.

Нека $r(P, K)$ означава линейното (хаусдорфово) разстояние между затворените множества в равнината:

$$r(P, K)=\inf_{\substack{P\subset K^{\alpha}\\ K\subset P^{\alpha}}} \alpha,$$

където P^{α} и K^{α} означават α-околностите на множествата P и K относно обикновеното евклидово разстояние между точките в равнината.

За всяка изпъкнала фигура K ще разглеждаме следните нейни характеристики:

а) най-добро приближение на фигурата K с изпъкнали n-ъгълници:

$$\varepsilon_n(K)=\inf_{P\in L_n} r(P, K);$$

б) най-добро приближение на фигурата K с изпъкнали n-ъгълници, които съдържат K:

$$\varepsilon_n^{e}(K)=\inf_{\substack{P\in L_n\\ P\supset K}} r(P, K);$$

в) най-добро приближение на фигурата K с изпъкнали n-ъгълници, които се съдържат във фигурата K:

$$\varepsilon_n^{i}(K)=\inf_{\substack{P\in L_n\\ P\subset K}} r(P, K).$$

Най-напред ще покажем, че съществуват многоъгълници, които осъществяват най-добрите приближения.

Определение 1. Ще казваме, че редицата от изпъкнали фигури $\{P_m\}_1^\infty$ е ограничена, ако съществува квадрат Q такъв, че всички фигури P_m са заключени в него.

Ще използваме следната теорема, известна като „принцип за избора" на В. Бляшке [1]:

Теорема 1. За всяка ограничена редица от изпъкнали фигури съществуват подредица $\{P_{m_k}\}$ и изпъкнала фигура P такива, че е изпълнено

$$\lim_{m_k\to\infty} r(P_{m_k}, P)=0.$$

Тъй като редица от изпъкнали n-ъгълници може да клони относно линейното разстояние r само към изпъкнал n-ъгълник, от теорема 1 получаваме

Теорема 2. За всяка ограничена редица от изпъкнали n-ъгълници $\{P_m\}_1^\infty$ съществуват подредица $\{P_{m_k}\}$ и изпъкнал n-ъгълник P такива, че

$$\lim_{m_k\to\infty} r(P_m, P)=0.$$

Теорема 3. Нека K е изпъкнала ограничена фигура. За всяко натурално n съществуват $P\in L_n$, $P^i\in L_n$, $P^i\subset K$ и $P^e\in L_n$, $P^e\supset K$ такива, че са изпълнени равенствата

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(K)&=r(K, P),\\ \varepsilon_n^i(K)&=r(K, P^i),\\ \varepsilon_n^e(K)&=r(K, P^e). \end{aligned} \tag{I}$$

Доказателство. За всяко натурално m съществува $P_m\in L_n$ такъв, че

$$r(P_m, K)<\varepsilon_n(K)+\frac{1}{m}\cdot \tag{1}$$

От ограничеността на фигурата K и от (1) следва, че редицата $\{P_m\}_1^\infty$ от елементи на L_n е ограничена.

Прилагайки към редицата $\{P_m\}_1^\infty$ теорема 2, получаваме, че съществува подредица $\{P_{m_k}\}$ и елемент $P\in L_n$ такива, че

$$\lim_{m_k\to\infty} r(P_{m_k}, P)=0. \tag{2}$$

От (1) и (2) очевидно следва $\varepsilon_n(K)=r(P, K)$.

Останалите два случая се разглеждат напълно аналогично.

Определение 2. Многоъгълници, които задоволяват (I), ще наричаме многоъгълници на най-добро приближение (съответно вписани многоъгълници на най-добро приближение, описани многоъгълници на най-добро приближение).

Навсякъде по-нататък под n-ъгълник ще разбираме изпъкнал n-ъгълник, т. е. елемент на L_n.

Разстояние от точката A до множеството K ще наричаме числото

$$r(A, K)=\inf_{B \in K} d(A, B),$$

където $d(A, B)$ е евклидовото разстояние между точките A и B.

Нека K е изпъкнала фигура. Ние ще считаме винаги, че граничната ѝ крива е ориентирана по часовниковата стрелка, т. е. така, че при движение по нея в положителна посока вътрешността на фигурата K остава вдясно. Нека A и B са две точки от граничната крива. С $\widehat{AB}$ ще означаваме дъгата от граничната крива от точката A до точката B в положителна посока. Правата, свързваща точките A и B, ще означаваме AB. Същото означение ще използваме и за отсечката AB, когато от контекста е ясно за какво става дума.

