БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

ГЕОМЕТРИЧНО ТЪЛКУВАНЕ НА ЛИНИИТЕ НА КРИВИНАТА ВЪРХУ ПОВЪРХНИНИТЕ В ХИПЕРБОЛИЧНОТО ДВУОСНО ПРОСТРАНСТВО

Иван Иванов

В [1] дадохме диференциално-геометричния апарат за изучаване на повърхнините в хиперболичното двуосно пространство. След съответните разглеждания [1] за уравненията на производните на върховете на тетраедъра T, свързан с повърхнината S, получаваме

$$
\begin{aligned}
&M_{1u}=aM_1, && M_{3u}=FM_1+aM_3,\\
&M_{1v}=\beta M_1+M_3, && M_{3v}=BM_1-3\beta M_3,\\
&M_{2u}=aM_2+M_4, && M_{4u}=AM_2-3aM_4,\\
&M_{2v}=\beta M_2, && M_{4v}=FM_2+\beta M_4,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

при което точката M от повърхнината S се представя със зависимостта

$$M=M_1+M_2. \tag{2}$$

Да означим с

$$
\begin{aligned}
m_1&=(M_2M_4M_3),\\
m_2&=(M_1M_3M_4),\\
m_3&=(M_1M_2M_4),\\
m_4&=(M_1M_3M_2)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

равнините на тетраедъра T, свързан с S, където $(M_2M_4M_3)$ и т. н. означават външните произведения на съответните точки [2]. Както се вижда, всяка равнина m_i, $i=1, 2, 3, 4$, носи номера на съответния си противоположен връх $M_i \in T$. Уравнението на допирателната равнина m към S в M ще бъде поради (2) и (3)

$$m=(MM_4M_3)=m_1+m_2. \tag{4}$$

Тогава, като използваме (1), за уравненията на производните на основните равнини m_i, $i=1, 2, 3, 4$, от (3) получаваме

$$m_{1u}=Fm_3-am_1, \qquad m_{3u}=-am_3,$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} m_{1v} &= Bm_3-\beta m_1, & m_{3v} &= 3\beta m_3+m_1 \\ m_{2u} &= Am_4-am_2, & m_{4u} &= 3am_4+m_2, \\ m_{2v} &= -Fm_4-\beta m_2. & m_{4v} &= -\beta m_4. \end{aligned}$$

Петте коефициента A, B, F, a, β са свързани със зависимостите (вж. [1])

$$(6)\qquad \begin{aligned} a_v &= -\beta_u=\frac{1}{2}F, \\ F_v-B_u &= -4\beta F, \\ A_v+F_u &= -4aF. \end{aligned}$$

Тогава намерените в [1] две квадратични форми

$$(7)\qquad \begin{aligned} &Adu^2+Bdv^2, \\ &Fdudv \end{aligned}$$

определят повърхнината S с точност до една B-колинеация.

Ако формално вземем якобиана на (7) и приравним на нула, ще получим при $F\neq 0$ уравнението

$$(8)\qquad Adu^2-Bdv^2=0,$$

което съответствува в евклидовото пространство на уравнението на линиите на кривината. По аналогия линиите върху S в хиперболичното двуосно пространство, определени с (8), ще наричаме също линии на кривината.

Да вземем една двукратно гладка крива линия C: $M=M(q)$ върху повърхнината S. Допирателната права към C в M лежи в допирателната равнина m към S в M. Тогава е в сила следната

Теорема. *Уравнението (8) е необходимо и достатъчно условие равнината d^2m да минава през пресечната точка $M\in S$ на равнините m, dm, m_3, или все едно m, dm, m_4.*

Необходимост: Условието равнината d^2m да минава през M е

$$(9)\qquad (mdmd^2mm_3)=0.$$

От (5) имаме поради (4)

$$(10)\qquad \begin{aligned} m_u &= Fm_3-Am_4-am, \\ m_v &= Bm_3+Fm_4-\beta m, \\ m_{uu} &= (F_n-2aF)m_1-(A_u+2aA)m_2-Am_4-(\sigma_u+a^2)m, \\ m_{uv} &= (F_v+3\beta F-aB)m_1-(A_v-\beta A+aB)m_2-(a_v-a\beta)m, \\ m_{vv} &= (B_v+2\beta B)m_1+(F_v-2\beta F)m_2+Bm_3-(B_v+\beta^2)m. \end{aligned}$$

