БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

НЯКОИ СЛУЧАИ ЗА СЪЩЕСТВУВАНЕ И КОНСТРУИРАНЕ НА ПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЯ НА ЕДИН КЛАС ОТ НЕЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ С МАЛЪК ПАРАМЕТЪР, СВЪРЗАНИ С ПОЛИНОМИ ОТ ОПРЕДЕЛЕН ВИД

Спас Манолов

§ 1. Нека е дадена съвкупността от нелинейни и автономни системи от диференциални уравнения

$$(1.1)\quad \ddot{\psi}_i=\sum_{s=1}^{n} c_{is}\psi_s\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{2k}g_{ik}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dots, \dot{\psi}_n), \quad i=1, 2, 3, \dots, n,$$

при предположение, че функциите $g_{ik}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dots, \dot{\psi}_n)$ са аналитични и удовлетворяват зависимостите

$$(1.2)\quad g_{ik}(-\psi_1, -\psi_2, \dots, -\psi_n, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dots, \dot{\psi}_n) = -g_{ik}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dots, \dot{\psi}_n).$$

При това отбелязаните в (1.1) развития по степените на параметъра λ^2 са по условие сходящи за достатъчно малки по абсолютна стойност стойности на този параметър.

В [4] са отбелязани изследвания върху механични системи, движенията на които се описват от системи диференциални уравнения от вида (1.1), придружени от условията за асиметрия (1.2). Тези изследвания се основават на редица основни резултати, получени от Брадистилов [1]. В [5] е дадена библиографска справка за редица автори (Cesari, Hale, Gambill, Красносельский и Перов, Heinbockel и Struble и др.) с интересни изследвания върху системи, десните страни на които притежават свойства, подобни и по-общи от отбелязаните в (1.2). Някои от казаните по-горе изследвания са посочени в основната монография [3].

Поради зависимостите (1.2) за класа от системи (1.1) е в сила следната

Теорема 1. Ако $\psi_i(t)$, $i=1, 2, 3, \dots, n$, е решение на (1.1), което в началния момент $t=0$ е равно на нула, и ако освен това $\psi_i(q)=0$, където q е положителна константа, то $\psi_i(t)$ е периодично решение с период, равен на $2q$.

Посоченото в горната теорема достатъчно условие за периодичност е използвано при третирането на механични динамични проблеми най-напред от Брадистилов, а след това и от други автори (вж. по-подробно в [4] и [5]). Освен това в [4] е дадено едно аналитично разглеждане на теорема 1.

Да означим с (1.1_2) системата (1.1) в случая $n=2$, а с (1.1_{20}) системата, която се получава от (1.1_2) при $\lambda^2=0$. Ще предполагаме, че характеристичното уравнение $(c_{11}-\varrho^2)(c_{22}-\varrho^2)-c_{12}c_{21}=0$ на системата (1.1_{20}) има спрямо ϱ^2 два различни и отрицателни корена $(-1)k_i^2$, $i=1, 2$, за които* отношението $k_1:k_2$ е цяло число $k>1$, т. е. $k_1=kk_2$. От друга страна, означаваме с $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2})$, $i=1, 2$, кое да е ненулево решение на линейната хомогенна система

$$(1.3)\qquad (c_{11}+k_i^2)\lambda^{(1)}+c_{12}\lambda^{(2)}=0,\quad c_{21}\lambda^{(1)}+(c_{22}+k_i^2)\lambda^{(2)}=0$$

при отбелязаната по-горе връзка между числата k_1 и k_2.

Нека $\psi_{i0}(t)$ е решение на системата (1.1_{20}), което се получава при начални условия $\psi_{i0}(0)=0$ и $\dot{\psi}_{i0}(0)=p_i+q_iN$. Тук N е параметър, чиито възможни стойности ще бъдат определени по-късно, а числата p_i и q_i приемат според това, кой от четирите случая I, II, III и IV разглеждаме, стойностите

$$(1.4)\qquad \begin{aligned} &\text{I}: p_i=\lambda_{1i},\ q_i=k\lambda_{2i}; &&\text{II}: p_i=\lambda_{2i},\ q_i=k\lambda_{1i};\\ &\text{III}: p_i=\lambda_{1i},\ q_i=\frac{1}{k}\lambda_{2i}; &&\text{IV}: p_i=\lambda_{2i},\ q_i=\frac{1}{k}\lambda_{1i}.\end{aligned}$$

След пресмятания за функциите $\psi_{i0}(t)$ се установява формулата

$$(1.5)\qquad \psi_{i0}(t)=r_i\sin kk_2t+s_i\sin k_2t,\quad i=1, 2,$$

където коефициентите r_i и s_i се определят съответно от равенствата

$$(1.6)\qquad \begin{aligned} &\text{I}: r_i=\frac{1}{kk_2}\lambda_{1i},\ s_i=\frac{kN}{k_2}\lambda_{2i}; &&\text{II}: r_i=\frac{N}{k_2}\lambda_{1i},\ s_i=\frac{1}{k_2}\lambda_{2i};\\ &\text{III}: r_i=\frac{1}{kk_2}\lambda_{1i},\ s_i=\frac{N}{kk_2}\lambda_{2i}; &&\text{IV}: r_i=\frac{N}{k^2k_2}\lambda_{1i},\ s_i=\frac{1}{k_2}\lambda_{2i}.\end{aligned}$$

