БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

АПРОКСИМИРАНЕ НА ИЗПЪКНАЛИ ФУНКЦИИ С ПОЛИГОНИ

Васил А. Попов

В работата се разглежда апроксимиране на изпъкнали функции и на функции, които се представят като линейни комбинации от изпъкнали функции чрез полигони (частично линейни непрекъснати функции) относно равномерното и хаусдорфовото разстояние между функции.

Намерени са някои характеристики на полигоните на най-добро приближение и оценки за най-добрите приближения относно равномерното и хаусдорфовото разстояние.

§ 1. Всички разглеждани функции ще считаме дефинирани в интервала $[a, b]$.

Определение 1. Полигон от n-ти ред ще наричаме частично-линейна непрекъсната функция $\varphi(x)$ със свойството: съществуват $n+1$ точки x_i, $i=0,\dots,n$, $a=x_0\leqq x_1\leqq\cdots\leqq x_n=b$, такива, че в интервала $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n-1$, функцията $\varphi(x)$ е линейна.

Точките $(x_i, \varphi(x_i))$ ще наричаме върхове на полигона $\varphi(x)$ и понякога ще ги означаваме само с втората координата: например върхът $\varphi(x_i)$.

Нека отбележим, че по нашата дефиниция всеки полигон от ред n е и полигон от ред $n+1$.

Съвкупността от всички полигони от n-ти ред ще бележи с L_n. От горната бележка следва, че $L_n\subset L_{n+1}$.

В съвкупността от всички ограничени функции в интервала $[a, b]$ ще разглеждаме равномерното разстояние между функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$

$$\varrho(f, \varphi)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|$$

и хаусдорфовото разстояние между $f(x)$ и $\varphi(x)$, което ще означаваме винаги с $r(f, \varphi)$. Дефиницията и основните свойства на хаусдорфовото разстояние между функции ще предполагаме за известни [1], [2].

Най-добро равномерно приближение $\varepsilon_n(f)$ на функцията $f(x)$ с полигони от L_n ще наричаме числото

$$\varepsilon_n(f)=\inf_{\varphi\in L_n}\varrho(f, \varphi),$$

а най-добро горно равномерно приближение $\bar{\varepsilon}_n(f)$ на функцията $f(x)$ с полигони от L_n ще наричаме числото

$$\overline{\varepsilon}_n(f)=\inf_{\substack{\varphi\in L_n\\ \varphi(x)\geq f(x)}}\varrho(f,\varphi).$$

Най-добро хаусдорфово приближение $\varepsilon_n^*(f)$ на функцията $f(x)$ с полигони от L_n ще наричаме числото

$$\varepsilon_n^*(f)=\inf_{\varphi\in L_n} r(f,\varphi),$$

а най-добро горно хаусдорфово приближение на $f(x)$ с полигони от L_n ще наричаме числото

$$\overline{\varepsilon}_n^*(f)=\inf_{\substack{\varphi\in L_n\\ \varphi(x)\geq f(x)}} r(f,\varphi).$$

§ 2. Да разгледаме най-напред равномерните приближения.

Теорема 1. Нека $f(x)$ е ограничена функция. Тогава

$$2\varepsilon_n(f)=\overline{\varepsilon}_n(f).$$

Освен това, ако $\overline{\varphi}(x)$ е полигон от n-ти ред на най-добро горно равномерно приближение, т. е. такъв, че $\varrho(f,\overline{\varphi})=\overline{\varepsilon}_n(f)$ и $\overline{\varphi}(x)\geq f(x)$,

$$\varphi(x)=\overline{\varphi}(x)-\frac{\varrho(f,\overline{\varphi})}{2}$$

е полигон от n-ти ред на най-добро равномерно приближение. Аналогично, ако $\varphi(x)$ е полигон от n-ти ред на най-добро равномерно приближение

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)+\varrho(\varphi,f)$$

е полигон от n-ти ред на най-добро горно равномерно приближение.