Да отбележим, че ако правата q сече изпъкналата фигура K в две точки A и B, на лъча $\overrightarrow{AB}$ има точно една точка C на разстояние $\delta>0$ от фигурата K и всички вътрешни точки от отсечката BC се намират на разстояние $a<\delta$ от фигурата K.

След тези бележки ще намерим оценка отгоре за $\varepsilon_n(K)$, $\varepsilon_n^{\mathrm{i}}(K)$ и $\varepsilon_n^{\mathrm{e}}(K)$ чрез периметъра на изпъкналата фигура K.

Определение 3. Нека ни е дадена изпъкналата фигура K и точката A, лежаща върху граничната крива на K. Ще казваме, че точката B е получена от точката A чрез (α, δ)-построение, ако са изпълнени следните условия:

а) точката B лежи на границата на K;

б) дъгата $\widehat{AB}$ е по часовниковата стрелка спрямо фигурата K, всяка нейна точка се намира на разстояние $a \leqq \delta$ от отсечката AB и съществува точка $C \in \widehat{AB}$ на разстояние точно δ от AB.

Определение 4. Нека ни е дадена изпъкналата фигура K и точката A, която се намира на разстояние $\delta>0$ от фигурата K. Ще казваме, че точките A', A'' и B са получени чрез (β, δ)-построение от точката A, ако са изпълнени следните условия:

а) точката B се намира на разстояние δ от фигурата K и $A \neq B$;

б) правата AB сече изпъкналата фигура K в две точки A' и A'' такива, че дъгата $\widehat{A'A''}$ е по часовниковата стрелка спрямо фигурата K, всяка нейна точка е на разстояние $a \leqq \delta$ от отсечката $A'A''$ и съществува точка $C \in \widehat{A'A''}$ на разстояние точно δ от отсечката $A'A''$.

Определение 5. Нека ни е дадена изпъкналата фигура K и точката A на разстояние $\delta>0$ от фигурата K. Ще казваме, че точката B е получена от точката A чрез (γ, δ)-построение, ако са изпълнени следните условия:

а) точката B се намира на разстояние δ от фигурата K и $A \neq B$;

б) правата AB е опорна за фигурата K и направлението AB има посоката на часовниковата стрелка спрямо фигурата K.

Нека отбележим, че (γ, δ)-построението е винаги възможно, а (α, δ)- и (β, δ)-построенията са възможни, когато изпъкналата фигура K има ширина $a>\delta$.

Теорема 4. Нека K е изпъкнала фигура с периметър l. Тогава са в сила оценките

(3) $$\varepsilon_n^{\mathrm{i}}(K) \leqq \frac{l}{2n} \sin\frac{\pi}{n},$$

(4) $$\varepsilon_n(K) \leqq \frac{l}{2n} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{n}},$$

(5) $$\varepsilon_n^{\mathrm{e}}(K) \leqq \frac{l}{2n} \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Доказателство. Ние ще докажем тези неравенства, като построим изпъкнали n-ъгълници P^{i} — вписан, P и P^{e} — описан, които да задоволяват съответно

(3′) $$r(P^{\mathrm{i}}, K) \leqq \frac{l}{2n} \sin\frac{\pi}{n},$$

(4′) $$r(P, K) \leqq \frac{l}{2n} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{n}},$$

(5′) $$r(P^{\mathrm{e}}, K) \leqq \frac{l}{2n} \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Да построим изпъкналия n-ъгълник P^{i}. Избираме си произволна точка A_1, лежаща на границата на K. От точката A_1 чрез (α, δ)-построение получаваме точката A_2, като полагаме $\delta = \frac{l}{2n} \sin\frac{\pi}{n}$. Съгласно забележката по-горе това построение е възможно, ако фигурата K има ширина $\alpha > \delta$. Но ако фигурата K има ширина $\alpha \leqq \delta = \frac{l}{2n} \sin\frac{\pi}{n}$, оценката (3) е очевидна.

След като сме получили точката A_2, от нея чрез (α, n)-построение получаваме точката A_3; изобщо след като сме получили точката A_i от нея чрез (α, δ)-построение, получаваме точката A_{i+1}. При това са възможни два случая:

А) Съществува някакво i от 2 до n такова, че точката A_1 лежи на дъгата $\overparen{A_iA_{i+1}}$. Тогава очевидно вписаният n-ъгълник $P^{\mathrm{i}} = A_1 \ldots A_i$ задоволява (3′).

Б) Нямаме случая А). Тогава разглеждаме вписания n-ъгълник $P^{\mathrm{i}} = A_1 \ldots A_n$. Ние ще докажем, че той задоволява (3′). За това е достатъчно да покажем, че всяка точка от дъгата $\overparen{A_nA_1}$ е на разстояние $\alpha \leqq \delta$ от отсечката A_nA_1.