Нека $P_i(t)$ е онова решение на пораждащата периодични решения система (1.1_{20}), което притежава начални условия $P_i(0)=0$ и $\dot{P}_i(0)=q_i$. Тогава

$$(1.7)\qquad \begin{aligned} &\text{I, III}: P_i(t)=x_{1i}\sin k_2t, &&\text{I}: x_{1i}=\frac{\lambda_{2i}k}{k_2}, &&\text{III}: x_{1i}=\frac{\lambda_{2i}}{kk_2};\\ &\text{II, IV}: P_i(t)=x_{2i}\sin kk_2t, &&\text{II}: x_{2i}=\frac{\lambda_{1i}}{k_2}, &&\text{IV}: x_{2i}=\frac{\lambda_{1i}}{k^2k_2}.\end{aligned}$$

В [4] е доказана следната теорема 2, като по подходящ начин е използвано условие за периодичност от теорема 1.

Теорема 2. Нека параметърът N удовлетворява уравнението

$$(1.8)\qquad (\varepsilon r_1k-s_1)Q_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-(\varepsilon r_2k-s_2)Q_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=0$$

и условието

$$(1.9)\qquad \begin{aligned} &\text{I, III}: (\varepsilon r_1k-s_1)R_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-(\varepsilon r_2k-s_2)R_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)+x_{12}Q_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-x_{11}Q_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\neq0,\\ &\text{II, IV}: (\varepsilon r_1k-s_1)R_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-(\varepsilon r_2k-s_2)R_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)+\varepsilon x_{21}kQ_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-\varepsilon x_{22}kQ_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\neq0.\end{aligned}$$

* С $(-k_2^2)$ е означен по-големият от двата корена.

Тогава решението $\psi_i(t)$ на системата (1.1_2) при начални условия $\psi_i(0)=0$ и $\dot{\psi}_i(0)=p_i+q_i(N+\beta(\lambda^2))$ е периодично с период $\frac{2}{k_2}(\pi+\delta(\lambda^2))$. Числото ε е равно на $+1$ или -1 в зависимост от това, дали k е четно или нечетно.

Тук $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ са достатъчно малки по абсолютна стойност функции на малкия параметър λ^2, като $\beta(0)=\delta(0)=0$. Освен това функциите $Q_i(t)$ са решение на линейната нехомогенна система

$$\ddot{Q}_i=c_{i1}Q_1+c_{i2}Q_2+g_{i1}(\psi_{10}(t),\ \psi_{20}(t),\ \dot{\psi}_{10}(t),\ \dot{\psi}_{20}(t)) \tag{1.10}$$

при начални условия $Q_i(0)=\dot{Q}_i(0)=0$. Следователно

$$Q_i(t)=\frac{\lambda_{1i}}{kk_2\Delta}\int_0^t[\lambda_{21}g_{21}(u)-\lambda_{22}g_{11}(u)]\sin kk_2(u-t)du \tag{1.11}$$

$$+\frac{\lambda_{2i}}{k_2\Delta}\int_0^t[\lambda_{12}g_{11}(u)-\lambda_{11}g_{21}(u)]\sin k_2(u-t)du,$$

където $\Delta=\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21}$. Най-сетне функциите $R_i(t)$ образуват решение при начални условия $R_i(0)=\dot{R}_i(0)=0$ на нехомогенната и линейната система

$$\ddot{R}_i=c_{i1}R_1+c_{i2}R_2+\bar{g}_{i1}(t), \tag{1.12}$$

където функциите $\bar{g}_{i1}(t)$ имат вида

$$\bar{g}_{i1}(t)=\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}(t),\ \psi_{20}(t),\ \dot{\psi}_{10}(t),\ \dot{\psi}_{20}(t))}{\partial\psi_1}P_1(t)+\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}(t),\ \psi_{20}(t),\ \dot{\psi}_{10}(t),\ \dot{\psi}_{20}(t))}{\partial\psi_2}P_2(t) \tag{1.13}$$

$$+\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}(t),\ \psi_{20}(t),\ \dot{\psi}_{10}(t),\ \dot{\psi}_{20}(t))}{\partial\dot{\psi}_1}\dot{P}_1(t)+\frac{\partial g_{i1}(\psi_{10}(t),\ \psi_{20}(t),\ \dot{\psi}_{10}(t),\ \dot{\psi}_{20}(t))}{\partial\dot{\psi}_2}\dot{P}_2(t).$$

Следователно функциите $R_i(t)$ се получават чрез формули, аналогични на (1.11), но вместо $g_{i1}(u)$ сега ще участвуват функциите $\bar{g}_{i1}(u)$ от (1.13).