Доказателство. Нека $\varepsilon>0$ е произволно положително число. Нека $\overline{\varphi}(x)\in L_n$ е такъв, че $\overline{\varphi}(x)\geq f(x)$ и освен това $\varrho(f,\overline{\varphi})<\overline{\varepsilon}_n(f)+\varepsilon$. Имаме

$$f(x)\leq\overline{\varphi}(x)\leq f(x)+\varrho(f,\overline{\varphi}),$$

откъдето

$$f(x)-\frac{\varrho(f,\overline{\varphi})}{2}\leq\overline{\varphi}(x)-\frac{\varrho(f,\overline{\varphi})}{2}\leq f(x)+\frac{\varrho(f,\overline{\varphi})}{2}$$

и тъй като $\overline{\varphi}(x)-\frac{\varrho(f,\overline{\varphi})}{2}$ е полигон от n-ти ред, то

(1) $$\varepsilon_n(f)\leq\varrho\left(f,\overline{\varphi}-\frac{\varrho(f,\overline{\varphi})}{2}\right)<\frac{\overline{\varepsilon}_n(f)}{2}+\varepsilon.$$

Нека сега, обратно, $\varphi(x)$ е полигон от n-ти ред такъв, че

$$f(x)-\varepsilon_n(f)-\varepsilon\leq\varphi(x)\leq f(x)+\varepsilon_n(f)+\varepsilon.$$

Оттук получаваме

$$f(x)\leq\varphi(x)+\varrho(f,\varphi)\leq f(x)+2\varepsilon_n(f)+2\varepsilon,$$

откъдето следва $\overline{\varepsilon}_n(f)\leqq 2\varepsilon_n(f)+2\varepsilon$. Поради произволността на ε последното неравенство заедно с (1) ни дава исканото $\overline{\varepsilon}_n(f)=2\varepsilon_n(f)$. Останалата част от теоремата се доказва напълно аналогично.

Тази теорема ни позволява да доказваме всички теореми, свързани с $\varepsilon_n(f)$ и $\overline{\varepsilon}_n(f)$ и съответните полигони на най-добро приближение, само за $\overline{\varepsilon}_n(f)$ и горните полигони, което изобщо е по-лесно, отколкото за $\varepsilon_n(f)$.

Определение 2. Ще казваме, че полигонът $\varphi(x)$ е вписан в изпъкналата функция $f(x)$, ако върховете на $\varphi(x)$ лежат на графиката на $f(x)$.

Лема 1. Нека $f(x)$ е изпъкнала функция. Тогава, ако $\varphi(x)$ е полигон от n-ти ред такъв, че $\varphi(x)\geqq f(x)$ и $\varrho(f,\varphi)<\delta$, съществува вписан изпъкнал полигон $\varphi^*(x)\in L_n$ такъв, че $\varrho(f,\varphi^*)\leqq\delta$.

Доказателство. Нека върховете на полигона $\varphi(x)$ са $(x_i,\varphi(x_i))$, $i=0,\ldots,n$. Тъй като $\varphi(x)\geqq f(x)$ и $f(x)$ е изпъкнала функция, полигонът $\varphi^*(x)$ от n-ти ред с върхове $(x_i, f(x_i))$, $i=0,\ldots,n$, ще бъде вписан, изпъкнал и ще удовлетворява неравенството

$$\varrho(f,\varphi^*)\leqq\delta.$$

Следната лема е очевидна:

Лема 2. Нека $f(x)$ е изпъкнала функция, непрекъсната отдясно в точката a и непрекъсната отляво в точката b. Нека полигонът $\varphi(x)\in L_n$ с абсциси на върховете $x_0=a$, $x_1,\ldots,x_n=b$ е вписан във функцията $f(x)$. Тогава равномерното разстояние $\varrho(f,\varphi)$ е непрекъсната функция от $x_1,\ldots,x_{n-1}$.