Да допуснем противното: съществува точка $B_n \in \overparen{A_nA_1}$ такава, че разстоянието ѝ до отсечката A_nA_1 е $\delta_1 > \delta$. Да означим с B_i точки върху дъгите A_iA_{i+1}, $i = 1, \ldots, n-1$, които са на разстояние точно δ до A_iA_{i+1}. Да разгледаме триъгълника $A_iB_iA_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Възможни са два случая:

1) Ъглите $B_iA_iA_{i+1}$ и $B_iA_{i+1}A_i$ са остри или единият от тях е прав. Означавайки $\sphericalangle B_iA_iA_{i+1} = \alpha_i$ и $\sphericalangle B_iA_{i+1}A_i = \alpha_i'$, получаваме

(6) $$\delta\left(\frac{1}{\sin\alpha_i} + \frac{1}{\sin\alpha_i'}\right) \leq A_iB_i + B_iA_{i+1},$$

като

$$(7) \qquad \alpha_i+\alpha_i'+\sphericalangle A_iB_iA_{i+1}=\pi, \quad 0<\alpha_i\leqq\frac{\pi}{2}, \quad 0<\alpha_i'\leqq\frac{\pi}{2}$$

(в (6) ние имаме в същност равенство, но пишем неравенство за симетрия със случая 2)).

2) Един от ъглите $B_iA_iA_{i+1}$ и $B_iA_{i+1}A_i$ е тъп. Нека за определеност $\sphericalangle B_iA_iA_{i+1}$ е тъп. Тогава издигаме от точка A_i перпендикуляр към B_iA_i. Нека пресечната точка на перпендикуляра с отсечката B_iA_{i+1} е A_i'. Означаваме $\sphericalangle B_iA_iA_i'=\alpha_i$ и $B_iA_i'A_i=\alpha_i'$. Тъй като в този случай $B_iA_i=\delta$ и $\sphericalangle\alpha_i$ е прав, то от триъгълник $A_iA_i'B_i$ получаваме

$$\delta\left(\frac{1}{\sin\alpha_i}+\frac{1}{\sin\alpha_i'}\right)\leqq A_iB_i+B_iA_{i+1},$$

като

$$\alpha_i+\alpha_i'+\sphericalangle A_iB_iA_{i+1}=\pi, \quad 0<\alpha_i\leqq\frac{\pi}{2}, \quad 0<\alpha_i'\leqq\frac{\pi}{2},$$

т. е. и в този случай имаме изпълнени (7) и (6).

Прилагайки подобни разсъждения за триъгълник $A_nB_nA_1$, получаваме

$$(8) \qquad \delta\left(\frac{1}{\sin\alpha_n}+\frac{1}{\sin\alpha_n'}\right)<\delta_1\left(\frac{1}{\sin\alpha_n}+\frac{1}{\sin\alpha_n'}\right)\leqq A_nB_n+B_nA_1,$$

като

$$(9) \qquad \alpha_n+\alpha_n'+\sphericalangle A_nB_nA_1=\pi, \quad 0<\alpha_n\leqq\frac{\pi}{2}, \quad 0<\alpha_n'\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Сумираме (6) и (7) по i от 1 до $n-1$, прибавяме (8) и (9) и получаваме

$$(10) \qquad \delta\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sin\alpha_i}+\frac{1}{\sin\alpha_i'}\right]\right)<\sum_{i=1}^{n}(A_iB_i+B_iA_{i+1})\leqq l$$

и

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\alpha_i')+\sum_{i=1}^{n}\sphericalangle A_iB_iA_{i+1}=n\pi,$$

като

$$0<\alpha_i\leqq\frac{\pi}{2}; \quad 0<\alpha_i'\leqq\frac{\pi}{2}$$

(полагаме $A_{n+1}=A_1$; подобна забележка важи и по-нататък в подобни случаи).