Ще отбележим още, че съществената част от [4] е посветена на един начин за конструиране на периодичните решения, съществуването на които е осигурено от теорема 2, както и на съответните периоди. Оказва се, че за изпълнението на тези построявания по степените на малкия параметър λ^2 е достатъчно да бъдат удовлетворени условията на теорема 2. Това подсилва необходимостта от едно изследване на възможностите за реализиране на условията (1.8) и (1.9) при един по-конкретен избор на функциите $g_{i1}(\psi_1,\ \psi_2,\ \dot{\psi}_1,\ \dot{\psi}_2)$. В настоящата работа се разглежда този въпрос, като за $g_{i1}(\psi_1,\ \psi_2,\ \dot{\psi}_1,\ \dot{\psi}_2)$ се подбира подходящ клас от полиноми и се изследват случаите, когато цялото число k приема някои специални стойности. В [5] е направено аналогично изследване, когато тези полиноми са от втора степен и притежават свойствата, изразени чрез зависимостите (1.2). Въпросът за съществуване и конструиране на периодични решения на нелинейни системи от диференциални уравнения с полиномни десни части е интересен и поради това, че обширни класи от функции могат да бъдат апроксимирани при известни условия и с дадена точност чрез подходящи полиноми. Ето защо разглеждания на такива класи от системи диференциални уравнения се срещат в литературата. Така например в [2] са направени интересни обобщения на някои резултати на Плисс, като се разглеждат неавтономни системи с полиномни десни части от определен вид.

§ 2. Нека $g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot\psi_1, \dot\psi_2)$ е някой многочлен на $\psi_1, \psi_2, \dot\psi_1, \dot\psi_2$ от трета степен, който по-долу ще подчиним и на едно допълнително условие. Тогава функциите $g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot\psi_1, \dot\psi_2)$ имат вида

$$g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot\psi_1, \dot\psi_2)=\sum A^{(i)}_{pqrs}\psi_1^p\psi_2^q\dot\psi_1^r\dot\psi_2^s, \tag{2.1}$$

където p, q, r и s са цели неотрицателни числа, за които е изпълнено условието $0\leq p+q+r+s\leq 3$. В сумата от (2.1) участвуват произведенията, които се получават от елементите на всички комбинации с повторения на четирите елемента $\psi_1, \psi_2, \dot\psi_1, \dot\psi_2$, съответно от трети, втори, първи и нулев клас. Чрез познатата формула за броя на комбинациите с повторение от v елемента и m-ти клас

$$\frac{(v+m-1)!}{m!(v-1)!},$$

приложена при $v=4$ и $m=3, 2, 1, 0$, броят на събираемитн в сумата от (2.1) се изразява от сбора $20+10+4+1$. Следователно казаните събираеми са на брой 35. Ще подчиним полинома $g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot\psi_1, \dot\psi_2)$ на условието той да бъде нечетен относно ψ_1 и ψ_2 при запазване на $\dot\psi_1$ и $\dot\psi_2$, т. е. този полином ще удовлетворява зависимостите (1.2). Тогава е изпълнено тъждеството

$$\sum A^{(i)}_{pqrs}(-\psi_1)^p(-\psi_2)^q\dot\psi_1^r\dot\psi_2^s=-\sum A^{(i)}_{pqrs}\psi_1^p\psi_2^q\dot\psi_1^r\dot\psi_2^s.$$

Оттук следва, че $A^{(i)}_{pqrs}=0$ винаги когато $p+q$ е четно число. Следователно в сумата от (2.1) остават само тези събираеми, при които $p+q$ е нечетно. Като се вземе пред вид това и се разгледат възможните стойности и за показателите r и s, намира се окончателната формула за $g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot\psi_1, \dot\psi_2)$. В случая образуваме табл. 1 ($p+q$ е нечетно, p, q, r и s са неотрицателни цели числа, като $0\leq p+q+r+s\leq 3$), от която могат да бъдат съобразени видът на събираемите на $g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot\psi_1, \dot\psi_2)$, както и техният брой. Последният е равен на 16. Следователно 19 от събираемите в (2.1) отпадат. В табл. 1 са отбелязани с по-светли цифри тези стойности на p, q, r и s, които или се повтарят, или се определят по единствен начин, след като е направен избор на други стойности преди тях.

Таблица 1

p	q	r	s
0	**3**	0	0
0	**1**	**0**	**0, 1, 2**
0	1	**1**	**0, 1**
0	1	**2**	0
1	**2**	0	0
1	**0**	**0**	**0, 1, 2**
1	0	**1**	**0, 1**
1	0	**2**	0
2	1	0	0
3	0	0	0

Като се въведат на мястото на $A^{(i)}_{pqrs}$ по-подходящи означения, за $g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot\psi_1, \dot\psi_2)$ се установява окончателно формулата*

* c_{i1} от (2.2) и c_{i1} от (1.3) означават различни параметри. Същото се отнасяи за параметъра g_{i1} от (2.2) и функциите $g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot\psi_1, \dot\psi_2)$, както и за означението Q_i в (2.3) и (1.11).