Теорема 2. Нека $f(x)$ е изпъкнала функция, непрекъсната отдясно в точката a и непрекъсната отляво в точката b. За всяко натурално число $n\geqq 1$ съществува полигон $\overline{\varphi}(x)\in L_n$ на най-добро горно разномерно приближение, т. е. такъв, че $\overline{\varepsilon}_n(f)=\varrho(f,\overline{\varphi})$ и $\overline{\varphi}(x)\geqq f(x)$.

Доказателство. Съществуват полигони $\varphi_m(f)\in L_n$ такива, че

$$\varrho(\varphi_m,f)<\overline{\varepsilon}_n(f)+\frac{1}{m},\quad \varphi_m(x)\geqq f(x).$$

По лема 1 тогава съществуват вписани в $f(x)$ полигони $\overline{\varphi}_m(x)\in L_n$ такива, че

$$\varrho(\overline{\varphi}_m,f)<\overline{\varepsilon}_n(f)+\frac{1}{m}\cdot \tag{2}$$

Нека абсцисите на върховете на полигона $\overline{\varphi}_m(x)$ са $x_0^{(m)}=a$, $x_1^{(m)},\ldots,x_n^{(m)}=b$. Преминавайки толкова пъти, колкото е необходимо (най-много $n-1$ пъти) в редиците $\{x_1^{(m)}\}_1^\infty$, $\{x_2^{(m)}\}_1^\infty,\ldots,\{x_{n-1}^{(m)}\}_1^\infty$ към подредици, получаваме подредици $\left\{x_1^{(m_k)}\right\}$, $\left\{x_2^{(m_k)}\right\},\ldots,\left\{x_{n-1}^{(m_k)}\right\}$ и точки $\overline{x}_i$, $i=1,\quad n-1$, такива, че

$$x_i^{(m_k)}\xrightarrow[m_k\to\infty]{}\overline{x}_i,\quad i=1,\ldots,n-1.$$

При това очевидно $\overline{x}_{i-1}\leqq\overline{x}_i$.

Да разгледаме вписания във функцията $f(x)$ полигон $\bar{\varphi}(x)$ с върхове $\bar{x}_0=a,\ \bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n=b$. От (2), $\lim\limits_{m_k\to\infty} x_i^{(m_k)}=\bar{x}_i$, $i=1,\dots,n-1$, и лема 2 следва, че

$$\varrho(\bar{\varphi}, f)\leq\bar{\varepsilon}_n(f).$$

Тъй като очевидно $\bar{\varphi}(x)\geqq f(x)$, $\bar{\varphi}(x)$ е полигон на най-добро горно приближение за $f(x)$.

Определение 3. Ще казваме, че полигонът $\varphi(x)\in L_n$ осъществява алтернанс за изпъкналата функция $f(x)$, ако са изпълнени следните условия:

полигонът $\varphi(x)$ има $n+1$ различни върха и е вписан във функцията $f(x)$;

ако x_i, $i=0,\dots,n$, са абсцисите на върховете на $\varphi(x)$, то в интервалите $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,\dots,n$, съществуват точки $\bar{x}_i$ такива, че $\varphi(\bar{x}_i)-f(\bar{x}_i)=p(f,\varphi)$.

Теорема 3. Нека $f(x)$ е изпъкнала функция, като $f(x)\bar{\in} L_n$. Ако полигонът $\varphi(x)\in L_n$ не осъществява алтернанс за функцията $f(x)$, той не е полигон от n-ти ред на най-добро горно равномерно приближение за $f(x)$.