Тъй като очевидно

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{n}\sphericalangle A_iB_iA_{i+1}\geqq\pi(n-2),$$

от (11) следва

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+a'_i)\leq 2\pi,\quad 0<a_i\leq\frac{\pi}{2},\quad 0<a'_i\leq\frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Използвайки изпъкналостта на функцията $1/\sin x$ в интервала $(0, \pi/2]$, от (12) получаваме

$$\frac{1}{\sin\dfrac{\sum(a_i+a'_i)}{2n}}\leq\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sin a_i}+\frac{1}{\sin a'_i}\right). \tag{13}$$

Но при $n\geq 2$ имаме от (12)

$$\frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\leq\frac{1}{\sin\dfrac{\sum(a_i+a'_i)}{2n}},$$

следователно (13) ни дава

$$\frac{2n}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\leq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sin a_i}+\frac{1}{\sin a'_i}\right).$$

Оттук и от (10) получаваме

$$\delta\frac{2n}{\sin\dfrac{\pi}{n}}<l. \tag{14}$$

Но ние избрахме $\delta=\frac{l}{2n}\sin\frac{\pi}{n}$ и (14) ни дава противоречието $l<l$. Следователно не може да има точка от дъгата $\widehat{A_nA_1}$, която да е на разстояние $\delta_1>\delta$ от A_nA_1.

С това неравенство (3) е доказано.

Да построим сега изпъкналия n-ъгълник P. Да вземем произволна точка A_1, която се намира на разстояние

$$\delta=\frac{l}{2n}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\left(1+\cos\dfrac{\pi}{n}\right)}$$

от фигурата K. От точката A_1 чрез (β, δ)-построение получаваме точките A'_1, A''_1 и A_2. Това, както казахме, е възможно, ако фигурата K има ширина $a>\delta$. Но в противен случай (4) е очевидно.

От точката A_2 чрез (β, δ)-построение получаваме точките A'_2, A''_2 и A_3 и т. н. От точката A_i чрез (β, δ)-построение получаваме точките A'_i, A''_i и A_{i+1}.

При това са възможни два случая:

А) Съществува индекс i от 2 до n такъв, че отсечката A_iA_{i+1} сече отсечката A_1A_2 или се намира от тази страна на A_1A_2, от която е дъгата

$\widehat{A_1A_2}$ (второто е възможно само при $i=2$). В този случай полагаме $P=A_1\dots A_i$. Веднага се вижда, че P е изпъкнал и удовлетворява (4′).

Б) Нямаме А). Тогава да разгледаме n-ъгълника $P=A_1\dots A_n$. Ние ще покажем, че не може страната A_nA_1 да сече фигурата K в две точки A'_n и A''_n такива, че на дъгата $\widehat{A'_nA''_n}$ да съществува точка C на разстояние $\delta_1>\delta$ от отсечката $A'_nA''_n$. Оттук веднага ще следва, че P задоволява (4′).

Да допуснем, че страната A_nA_1 сече фигурата K в две точки A'_n и A''_n такива, че на дъгата $\widehat{A'_nA''_n}$ съществува точка B_n на разстояние $\delta_1>\delta$ от отсечката $A'_nA''_n$. Да означим с B_i точки върху дъгите $\widehat{A'_iA''_i}$, $i=1,\dots,n-1$, които са на разстояние точно δ от отсечките $A'_iA''_i$.

Да разгледаме триъгълниците $A'_iB_iA''_i$, $i=1,\dots,n$. Също така както при построяването на вписания n-ъгълник P^1 можем да покажем, че имаме

$$\delta\,\frac{2n}{\sin\frac{\pi}{n}}<\sum_{i=1}^{n}(A'_iB_i+B_iA''_i). \tag{15}$$

Да разгледаме сега триъгълниците $A''_iA_{i+1}A'_{i+1}$; $i=1,\dots,n$ (полагаме естествено $A_{n+1}=A_1$, $A'_{n+1}=A'_1$). За всеки от тях са възможни два случая:

1) Нито един от ъглите $A''_iA'_{i+1}A_{i+1}$ и $A_{i+1}A''_iA'_{i+1}$ не е тъп. Понеже точката A_{i+1} е на разстояние δ от фигурата K, то тя е на разстояние $a\geqq\delta$ от всяка точка от отсечката $A''_iA'_{i+1}$, следователно, ако означим $\sphericalangle A_{i+1}A''_iA'_{i+1}=\alpha_i$ и $\sphericalangle A_{i+1}A'_{i+1}A''_i=\alpha'_i$, имаме

$$\delta\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha'_i}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_i}\right)\leqq A'_{i+1}A''_i, \tag{16}$$

като

$$\alpha_i+\alpha'_i+\sphericalangle A''_iA_{i+1}A'_{i+1}=\pi,\quad 0<\alpha_i\leqq\frac{\pi}{2},\quad 0<\alpha'_i\leqq\frac{\pi}{2} \tag{17}$$

(дефинираме функцията $\frac{1}{\operatorname{tg}x}$ за $x=\frac{\pi}{2}$ равна на нула, навсякъде понататък полагаме $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}=0$).