$$g_{i1}(\psi_1,\ \psi_2,\ \dot\psi_1,\ \dot\psi_2)=a_{i1}\psi_1^3+b_{i1}\psi_2^3+c_{i1}\psi_1^2\psi_2+d_{i1}\psi_2^2\psi_1+e_{i1}\psi_1\dot\psi_2^2$$
$$+g_{i1}\psi_2\dot\psi_2^2+h_{i1}\psi_1\dot\psi_1^2+l_{i1}\psi_2\dot\psi_1^2+m_{i1}\psi_1\dot\psi_1\dot\psi_2+n_{i1}\psi_2\dot\psi_1\dot\psi_2+p_{i1}\psi_1\dot\psi_1$$
$$+q_{i1}\psi_1\dot\psi_2+r_{i1}\psi_2\dot\psi_1+s_{i1}\psi_2\dot\psi_2+u_{i1}\psi_1+v_{i1}\psi_2. \tag{2.2}$$

Като се използва (2.2) и се вземат пред вид равенствата (1.5), за участвуващите в (1.11) функции $g_{i1}(u)$ се получават равенствата

$$g_{i1}(u)=A_i\sin^3 kk_2u+B_i\sin^3 k_2u+C_i\sin^2 kk_2u\,.\sin k_2u$$
$$+D_i\sin kk_2u\,.\sin^2 k_2u+E_i\cos^2 kk_2u\,.\sin kk_2u+G_i\sin kk_2u\cos kk_2u\,.\cos k_2u$$
$$+H_i\sin kk_2u\,.\cos^2 k_2u+L_i\cos^2 kk_2u\,.\sin k_2u+M_i\cos kk_2u\,.\sin k_2u\,.\cos k_2u$$
$$+N_i\cos^2 k_2u\,.\sin k_2u+P_i\sin kk_2u\,.\cos kk_2u+Q_i\sin kk_2u\,.\cos k_2u$$
$$+R_i\cos kk_2u\,.\sin k_2u+S_i\sin k_2u\,.\cos k_2u+U_i\sin kk_2u+V_i\sin k_2u. \tag{2.3}$$

Тук за краткост са извършени полаганията

$$A_i=a_{i1}r_1^3+b_{i1}r_2^3+c_{i1}r_1^2r_2+d_{i1}r_1r_2^2,\quad B_i=a_{i1}s_1^3+b_{i1}s_2^3+c_{i1}s_1^2s_2+d_{i1}s_1s_2^2,$$
$$C_i=3a_{i1}r_1^2s_1+3b_{i1}r_2^2s_2+c_{i1}(2r_2s_1+r_1s_2)r_1+d_{i1}(2r_1s_2+r_2s_1)r_2,$$
$$D_i=3a_{i1}r_1s_1^2+3b_{i1}r_2s_2^2+c_{i1}(2r_1s_2+r_2s_1)s_1+d_{i1}(2r_2s_1+r_1s_2)s_2,$$
$$E_i=k^2k_2^2(e_{i1}r_1r_2^2+g_{i1}r_2^3+h_{i1}r_1^3+l_{i1}r_1^2r_2+m_{i1}r_1^2r_2+n_{i1}r_1r_2^2),$$
$$G_i=kk_2^2\,[2e_{i1}r_1r_2s_2+2g_{i1}r_2^2s_2+2h_{i1}r_1^2s_1+2l_{i1}r_1r_2r_1+m_{i1}(r_1s_2+r_2s_1)r_1$$
$$+n_{i1}(r_1s_2+r_2s_1)r_2],$$
$$H_i=k_2^2(e_{i1}r_1s_2^2+g_{i1}r_2s_2^2+h_{i1}r_1s_1^2+l_{i1}r_2s_1^2+m_{i1}r_1s_1s_2+n_{i1}r_2s_1s_2),$$
$$L_i=k^2k_2^2(e_{i1}r_2^2s_1+g_{i1}r_2^2s_2+h_{i1}r_1^2s_1+l_{i1}r_1^2s_2+m_{i1}r_1r_2s_1+n_{i1}r_1r_2s_2),$$
$$M_i=kk_2^2\,[2e_{i1}r_2s_1s_2+2g_{i1}r_2s_2^2+2h_{i1}r_1s_1^2+2l_{i1}r_1s_1s_2+m_{i1}(r_1s_2+r_2s_1)s_1$$
$$+n_{i1}(r_1s_2+r_2s_1)s_2],$$
$$N_i=k_2^2(e_{i1}s_1s_2^2+g_{i1}s_2^3+h_{i1}s_1^3+l_{i1}s_1^2s_2+m_{i1}s_1^2s_2+n_{i1}s_1s_2^2). \tag{2.4}$$

Освен това са въведени и съкратените записвания

$$P_i=kk_2(p_{i1}r_1^2+q_{i1}r_1r_2+r_{i1}r_1r_2+s_{i1}r_2^2),$$
$$Q_i=k_2(p_{i1}r_1s_1+q_{i1}r_1s_2+r_{i1}r_2s_1+s_{i1}r_2s_2),$$
$$R_i=kk_2(p_{i1}r_1s_1+q_{i1}r_2s_1+r_{i1}r_1s_2+s_{i1}r_2s_2),$$
$$S_i=k_2(p_{i1}s_1^2+q_{i1}s_1s_2+r_{i1}s_1s_2+s_{i1}s_2^2),$$
$$U_i=u_{i1}r_1+v_{i1}r_2,\quad V_i=u_{i1}s_1+v_{i1}s_2. \tag{2.5}$$