Доказателство. Достатъчно е да разгледаме вписан полигон $\varphi(x)\in L_n$ с $n+1$ различни върха, който не осъществява алтернанс за $f(x)$, защото останалите случаи се свеждат лесно до него. Нека върховете на полигона $\varphi(x)$ са x_i, $i=0,\dots,n$. От това, че полигонът $\varphi(x)$ не осъществява алтернанс за функцията $f(x)$, следва, че съществуват число $\varepsilon>0$ и цяло число m, $0<m<n$, такива, че в m интервала $[x_{i-1}, x_i]$ равномерното разстояние между $f(x)$ и $\varphi(x)$ е $\varrho(f,\varphi)-\varepsilon$ или по-малко, а в останалите е $\varrho(f,\varphi)$. Тогава съществува интервал $[x_k, x_{k+1}]$ такъв, че в него равномерното разстояние между $f(x)$ и $\varphi(x)$ е $\varrho(f,\varphi)$, а в един от съседните му, за определеност например в $[x_{k-1}, x_k]$, разстоянието между $f(x)$ и $\varphi(x)$ е $\varrho(f,\varphi)-\varepsilon$ или по-малко. Избирайки точката $\bar{x}'_k\in[x_k, x_{k+1}]$ достатъчно близко до точката x_k, но несъвпадаща с x_k, ние можем да получим вписан полигон $\varphi(x)\in L_n$ с върхове $(x'_i, f(x'_i))$, $i=0,\dots,n$, $x'_i=x_i$ за $i=0,\dots k-1, k+1,\dots, n$, $x'_k=\bar{x}'_k$, за който ще съществува $\varepsilon_1>0$ такова, че в $m+1$ интервала $[x'_i, x'_{i+1}]$ равномерното разстояние между $f(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$ ще бъде по-малко или равно на $p(f,\varphi)-\varepsilon_1$, а в останалите е равно на $p(f,\varphi)$. Продължавайки така, очевидно стигаме до полигон $\varphi^*\in L_n$, вписан в $f(x)$ и такъв, че $\varrho(\varphi^*, f)<\varrho(\varphi, f)$.

Следователно $\varphi(x)$ не е полигон от n-ти ред на най-добро горно равномерно приближение.

Забележка. Лесно може да се види, че може да съществува само един полигон $\varphi(x)\in L_n$, който осъществява алтернанс за функцията $f(x)$.

От тази забележка и теореми 2 и 3 следва

Теорема 4. Нека $f(x)$ е изпъкнала функция, непрекъсната отдясно в точката a и отляво в точката b. Съществува единствен полигон $\varphi(x)\in L_n$ на най-добро горно равномерно приближение. Той се характеризира с осъществяването на алтернанс за функцията $f(x)$.

Следващата теорема позволява да се оцени $\bar{\varepsilon}_n(f)$ отдолу:

Теорема 5. Нека $f(x)$ е изпъкнала функция. Нека $\varphi(x) \in L_n$, $\varphi(x) \geq f(x)$ и абсцисите на върховете на $\varphi(x)$ са x_i, $i=0, \ldots, n$. Да означим

$$\varrho_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - \varphi(x)|, \quad i=1, \ldots, n.$$

Тогава

$$\bar{\varepsilon}_n(f) \geq \min_i \varrho_i.$$

В горното неравенство равенство имаме тогава и само тогава, когато всичките ϱ_i, $i=1, \ldots, n$, са равни помежду си

Доказателство. Да предположим, че имаме

(3) $$\min_i \varrho_i > \bar{\varepsilon}_n(f).$$

По теорема 4 полигонът $\bar{\varphi}(x)$ от n-ти ред на най-добро горно равномерно приближение осъществява алтернанс. Нека абсцисите на върховете му са $\bar{x}_i$, $i=0, \ldots, n$. Тогава от изпъкналостта на $f(x)$ и (3) ще следва $\bar{x}_1 < x_1$. От $\bar{x}_1 < x_1$, изпъкналостта на $f(x)$ и (3) следва $\bar{x}_2 > x_2$ и т. н. Стигаме до противоречието $\bar{x}_n = b < x_n = b$, с което първата част от теоремата е доказана.

Да допуснем, че съществува ϱ_k такова, че

(4) $$\varrho_k > \min_i \varrho_i.$$

Ако допуснем, че $\bar{\varepsilon}_n(f) = \min \varrho_i$, то от това, изпъкналостта на $f(x)$ и (4) отново ще следва, че $\bar{x}_k < x_k$, откъдето отново ще стигнем до противоречието $\bar{x}_n = b < x_n = b$.