От (10) намираме

$$(11)\qquad \begin{aligned} dm &= (Fdu+Bdv)m_3+(Fdv-Adu)m_4-(adu+\beta dv)m, \\ d^2m &= \lambda m_3+\mu m_4+\nu m-Ad^2um_2+Bdv^2m_1, \end{aligned}$$

където λ, μ, ν са коефициенти, които за случая не играят роля. Заместваме в (9) и след съответните преработки получаваме

$$(mdmd^2mm_3)=(Adu-Fdv)(Adu^2-Bdv^2)(m_1m_2m_3m_4)=0. \tag{12}$$

Ако заместим в

$$(mdmd^2mm_4)=0, \tag{13}$$

ще получим

$$(mdmd^2mm_4)=(Fdu+Bdv)(Adu^2-Bdv^2)(m_1m_2m_3m_4)=0. \tag{14}$$

Понеже разглежданията правим по отношение неизроден тетраедър T, то $(m_1m_2m_3m_4)\neq 0$ и (12) и (14) преминават в

$$(Adu-Fdv)(Adu^2-Bdv^2)=0, \tag{15}$$

$$(Fdu+Bdv)(Adu^2-Bdv^2)=0. \tag{16}$$

Ако уравнението на асимптотичните линии върху S (вж. [1])

$$Adu^2-2Fdudv-Bdv^2=0$$

представим във вида

$$(Adu-Fdv)du=(Fdu+Bdv)dv$$

и изключим от разглеждане параметричните линии $u(v=\text{const})$ и $v\,(u=\text{const})$, то в кое да е от равенствата (15) и (16) допускането $Adu-Bdv\neq 0$, съответно $Fdu+Bdv\neq 0$, с които изключваме от разглеждане праволинейните повърхнини, води до уравнението

$$Adu^2-Bdv^2=0.$$

С това е дадено геометричното тълкуване на последното, формулирано в теоремата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ivanov, I. Flächen in der zweiachsigen Geometrie. Compt. Rend. Acad. bulg. Sci., **14**, 1961, No. 1, 11—13.
2. Фиников, С. П. Теория конгруенций. Москва, 1956.
3. Иванов, Ив., Г. Станилов. Геометрические толкования некоторых дифференциальных форм и инвариантов в биаксиальной геометрии. Доклады БАН, **18**, 1965, № 7, 601—602.

Постъпила на 1. 2. 1969 г.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЛКОВАНИЕ ЛИНИЙ КРИВИЗНЫ НА ПОВЕРХНОСТЯХ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ДВУОСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Иван Иванов

(Резюме)

Используя дифференциально-геометрический аппарат для поверхностей в гиперболическом двуосном пространстве [1], дается геометрическое толкование найденных в [1] линий кривизны. Об их уравнении (8) показывается, что оно является необходимым и достаточным условием для того, чтобы плоскость d^2m проходила через точку $M \in S$ пересечения плоскостей m, dm, m_3 или m, dm, m_4.

GEOMETRISCHE DEUTUNG DER KRÜMMUNGSLINIEN AUF DEN FLÄCHEN IM ZWEIACHSIGEN HYPERBOLISCHEN RAUM

Ivan Ivanov

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit wird eine geometrische Deutung der in [1] gefundenen Krümmungslinien gegeben, indem der differential-geometrische Apparat zur Behandlung der Flächen im zweiachsigen hyperbolischen Raum benützt wird [1]. Für ihre Gleichung (8) wird gezeigt, daß sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Ebene d^2m durch den Schnittpunkt $M \in S$ der Ebenen m, dm, m_3, oder gleichfalls m, dm, m_4, hindurchgeht.