Стойностите на функциите $Q_i(t)$ при $t=\pi/k_2$, които участвуват в основното условие (1.8), се получават от (1.11) при $t=\pi/k_2$, след като функциите $g_{i1}(u)$ се заместят с техните равни от (2.3). Оказва се, че някои от коефициентите, участвуващи в тези равенства, няма да се появят в резултатите за $Q_i(\pi/k_2)$. Това се дължи на обстоятелството, че една част от интегралите, получени при изчисленията по (1.11) при $t=\pi/k_2$, имат стойност нула. Прочее не е трудно да се намерят формите и стойностите на казаните интеграли. След съответните разработки се установяват изложените по-долу резултати (да припомним, че k е цяло число, по-голямо или равно на 2).

1) $$\int_0^{\pi/k_2} \sin^4 kk_2u\,.\,du=\int_0^{\pi/k_2} \sin^4 k_2u\,.\,du=\frac{3\pi}{8k_2}\,;$$

2) $$\int_0^{\pi/k_2} \sin^3 k_2u\,.\sin kk_2u\,.\,du=\int_0^{\pi/k_2} \cos kk_2u\,.\sin^2 k_2u\,.\cos k_2u\,.\,du$$

$$=-\int_0^{\pi/k_2} \sin kk_2u\,.\sin k_2u\,.\cos^2 k_2u\,.\,du=\begin{cases} 0, & k\neq 3,\\ -\dfrac{\pi}{8k_2}, & k\neq 3\,;\end{cases}$$

3) $$\int_0^{\pi/k_2} \sin^3 kk_2u\,.\sin k_2u\,.\,du=\int_0^{\pi/k_2} \sin^2 kk_2u\,.\cos kk_2u\,.\,du$$

$$=\int_0^{\pi/k_2} \sin^2 kk_2u\,.\cos k_2u\,.\,du=\int_0^{\pi/k_2} \sin kk_2u\,.\sin k_2u\,.\,du=\int_0^{\pi/k_2} \sin^2 k_2u\,.\cos k_2u\,.\,du$$

$$=\int_0^{\pi/k_2} \sin^2 kk_2u\,.\cos kk_2u\,.\cos k_2u\,.\,du=\int_0^{\pi/k_2} \sin kk_2u\,.\cos^2 kk_2u\,.\sin k_2u\,.\,du \tag{2.6}$$

$$=\int_0^{\pi/k_2} \sin kk_2u\,.\cos kk_2u\,.\sin k_2u\,.\,du$$

$$=\int_0^{\pi/k_2} \sin kk_2u\,.\cos kk_2u\,.\sin k_2u\,.\cos k_2u\,.\,du=0\,;$$

4) $$\int_0^{\pi/k_2} \sin^2 kk_2u\,.\sin^2 k_2u\,.\,du=\int_0^{\pi/k_2} \sin^2 kk_2u\,.\cos^2 k_2u\,.\,du$$

$$=\int_0^{\pi/k_2} \cos^2 kk_2u\,.\sin^2 k_2u\,.\,du=\frac{\pi}{4k_2}\,;$$

5) $$\int_0^{\pi/k_2} \cos^2 kk_2u\,.\sin^2 kk_2u\,.\,du=\int_0^{\pi/k_2} \sin^2 k_2u\,.\cos^2 k_2u\,.\,du \quad \frac{\pi}{8k_2}\,;$$

6) $\int\limits_0^{\pi/k_2} \sin kk_2u \,.\, \sin k_2u \,.\, \cos k_2u \,.\, du = -\int\limits_0^{\pi/k_2} \cos kk_2u \,.\, \sin^2 k_2u \,.\, du = \begin{cases} 0 & k \neq 2, \\ \dfrac{\pi}{4k_2}, & k \neq 2; \end{cases}$

7) $$\int\limits_0^{\pi/k_2} \sin^2 kk_2u \,.\, du = \int\limits_0^{\pi/k_2} \sin^2 k_2u \,.\, du = \frac{\pi}{2k_2}\cdot$$

Като се вземат пред вид числените резултати от (2.6) и се използват равенствата (2.3), намират се величините $Q_i(\pi/k_2)$ от (1.11). След това вече лесно може да бъде получено и основното условие (1.8) за параметъра N.

§ 3. Ще разгледаме най-напред специалния случай, когато цялото число k е равно на 2. Като се следва пътят, посочен по-горе в края на § 2, за $Q_i(\pi/k_2)$ се установяват равенствата

(3.1) $$Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = \frac{\pi\lambda_{1i}}{16k_2^2.\Delta}[\lambda_{21}(3A_2+2D_2+E_2+2H_2+2S_2+4U_2)$$
$$-\lambda_{22}(3A_1+2D_1+E_1+2H_1+2S_1+4U_1)] - \frac{\pi\lambda_{2i}}{8k_2^2.\Delta}[\lambda_{12}(3B_1+2C_1+2L_1$$
$$+N_1+2Q_1-2R_1+4V_1)-\lambda_{11}(3B_2+2C_2+2L_2+N_2+2Q_2-2R_2+4V_2)].$$