2) Единият от ъглите $A_{i+1}A''_iA'_{i+1}$ и $A_{i+1}A'_{i+1}A''_i$ е тъп. Нека за определеност $\sphericalangle A_{i+1}A''_iA'_{i+1}$ е тъп. Издигаме перпендикуляр от точката A''_i към страната A''_iA_{i+1}. Нека пресечната точка на перпендикуляра със страната $A_{i+1}A'_{i+1}$ е D_i. Означаваме $\sphericalangle A_{i+1}A''_iD_i=\alpha_i$ (прав) и $\sphericalangle A_{i+1}D_iA''_i=\alpha'_i$. От триъгълник $A_{i+1}D_iA''_i$ получаваме

$$\delta\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_i}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha'_i}\right)\leqq A''_iA'_{i+1},$$

като

$$a_i+a'_i+\sphericalangle A''_i A_{i+1} A'_{i+1}=\pi, \quad 0<a_i\leqq\frac{\pi}{2}, \quad 0<a'_i\leqq\frac{\pi}{2},$$

т. е. отново (16) и (17).

От (16) и (17) чрез сумиране по i получаваме

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\operatorname{tg} a_i}+\frac{1}{\operatorname{tg} a'_i}\right]\right)\leqq\sum_{i=1}^{n} A''_i A'_{i+1} \tag{18}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+a'_i)+\sum_{i=1}^{n}\sphericalangle A''_i A_{i+1} A'_{i+1}=n\pi, \tag{19}$$

като

$$0<a_i\leqq\frac{\pi}{2}, \quad 0<a'_i\leqq\frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Тъй като

$$\sum_{i=1}^{n}\sphericalangle A''_i A_{i+1} A'_{i+1}=\pi(n-2),$$

от (19) следва

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+a'_i)=2\pi. \tag{21}$$

От (21), (20) и изпъкналостта на функцията $1/\operatorname{tg} x$ в интервала $(0, \pi/2]$ следва

$$\frac{2n}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\leqq\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\operatorname{tg} a_i}+\frac{1}{\operatorname{tg} a'_i}\right],$$

което заедно с (18) ни дава

$$\delta\,\frac{2n}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\leqq\sum_{i=1}^{n} A''_i A'_{i+1}. \tag{22}$$

Събирайки (15) и (22), получаваме

$$\delta\,\frac{2n\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}<\sum_{i=1}^{n}(A'_i B_i+B_i A''_i+A''_i A'_{i+1})\leqq l. \tag{23}$$

Но ние избрахме

$$\delta=\frac{l}{2n}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)},$$

следователно (23) ни дава противоречието $l<l$.

С това (4) е доказано.

Накрая да построим n-ъгълника P^e, който съдържа K и задоволява (5'). Да изберем $\delta = \frac{l}{2n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$. Нека A_1 е произволна точка на разстояние δ от фигурата K. От точката A_1 чрез (γ, δ)-построение получаваме точката A_2, от точката A_2 чрез (γ, δ)-построение получаваме точката A_3, изобщо от точката A_i чрез (γ, δ)-построение получаваме точката A_{i+1}. Да разгледаме следните два случая:

А) Съществува индекс i от 3 до n такъв, че отсечката A_iA_{i+1} има обща точка с отсечката A_1A_2. Тогава изпъкналият n-ъгълник $P^e = A_1 \ldots A_i$ съдържа фигурата K и очевидно задоволява (5').

Б) Нямаме А). Ние ще покажем, че този случай е невъзможен, с което (5) ще бъде доказано.

Да допуснем, че нямаме А). Означаваме с B_i някоя от общите точки на отсечката A_iA_{i+1} с фигурата K. Полагаме $B_0 = B_n$. Всяка точка A_i, $i = 1, \ldots, n$, е на разстояние $a \geqq \delta$ от отсечката $B_{i-1}B_i$. При това, тъй като нямаме А), очевидно е изпълнено

$$\sum_{i=1}^{n} \sphericalangle B_{i-1}A_iB_i > \pi(n-2). \tag{24}$$

Да разгледаме триъгълник $B_{i-1}A_iB_i$, $i = 1, \ldots, n$. Възможни са два случая:

1) Ъглите $A_iB_{i-1}B_i$ и $A_iB_iB_{i-1}$ са остри или единият от тях е прав. Тогава означаваме $\sphericalangle A_iB_{i-1}B_i = \alpha_i$ и $\sphericalangle A_iB_iB_{i-1} = \alpha_i'$. От триъгълник $B_{i-1}A_iB_i$ получаваме

$$\delta \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_i} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_i'} \right) \leqq B_{i-1}B_i, \tag{25}$$