С това теорема 5 е доказана.

Нека отбележим, че теореми 2, 3, 4 и 5 са напълно аналогични на съответните теореми за Чебишевите приближения на непрекъснати функции с алгебрични полиноми.

§ 3. Сега ще намерим оценки за най-добрите равномерни приближения.

Определение 4. Ще казваме, че изпъкналата функция $f(x)$, определена на интервала $[a, b]$, принадлежи към класа $K[\Phi, \Psi]$, ако в точката $(a, f(a))$ притежава опорна права с ъглов коефициент Φ, а в точка $(b, f(b))$ притежава опорна права с ъглов коефициент Ψ. При това ще считаме, че $-\infty < \Phi < \Psi < \infty$.

Нашата задача ще бъде да намерим оценка за

$$\bar{E}_n(K) = \sup_{f \in K[\Phi, \Psi]} \bar{\varepsilon}_n(f).$$

Освен това ще покажем, че съществува функция $f^*(x) \in K[\Phi, \Psi]$, за която

(5) $$\bar{\varepsilon}_n(f^*) = \bar{E}_n(K),$$

която е единствена с точност до адитивна константа и ще я намерим.

Нека функцията $f(x) \in K[\Phi, \Psi]$ и $\varphi(x) \in L_n$ е полигонът от n-ти ред на най-добро горно равномерно приближение за $f(x)$. Нека абсцисите на върховете на $\varphi(x)$ са $x_0=a$, $x_1, \dots, x_n=b$. От теорема 4 следва, че $f(x_i) = \varphi(x_i)$, $i=0, \dots, n$, и във всеки интервал $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$, съществува точка $\bar{x}_i$ такава, че

$$\varphi(\bar{x}_i)-f(\bar{x}_i)=\varrho(f, \varphi)=\bar{\varepsilon}_n(f).$$

В точките $(x_i, f(x_i))$, $i=1, \dots, n-1$, прекарваме опорни прави за $f(x)$. От точка $(a, f(a))$ прекарваме опорна права за $f(x)$ с ъглов коефициент Φ, а от точка $(b, f(b))$ прекарваме опорна права за $f(x)$ с ъглов коефициент Ψ. Така прекараните прави ни определят полигон $g(x)$ от ред $n+1$. Очевидно $g(x) \leqq f(x)$, следователно във всеки от интервалите $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \dots, n$, ще имаме

$$\bar{\varepsilon}_n(f)=\varrho(f, \varphi) \leqq \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |\varphi(x)-g(x)|=\varrho_i, \tag{6}$$

като равенство за всяко i от 1 до n в (6) ще имаме точно когато $g(x) = f(x)$. По теорема 5 тогава

$$\bar{\varepsilon}_n(f) \leqq \bar{\varepsilon}_n(g),$$

като равенство ще имаме точно точно тогава, когато $g(x)=f(x)$.

От това веднага следва, че ако съществува функция $f^*(x) \in K[\Phi, \Psi]$, за която е изпълнено (4), тя трябва да бъде полигон от ред $n+1$. Ние малко по-нататък ще докажем съществуването на такава функция и ще я намерим, а сега ще намерим оценка за $\varrho(f, \varphi)$.

Да означим с K_i ъгловия коефициент на опорната права към $f(x)$, прекарана през точката $(x_i, f(x_i))$, $i=1, \dots, n-1$; $K_0=\Phi$, $K_n=\Psi$.