Преди да заместим $Q_i(\pi/k_2)$ от (3.1) в основното условие (1.8), ще дадем по-конкретен вид на формулите (3.1). За тази цел ще намерим изразите A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, H_i, L_i, N_i, Q_i, R_i, S_i, U_i и V_i, като използваме (2.4) и (2.5). Именно в съответните равенства от (2.4) и (2.5) ще заместим r_1, r_2, s_1 и s_2 с техните равни от (1.6). Тук би трябвало да се разгледат отделно всеки един от четирите третирани случая I, II, III и IV. Да се спрем на случай I, при който имаме

(3.2) $$r_1 = \frac{\lambda_{11}}{2k_2}, \quad r_2 = \frac{\lambda_{12}}{2k_2}, \quad s_1 = \frac{2N}{k_2}\lambda_{21}, \quad s_2 = \frac{2N}{k_2}\lambda_{22}.$$

В този случай се установяват равенствата

(3.3) $$\begin{aligned} &B_i = B_i^*N^3, \quad N_i = N_i^*N^3, \quad D_i = D_i^*N^2, \quad H_i = H_i^*N^2, \quad S_i = S_i^*N^2, \\ &C_i = C_i^*N, \quad L_i = L_i^*N, \quad Q_i = Q_i^*N, \quad R_i = R_iN, \quad V_i = V_i^*N, \end{aligned}$$

в които коефициентите пред N^3, N^2 и N се определят чрез

$$B_i^* = \frac{8}{k_2^3}(a_{i1}\lambda_{21}^3 + b_{i1}\lambda_{22}^3 + c_{i1}\lambda_{21}^2\lambda_{22} + d_{i1}\lambda_{21}\lambda_{22}^2),$$

$$N_i^* = \frac{8}{k_2}(e_{i1}\lambda_{21}\lambda_{22}^2 + g_{i1}\lambda_{22}^3 + h_{i1}\lambda_{21}^3 + l_{i1}\lambda_{21}^2\lambda_{22} + m_{i1}\lambda_{21}^2\lambda_{22} + n_{i1}\lambda_{21}\lambda_{22}^2),$$

$$D_i^* = \frac{1}{k_2^3}[3a_{i1}\lambda_{11}\lambda_{21}^2 + 3b_{i1}\lambda_{12}\lambda_{22}^2 + c_{i1}(2\lambda_{11}\lambda_{22} + \lambda_{12}\lambda_{21})\lambda_{21} + d_{i1}(2\lambda_{12}\lambda_{21} + \lambda_{11}\lambda_{22})\lambda_{22}],$$

$$H_i^* = \frac{2}{k_2}(e_{i1}\lambda_{11}\lambda_{22}^2 + g_{i1}\lambda_{12}\lambda_{22}^2 + h_{i1}\lambda_{11}\lambda_{21}^2 + l_{i1}\lambda_{12}\lambda_{21}^2 + m_{i1}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22} + u_{i1}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22}),$$

$$(3.4)\quad \begin{aligned}
S_i^* &= \frac{4}{k_2}\left(p_{i1}\lambda_{21}^2+q_{i1}\lambda_{21}\lambda_{22}+r_{i1}\lambda_{21}\lambda_{22}+s_{i1}\lambda_{22}^2\right),\\
C_i^* &= \frac{1}{2k_2^3}\left[3a_{i1}\lambda_{11}^2\lambda_{21}+3b_{i1}\lambda_{12}^2\lambda_{22}+c_{i1}(2\lambda_{12}\lambda_{21}+\lambda_{11}\lambda_{22})\lambda_{11}+d_{i1}(2\lambda_{11}\lambda_{22}+\lambda_{12}\lambda_{21})\lambda_{12}\right],\\
L_i^* &= \frac{2}{k_2}\left(e_{i1}\lambda_{12}^2\lambda_{21}+g_{i1}\lambda_{12}^2\lambda_{22}+h_{i1}\lambda_{11}^2\lambda_{21}+l_{i1}\lambda_{11}^2\lambda_{22}+m_{i1}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21}+n_{i1}\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{22}\right),\\
Q_i^* &= \frac{1}{k_2}\left(p_{i1}\lambda_{11}\lambda_{21}+q_{i1}\lambda_{11}\lambda_{22}+r_{i1}\lambda_{12}\lambda_{21}+s_{i1}\lambda_{12}\lambda_{22}\right),\\
R_i^* &= \frac{2}{k_2}\left(p_{i1}\lambda_{11}\lambda_{21}+q_{i1}\lambda_{12}\lambda_{21}+r_{i1}\lambda_{11}\lambda_{22}+s_{i1}\lambda_{12}\lambda_{22}\right),\\
V_i^* &= \frac{2}{k_2}\left(u_{i1}\lambda_{21}+v_{i1}\lambda_{22}\right).
\end{aligned}$$