като

$$\alpha_i + \alpha_i' + \sphericalangle B_{i-1}A_iB_i = \pi, \quad 0 < \alpha_i \leqq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \alpha_i' \leqq \frac{\pi}{2}. \tag{26}$$

2) Единият от ъглите $A_iB_{i-1}B_i$ и $A_iB_iB_{i-1}$ е тъп. Нека за определеност $\sphericalangle A_iB_{i-1}B_i$ е тъп. Издигаме перпендикуляр от точката B_{i-1} към страната $B_{i-1}A_i$. Нека пресечната точка на перпендикуляра със страната A_iB_i е B_i'. Да означим $\sphericalangle A_iB_{i-1}B_i' = \alpha_i$ (прав) и $\sphericalangle A_iB_i'B_{i-1} = \alpha_i'$. От триъгълник $A_iB_{i-1}B_i'$ получаваме отново

$$\delta \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_i} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_i'} \right) \leqq B_{i-1}B_i' < B_{i-1}B_i,$$

като

$$\alpha_i + \alpha_i' + \sphericalangle B_{i-1}A_iB_i = \pi, \quad 0 < \alpha_i \leqq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \alpha_i \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Сумирайки (25) по i от 1 до n, получаваме

$$\delta \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_i} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_i'} \right] \right) \leqq \sum_{i=1}^{n} B_{i-1}B_i. \tag{27}$$

От (26) и (24) следва

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\alpha_i')<2\pi, \quad 0<\alpha_i\leqq\frac{\pi}{2}, \quad 0<\alpha_i'\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Оттук и от изпъкналостта на функцията $1/\mathrm{tg}\,x$ в интервала $(0, \pi/2]$ получаваме

$$\frac{2n}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}}<\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha_i}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha_i'}\right],$$

което заедно с (27) ни дава

$$\delta\,\frac{2n}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}}<\sum_{i=1}^{n}B_{i-1}B_i\leqq l. \tag{28}$$

Но ние избрахме $\delta=\frac{l}{2n}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$ и (28) ни дава противоречието $l<l$. Следователно случаят Б) е невъзможен, откъдето следва (5).

С това теорема 4 е изцяло доказана.

Сега ще покажем, че оценките от теорема 4 не могат в известен смисъл да се подобрят. Именно в сила е следната

Теорема 5. Нека Q_{n+1} е правилен $n+1$-ъгълник с периметър l. В сила са следните неравенства:

$$\frac{l}{2(n+1)}\sin\frac{\pi}{n+1}\leqq\varepsilon_n^{\mathrm{i}}(Q_{n+1}), \tag{29}$$

$$\frac{l}{2(n+1)}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\left(1+\cos\frac{\pi}{n+1}\right)}\leqq\varepsilon_n(Q_{n+1}), \tag{30}$$

$$\frac{l}{2(n+1)}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n+1}\leqq\varepsilon_n^{\mathrm{e}}(Q_{n+1}). \tag{31}$$

Доказателство. а) Нека правилният $n+1$-ъгълник е $Q_{n+1}=A_1\ldots A_{n+1}$. Да означим средите на страните A_iA_{i+1} с B_i. Да разгледаме триъгълник $B_{i-1}A_iB_i$. Върхът A_i е отдалечен на разстояние $\delta=\frac{l}{2(n+1)}\sin\frac{\pi}{n+1}$ от страната $B_{i-1}B_i$. Ако допуснем, че $\varepsilon_n^{\mathrm{i}}(Q_{n+1})<\delta$, то във всеки триъгълник $B_{i-1}A_iB_i$ трябва да има връх по n-ъгълника P^{i} на най-добро вписано приближение. Действително, ако допуснем, че всички върхове на P^{i} лежат от тази страна на правата $B_{i-1}B_i$, от която не се намира върхът A_i, и изпъкналата им обвивка, т. е. P^{i}, ще се намира от същата страна на правата $B_{i-1}B_i$ и следователно $r(P^{\mathrm{i}}, Q_{n+1})\geqq\delta$.

Но тръгълниците $B_{i-1}A_iB_i$ нямат общи вътрешни точки, следователно от предположението, че $\varepsilon_n^{\mathrm{i}}(Q_{n+1})<\delta$, стигаме до противоречието, че n-ъгълникът P^{i} на най-добро вписано приближение трябва да има $n+1$ различни върха.

С това (29) е доказано.