Да пресметнем в интервала $[x_{i-1}, x_i]$ равномерното разстояние между $g(x)$ и $\varphi(x)$. Ако означим с α абсцисата на пресечната точка на опорните прави с ъглови коефициенти K_{i-1} и K_i, получаваме

$$\varrho_i = \begin{cases} \left[-\dfrac{(x_i-\alpha)^2}{[x_i-x_{i-1}]}+(x_i-\alpha)\right](K_i-K_{i-1}) & \text{при } K_{i-1}<0, \\ \left[-\dfrac{(\alpha-x_{i-1})^2}{[x_i-x_{i-1}]}+(\alpha-x_i)\right](K_i-K_{i-1}) & \text{при } K_{i-1}>0. \end{cases}$$

Следователно

$$\bar{\varepsilon}_n(f)=\varrho(f, \varphi) \leqq \inf \varrho_i \leqq \inf \frac{[x_i-x_{i-1}](K_i-K_{i-1})}{4}.$$

Оттук следва, че задачата за оценка на $\bar{\varepsilon}_n(f)$ отгоре се свежда до следната: да се намери $\sup \inf\limits_i \frac{a_i b_i}{4}$ при условия

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = b-a, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = \Psi-\Phi.$$

Очевидно е нейното решение:

$$\sup \inf_i \frac{a_i b_i}{4} = \frac{(b-a)(\Psi-\Phi)}{4n^2},$$

като (7) се достига точно за

$$a_i=\frac{b-a}{n},\quad b_i=\frac{\Psi-\Phi}{n}.$$

Оттук получаваме следната оценка:

$$\sup_{f\in K[\Phi,\,\Psi]}\bar{\varepsilon}_n(f)\leqq\frac{(b-a)(\Psi-\Phi)}{4n^2}.$$

Сега ще покажем, че съществува функция $f^*(x)\in K[\Phi,\Psi]$ такава, че

$$\bar{\varepsilon}_n(f^*)=\frac{(b-a)(\Psi-\Phi)}{4n^2}.$$

Да разгледаме функцията $f^*(x)\in K[\Phi,\Psi]$, построена по следния начин: $f^*(x)$ представлява полигон от ред $n+1$ с върхове (x_i, y_i), където

$$x_0=a;\ x_i=a+\frac{(b-a)(2i-1)}{2n},\quad i=1,\dots,n;\ x_{n+1}=b;$$

(8) $$y_0=0;\ y_1=\frac{b-a}{2n}\Phi;\ y_{n+1}=\frac{\Psi+\Phi}{2}(b-a);$$

$$y_i=\frac{b-a}{2n}\Phi+\left(\frac{(i-1)i\Psi+(2n-i)(i-1)\Phi}{2n^2}\right)(b-a),\quad i=2,\dots,n.$$

Лесно може да се провери, че полигонът φ от n-ти ред на най-добро горно равномерно приближение за $f^*(x)$ има абсциси $x_i=a+\frac{i(b-a)}{n}$, $i=0,\dots,n$, и следователно удовлетворява

$$\bar{\varepsilon}_n(f^*)=\varrho(f^*,\varphi)=\frac{(b-a)(\Psi-\Phi)}{4n^2}.$$

При това в (7) sup се достига само за $a_i=\frac{b-a}{n}$, $b_i=\frac{\Psi-\Phi}{n}$ и следователно само за функции от вида $\tilde{f}(x)=f^*(x)+C$, където C е произволна константа, можем да имаме

$$\tilde{\varepsilon}_n(\tilde{f})=\frac{(b-a)(\Psi-\Phi)}{4n^2}.$$

С това е доказана

Теорема 6. За всяко натурално n е изпълнено

$$\sup_{f\in K[\Phi,\,\Psi]}\bar{\varepsilon}_n(f)\leqq\frac{(b-a)(\Psi-\Phi)}{4n^2}.$$

Съществува единствена с точност до адитивна константа функция $f^*(x)\in K[\Phi,\Psi]$ такава, че

(9) $$\bar{\varepsilon}_n(f^*)=\frac{(b-a)(\Psi-\Phi)}{4n^2}.$$

Функцията $f^*(x)$ представлява полигон от ред $n+1$ с върхове точките (x_i, y_i), където x_i и y_i са определени чрез (8).

Забележка. Веднага се вижда, че ако $\Phi=-\Psi$, функцията $f^*(x)$, за която е изпълнено (9), е симетрична относно средата на интервала $[a, b]$.