Освен това $A_i=A_i^*$, $E_i=E_i^*$, $U_i=U_i^*$, където изразите A_i^*, E_i^* и U_i^* се представят чрез зависимостите

$$(3.5)\quad \begin{aligned}
A_i^* &= \frac{1}{8k_2^3}\left(a_{i1}\lambda_{11}^3+b_{i1}\lambda_{12}^3+c_{i1}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+d_{i1}\lambda_{11}\lambda_{12}^2\right), \qquad U_i^*=\frac{1}{2k_2}\left(u_{i1}\lambda_{11}+v_{i1}\lambda_{12}\right),\\
E_i^* &= \frac{1}{2k_2}\left(e_{i1}\lambda_{11}\lambda_{12}^2+g_{i1}\lambda_{12}^3+h_{i1}\lambda_{11}^3+l_{i1}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+m_{i1}\lambda_{11}^2\lambda_{12}+n_{i1}\lambda_{11}\lambda_{12}^2\right).
\end{aligned}$$

Както се вижда от казаното по-горе, величините A_i, E_i и U_i не зависят от параметъра N, който взимаше участие в началните условия на периодичните решения. Не е трудно да се провери, че уравнението (1.8) за посочения параметър N съгласно формулите (3.1) приема вида

$$(3.6)\quad \begin{aligned}
&[(2r_1-s_1)\lambda_{12}-(2r_2-s_2)\lambda_{11}][\lambda_{21}(3A_2+2D_2+E_2+2H_2+2S_2+4U_2)\\
&-\lambda_{22}(3A_1+2D_1+E_1+2H_1+2S_1+4U_1)]+2[(2r_2-s_2)\lambda_{21}\\
&-(2r_1-s_1)\lambda_{22}][\lambda_{12}(3B_1+2C_1+2L_1+N_1+2Q_1-2R_1+4V_1)\\
&-\lambda_{11}(3B_2+2C_2+2L_2+N_2+2Q_2-2R_2+4V_2)]=0.
\end{aligned}$$

Като вземем пред вид (3.2), лесно намираме

$$(3.7)\quad \begin{aligned}
(2r_1-s_1)\lambda_{12}-(2r_2-s_2)\lambda_{11} &= \frac{2N}{k_2}\Delta,\\
(2r_2-s_2)\lambda_{21}-(2r_1-s_1)\lambda_{22} &= -\frac{1}{k_2}\Delta,
\end{aligned} \qquad \Delta=\lambda_{11}\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21}.$$

Използваме формулите (3.4) и (3.5), както и равенствата от (3.7). По такъв начин (3.6) придобива формата

$$(3.8)\quad \begin{aligned}
&[2\lambda_{21}(D_2^*+H_2^*+S_2^*)-2\lambda_{22}(D_1^*+H_1^*+S_1^*)+\lambda_{11}(3B_2^*+N_2^*)\\
&-\lambda_{12}(3B_1^*+N_1^*)]N^3+[\lambda_{21}(3A_2^*+E_2^*+4U_2^*)-\lambda_{22}(3A_1^*+E_1^*+4U_1^*)\\
&+2\lambda_{11}(C_2^*+L_2^*+Q_2^*-R_2^*+2V_2^*)-2\lambda_{12}(C_1^*+L_1^*+Q_1^*-R_1^*+2V_1^*)]N=0.
\end{aligned}$$

Ако означим с A и B коефициентите съответно пред N^3 и N в уравнението (3.8), условието (1.9) за случая I и при $k=2$ след съответната преработка довежда до $3AN^2+B\neq 0$.

Възможно е вече да бъде формулирана теорема, която ще съответствува на възможността $k=2$ и на случай I.

Теорема 3. Нека с (1.1_{23}) е означена нелинейната и автономна система (1.1) в случая, когато $n=2$ и функциите $g_{ik}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$ удовлетворяват релациите (1.2), като по-специално $g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$ са полиноми от вида (2.2). Предполага се, че уравнението $(c_{11}-x)(c_{22}-x)-c_{12}c_{21}=0$ има два отрицателни корена $-k_1^2$ и $-k_2^2$, като $k_1=2k_2$, а $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2})$ е някое ненулево решение на системата $(c_{11}+k_i^2)\lambda^{(1)}+c_{12}\lambda^{(2)}=0, c_{21}\lambda^{(1)}+(c_{22}+k_i^2)\lambda^{(2)}=0$. Разглежда се уравнението

$$AN^3+BN=0, \tag{3.9}$$

в което

$$\begin{aligned} A&=2\lambda_{21}(D_2^*+H_2^*+S_2^*)-2\lambda_{22}(D_1^*+H_1^*+S_1^*)+\lambda_{11}(3B_2^*+N_2^*)-\lambda_{12}(3B_1^*+N_1^*),\\ B&=\lambda_{21}(3A_2^*+E_2^*+4U_2^*)-\lambda_{22}(3A_1^*+E_1^*+4U_1^*)\\ &+2\lambda_{11}(C_2^*+L_2^*+Q_2^*+2R_2^*+2V_2^*)-2\lambda_{12}(C_1^*+L_1^*+Q_1^*-R_1^*+2V_1^*), \end{aligned} \tag{3.10}$$

където отбелязаните със звездичка величини се получават от формулите (3.4) и (3.5). Предполага се най-сетне, че $B\neq 0$. Тогава съществуват две достатъчно малки по абсолютна стойност функции $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ на малкия параметър λ^2 такива, че решението $\psi_i(t)$ на системата (1.1_{23}) при начални условия $\psi_i(0)=0$ и $\dot{\psi}_i(0)=\lambda_{1i}+2\lambda_{2i}(N_0+\beta(\lambda^2))$ е периодично с период $\frac{2}{k_2}(\pi+\delta(\lambda^2))$. Тук N_0 означава някой корен на уравнението (3.9).