б) Построяваме подобен на Q_{n+1} $n+1$-ъгълник $Q'_{n+1}=A'_1\ldots A'_{n+1}$, включващ Q_{n+1} в себе си със страни, успоредни на страните на Q_{n+1} и на разстояние

$$\delta=\frac{l}{2(n+1)}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\left(1+\cos\frac{\pi}{n+1}\right)}$$

от тях. Нека средите на страните $A'_iA'_{i+1}$ на $n+1$-ъгълника Q'_{n+1} са B_i. Всеки връх A_i се намира в съответния триъгълник $B_{i-1}A'_iB_i$ и е на разстояние

$$\delta=\frac{l}{2(n+1)}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\left(1+\cos\frac{\pi}{n+1}\right)}$$

от страната $B_{i-1}B_i$. Оттук напълно аналогично, както в случая а), следва, че ако имаме $\varepsilon_n(Q_{n+1})<\delta$, във вътрешността на всеки триъгълник $B_{i-1}A'_iB_i$ трябва да имаме връх от n-ъгълника на най-добро приближение, а от това, че триъгълниците $B_{i-1}A'_iB_i$ нямат общи вътрешни точки, следва, че n-ъгълникът на най-добро приближение трябва да има $n+1$ различни върха, което е невъзможно. Следователно

$$\varepsilon_n(Q_{n+1})\geqq\frac{l}{2(n+1)}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\left(1+\cos\frac{\pi}{n+1}\right)}.$$

в) Построяваме подобен на Q_{n+1} $n+1$-ъгълник $Q'_{n+1}=A'_1\ldots A'_{n+1}$, включващ Q_{n+1} в себе си със страни, успоредни на страните на Q_{n+1} и на разстояние

$$\delta=\frac{l}{2(n+1)}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n+1}$$

от тях. Да означим средите на страните $A'_iA''_i$ на $n+1$-ъгълника Q'_{n+1} с B_i. Върховете A_i се намират на средите на страните $B_{i-1}B_i$. Ако допуснем, че

$$\varepsilon^e_n(Q_{n+1})<\frac{l}{2(n+1)}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

тъй като $n+1$-ъгълникът на най-добро описано приближение трябва да съдържа Q_{n+1}, отново стигаме до противоречието, че n-ъгълникът на най-добро описано приближение трябва да има $n+1$ различни върха.

С това теорема 5 е доказана.

Забележка. В доказателството използваме идея на Eggleston [2]. Там за $E_n(Q_{n+1})$ е получена оценка, малко по-лоша от получената тук.

Да означим с K_l множеството от всички изпъкнали фигури с периметър l. От теореми 4 и 5 получаваме следните асимптотични равенства:

$$2\lim_{n\to\infty}\sup_{K\in K_l} n^2\varepsilon_n(K)=\lim_{n\to\infty}\sup_{K\in K_l} n^2\varepsilon^i_n(K)=\lim_{n\to\infty}\sup_{K\in K_l} n^2\varepsilon^i_n(K)=\frac{\pi l}{2}.$$

Нека отбележим, че не ни е известна фигурата, която при даден периметър най-лошо се апроксимира с n-ъгълници. Теореми 4 и 5 показват, че правилните $n+1$-ъгълници са измежду фигурите, които лошо се апроксимират с n-ъгълници. Ние предполагаме, че точно те са фигурите, които при даден периметър най-лошо се апроксимират с n-ъгълници.

За всяка конкретна изпъкнала фигура K в [1] са получени следните асимптотични равенства:

$$2\lim_{n\to\infty} n^2\varepsilon_n(K)=\lim_{n\to\infty} n^2\varepsilon_n^{i}(K)=\lim_{n\to\infty} n^2\varepsilon_n^{e}(K)=\frac{1}{8}\left(\int_0^l \mu^{\frac{1}{2}}(s)\,ds\right)^2, \tag{33}$$

където $\mu(s)$ е кривината на граничната крива на K като функция от дължината ѝ. Тъй като

$$\left(\int_0^l \mu^{\frac{1}{2}}(s)\,ds\right)^2\leqq l\int_0^l \mu(s)\,ds=2\pi l,$$

от (33) получаваме за фигура K с периметър l

$$2\lim_{n\to\infty} n^2\varepsilon_n(K)=\lim_{n\to\infty} n^2\varepsilon_n^{i}(K)=\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n^{e}(K)\leqq\frac{\pi l}{4}\cdot \tag{34}$$

Сравнението на (32) с (34) ни показва, че класът K_l се апроксимира асимптотично с n-ъгълници два пъти по-лошо, отколкото кой да е негов елемент. (Равенство в (34) имаме например за кръга.)