§ 4. Сега да преминем към оценките за най-добрите приближения относно хаусдорфово разстояние. Тези оценки се получават съвсем аналогично на оценките за апроксимиране на изпъкнали равнинни фигури с многоъгълници, получени в [3], [4]. Ето защо ще бъдем съвсем кратки.

Теорема 7. Нека $f(x)$ е изпъкнала функция и $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\leq M$. Тогава

$$\overline{\varepsilon}_n^*(f)\leq\frac{2M+(b-a)}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}. \tag{10}$$

Доказателство. Да означим $\delta=\frac{2M+(b-a)}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}$. Намираме точка $x_1\in[a,b]$ такава, че в интервала $[a,x_1]$ хаусдорфовото разстояние между $f(x)$ и отсечката, прекарана през точките $(a,f(a))$ и $(x_1,f(x_1))$, е точно δ. Нека отбележим, че ако за всяка точка $x_1\in[a,b]$ съответното разстояние е по-малко от δ, оценката (10) е очевидна.

След това построяваме точка $x_2\in[x_1,b]$ такава, че в интервала $[x_1,x_2]$ хаусдорфовото разстояние между $f(x)$ и отсечката, свързваща точките $(x_1,f(x_1))$ и $(x_2,f(x_2))$, е точно δ. Продължавайки така, ние можем да стигнем до два случая:

А) Съществува точка x_k, $k\leq n-1$, такава, че в интервала $[x_k,b]$ хаусдорфовото разстояние между $f(x)$ и отсечката, която свързва точките $(b,f(b))$ и $(x_k)),f(x_k))$, е δ или по-малко. В този случай вписаният в полигон $\varphi(x)\in L_n$, чиито върхове имат абсциси в точките $x_0=a$, $x_1,\ldots,x_k$, $x_{k+1}=b$, удовлетворява (10).

Б) Точката x_{n-1} е такава, че в интервала $[x_{n-1},b]$ хаусдорфовото разстояние между $f(x)$ и отсечката, свързваща точките $(x_{n-1},f(x_{n-1}))$ и $(b,f(b))$, е $\delta_1>\delta$. Ние ще покажем, че този случай е невъзможен, откъдето ще следва теоремата.

Да допуснем, че имаме Б). Тогава от дефиницията на хаусдорфово разстояние между функции следва, че в интервалите $[x_i,x_{i+1}]$ съществуват точки $\overline{x}_i$, $i=0,\ldots,n-1$, такива, че при $i<n-1$ евклидовото разстояние между $(\overline{x}_i,f(\overline{x}_i))$ и отсечката през точките $(x_i,f(x_i))$ и $(x_{i+1},f(x_{i+1}))$ е по-голямо или равно на δ, а евклидовото разстояние между точката $(x_{n-1},f(x_{n-1}))$ и отсечката, свързваща точките $(x_{n-1},f(x_{n-1}))$ и $(b,f(b))$, е по-голямо или равно на $\delta_1>\delta$. Означавайки

$$A_i=(x_i,f(x_i)),\quad B_i=\overline{x}_i,f(\overline{x}_i)),\quad x_n=b,$$

$$\sphericalangle A_{i+1}A_iB_i=\alpha_i,\quad \sphericalangle A_iA_{i+1}B_i=\alpha_i',$$

получаваме

$$\delta\left[\frac{1}{\sin\alpha_i}+\frac{1}{\sin\alpha_i'}\right]\leq A_iB_i+B_iA_{i+1},\quad i=0,\ldots,n-2;$$

$$\delta_1\left[\frac{1}{\sin\alpha_{n-1}}+\frac{1}{\sin\alpha_{n-1}'}\right]\leq A_{n-1}B_{n-1}+B_{n-1}A_n.$$

Сумирайки по i от 0 $n+1$ и използвайки, че

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_i')\leqq\pi,\quad 0<a_i\leqq\frac{\pi}{2},\quad 0<a_i'\leqq\frac{\pi}{2},$$