Използвам случая да изкажа благодарност на проф. д-р Бл. Сендов за вниманието, което прояви към настоящата работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тот, Л. Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. Москва, 1958.
2. Eggleston, H. G. Problems in euclidean spase. Oxford, Pergormon press, 1957
3. Попов, В. Аппроксимация выпуклых фигур. Доклады БАН, 21, 1968, № 10, 993—995.

Постъпила на 22. IV. 1968 г.

АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Васил А. Попов

(Резюме)

В работе даются доказательства теорем, сообщенных в [3]. Именно, для наилучшего приближения $\varepsilon_n(K)$ фигуры K вписанными n-угольниками и для наилучшего приближения $\varepsilon_n^{'}(K)$ фигуры K описанными n-угольниками получаются следующие оценки, при предположении, что фигура K выпуклая и имеет длину l:

$$\varepsilon_n(K) \leqq \frac{l \sin \frac{\pi}{n}}{2n\left(1+\cos \frac{\pi}{n}\right)},$$

$$\varepsilon_n^{\mathrm{i}}(K) \leqq \frac{l}{2n} \sin \frac{\pi}{n},$$

$$\varepsilon_n^{\mathrm{e}}(K) \leqq \frac{l}{2n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Для наилучших приближений правильного $n+1$-угольника Q_{n+1}, имеющего длину l, имеем следующие оценки снизу:

$$\frac{l \sin \frac{\pi}{n+1}}{2(n+1)\left(1+\cos \frac{\pi}{n+1}\right)} \leqq \varepsilon_n(Q_{n+1}),$$

$$\frac{l}{2(n+1)} \sin \frac{\pi}{n+1} \leqq \varepsilon_n^{\mathrm{i}}(Q_{n+1}), \quad \frac{l}{2(n+1)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+1} \leqq \varepsilon_n^{\mathrm{e}}(Q_{n+1}).$$

Эти оценки позволяют получить асимптотические оценки наилучших приближений класса K_l всех фигур, имеющих длину l:

$$2 \lim_{n\to\infty} \sup_{K \in K_l} n^2 \varepsilon_n(K) = \lim_{n\to\infty} \sup_{K \in K_l} n^2 \varepsilon_n^{\mathrm{i}}(K) = \lim_{n\to\infty} \sup_{K \in K_l} n^2 \varepsilon_n^{\mathrm{e}}(K) = \frac{\pi l}{2}.$$

Высказывается предположение, что из всех фигур, имеющих данную длину, хуже всех приближается n-угольниками правильный $n+1$-угольник.

APPROXIMATION OF CONVEX SETS

Vasil A. Popov

(Summary)

The paper contains the proofs of the theorems announced in [3]. For the best approximation $\varepsilon_n(K)$ of the figure K by n-polygons (polygons with n-vertices), for the best approximation $\varepsilon_n^{\mathrm{i}}(K)$ of the figure K by inscribed n-polygons and for the best approximation $\varepsilon_n^{\mathrm{e}}(K)$ of the figure K by circumscribed n-polygons the following estimates are obtained if the figure K is convex and has a length l:

$$\varepsilon_n(K) \leqq \frac{l \sin \frac{\pi}{n}}{2n\left(1+\cos \frac{\pi}{n}\right)},$$

$$\varepsilon_n^{\mathrm{i}}(K) \leqq \frac{l}{2n} \sin \frac{\pi}{n},$$

$$\varepsilon_n^{\mathrm{e}}(K) \leqq \frac{l}{2n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} .$$

For the best approximations of the regular $n+1$-polygon Q_{n+1} with a length l we have the following lower estimates:

$$\frac{l \sin \frac{\pi}{n+1}}{2(n+1)\left(1+\cos \frac{\pi}{n+1}\right)} \leqq \varepsilon_n(Q_{n+1}),$$

$$\frac{l}{2(n+1)} \sin \frac{\pi}{n+1} \leqq \varepsilon_n^{\mathrm{i}}(Q_{n+1}), \quad \frac{l}{2(n+1)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+1} \leqq \varepsilon_n^{\mathrm{i}}(Q_{n+1}).$$

These estimates permit to obtain asymptotic estimates for the best approximations of the class K_l of all convex figures with a length l:

$$2 \lim_{n\to\infty} \sup_{K \in K_l} n^2 \varepsilon_n(K) = \lim_{n\to\infty} \sup_{K \in K_l} n^2 \varepsilon_n^{\mathrm{i}}(K) = \lim_{n\to\infty} \sup_{K \in K_l} n^2 \varepsilon_n^{\mathrm{e}}(K) = \frac{\pi l}{2} .$$

The conjecture has been made that from all figures with a certain length the regular $n+1$-polygon is worst approximated by n-polygons.