и изпъкналостта на функцията $1/\sin x$ в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, получаваме исканото противоречие:

$$2M+(b-a)=\delta\frac{2n}{\sin\frac{\pi}{2n}}<\sum_{i=0}^{n-1}(B_iA_i+B_iA_{i+1})\leqq 2M+(b-a).$$

По аналогичен метод за $\varepsilon_n^*(f)$ се получава оценката

$$\varepsilon_n^*(f)\leqq\frac{2M+|b-a|}{2n}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}+\frac{n+1}{n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}\right]^{-1}$$

§ 5. Нека сега разгледаме съвкупността Z от всички изпъкнали функции в интервала $[a, b]$, които са непрекъснати отдясно в точката a, отляво в точката b и в тях притежават опорни прави с ъглови коефициенти съответно — ψ_f' и ψ_f, $0<\psi_f'<\pi/2$, $0<\psi_f<\pi/2$ (ψ_f' и ψ_f изобщо са различни за различните функции от Z).

Теорема 9. Нека функцията $f(x)$ се представя като линейна комбинация от функции от Z. Тогава

$$2\varepsilon_n(f)=\bar{\varepsilon}_n(f)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

Доказателство. Нека функцията $f(x)$ има представяне

$$f(x)\sum_{i=1}^{m}\beta_i f_i(x);\quad f_i(x)\in Z;\quad i=1,\ldots,m,$$

където $m<\infty$, и нека функциите $f_i(x)$ имат в точките a и b опорни прави с ъглови коефициенти съответно $-\psi_i'$ и ψ_i, $0<\psi_i'<\pi/2$, $0<\psi_i<\pi/2$. Нека $\varphi_i(x)$ са полигоните на най-добро горно равномерно приближение от ред n за функциите $f_i(x)$. Очевидно сборът $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ на два полигона $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ от ред n_1 и n_2 е полигон от ред n_1+n_2, следователно

$$\bar{\varepsilon}_{nm}(f)\leqq\varrho\left(f(x), \sum_{i=1}^{m}\beta_i\varphi_i\right)\leqq\sum_{i=1}^{m}|\beta_i|\varrho(f_i, \varphi_i),$$

откъдето следва исканото

$$\bar{\varepsilon}_n(f)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл. и Б. Пенков. ε-ентропия и ε-капацитет на пространството на непрекъснатите функции. Известия на Мат. инст. при БАН, **6**, 1962, 27—50.
2. Сендов, Бл. Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак, **55**, 1962, 1—39.
3. Попов, В. Аппроксимация выпуклых фигур. Доклады БАН, **21**, № 10, 1968, 993—995.
4. Попов, В. Апроксимиране на изпъкнали множества. Известия на Мат. инст. при БАН, **11**, 1970.
5. Попов, В. Аппроксимация выпуклых функций полигонами. Доклады БАН (под печат),

Постъпила на 26. XI. 1968 г.

АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ ЛОМАННЫМИ

Васил А. Попов

(Резюме)

В работе доказываются результаты, сообщенные в [5]. Рассматривается аппроксимация выпуклых функций и функций ломанными относительно равномерного и хаусдорфова расстояния между функциями.

Найдены некоторые характеристики ломанных наилучшего равномерного приближения — существование, единственность, осуществление соответствующего альтернанса.

Найдены точные по порядку оценки лучших приближений относительно равномерного и хаусдорфова расстояния. Порядок приближений $O(1/n^2)$.

APPROXIMATION OF CONVEX FUNCTIONS WITH POLYGONS

Vasil A. Popov

(Summary)

The results announced in [5] are proved in this paper. The author considers the approximation by polygons (partially linear continuous functions) both of convex functions and of functions represented as linear combinations of convex functions, with respect to the uniform and Hausdorff distance between the functions.

Some characteristics are found of the polygons of best uniform approximation, namely existence, uniqueness, realizaton of the corresponding alternation.

Exact order estimates are obtained for the best approximations with respect to the uniform and Hausdorff distance. The approximation order is $O(1/n^2)$.