Ще направим някои бележки във връзка с горната теорема. Очевидно е, че ролята на N_0 може в случая да се играе от нулата. Представлява обаче определен интерес изследването на възможностите уравнението (3.9) да има и нулево решение. На второ място трябва да се отбележи, че коефициентите на уравнението (3.9), а следователно и N_0 се изразяват в последна сметка чрез коефициентите на многочлените от (2.2) и чрез параметрите на линейната част на системата (1.1_{23}), т. е. чрез началните данни на изследвания проблем. Казаното се вижда от (3.10), както и от (3.4) и (3.5), като се вземе пред вид още и начинът, по който бяха въведени числата k_2 и $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2})$. Необходимо е най-сетне да изтъкнем, че е възможно да бъде направено конструиране по степените на λ^2 на периодичното решение от теорема 3. Достатъчно е за тази цел да се използва методът, който бе даден и обоснован в [4].

Няма да формулираме подобен резултат за случая III. Не е трудно да се провери, че и при него ще се получи уравнение от вида (3.9), но с други коефициенти A и B. Ще съществува и известна промяна в началните условия на съответното периодично решение $\psi_i(t)$. Именно сега ще имаме $\psi_i(0)=0$ и $\dot{\psi}_i(0)=\lambda_{1i}+\frac{1}{2}\lambda_{2i}(N_0+\beta(\lambda^2))$.

Да разгледаме по-подробно случай II, като не забравяме, че цялото число k все още има специалната стойност 2. Съгласно (1.6) в случая

$$r_1=\frac{N}{k_2}\lambda_{11}, \quad r_2=\frac{N}{k_2}\lambda_{12}, \quad s_1=\frac{1}{k_2}\lambda_{21}, \quad s_2=\frac{1}{k_2}\lambda_{22}. \tag{3.11}$$

Чрез (3.11) и (2.4) и (2.5) ще намерим B_i, N_i, S_i, V_i, както и A_i, E_i, C_i, L_i, D_i, H_i, Q_i, R_i и U_i. Ще използваме и въведените в (3.4) и (3.5) означения. Така намираме формулите

$$B_i=\frac{1}{8}B_i^*,\quad N_i=\frac{1}{8}N_i^*,\quad S_i=\frac{1}{4}S_i^*,\quad V_i=\frac{1}{2}V_i^*, \tag{3.12}$$

както и съотношенията

$$\begin{gathered} A_i=8A_i^*N^3,\quad E_i=8E_i^*N^3,\quad C_i=2C_i^*N^2,\quad L_i=2L_i^*N^2,\\ D_i=\frac{1}{2}D_i^*N,\quad H_i=\frac{1}{2}H_i^*N,\quad Q_i=Q_i^*N,\quad R_i=R_i^*N,\quad U_i=2U_i^*N. \end{gathered} \tag{3.13}$$

От друга страна, сега в десните страни на равенствата (3.7) ще имаме съответно $\frac{1}{k_2}\Delta$ и $\frac{-2N}{k_2}\Delta$. Като имаме пред вид това и като използваме (3.12) и (3.13), можем да намерим окончателната форма на уравнението (3.6) за разглеждания случай II. Полученият резултат ще представлява основното условие, на което трябва да бъде подчинен параметърът N. Така след преработване се намира съответното уравнение. Оказва се, че то е изобщо едно пълно уравнение от трета степен. Така доказваме следната

Теорема 4. При предположенията на теорема 3 разглеждаме уравнението

$$AN^3+BN^2+CN+D=0, \tag{3.14}$$

коефициентите на което се получават от

$$\begin{aligned} A&=16\lambda_{21}(3A_2^*+E_2^*)-16\lambda_{22}(3A_1^*+E_1^*)+32\lambda_{11}(C_2^*+L_2^*)-32\lambda_{12}(C_1^*+L_1^*),\\ B&=16\lambda_{11}(Q_2^*-R_2^*)-16\lambda_{12}(Q_1^*-R_1^*),\\ C&=2\lambda_{21}(D_2^*+H_2^*+8U_2^*)-2\lambda_{22}(D_1^*+H_1^*+8U_1^*)+\lambda_{11}(3B_2^*+N_2^*+16V_2^*)\\ &\quad-\lambda_{12}(3B_1^*+N_1^*+16V_1^*),\\ D&=\lambda_{21}S_2^*-\lambda_{22}S_1^*, \end{aligned} \tag{3.15}$$

като се използват формулите (3.4) и (3.5). Ако N_0 е прост корен на уравнението (3.14), могат да се определят $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ по такъв начин, че решението $\psi_i(t)$ на системата (1.1_{23}), получено при начални условия $\psi_i(0)=0$ и $\dot\psi_i(0)=\lambda_{2i}+2\lambda_{1i}(N_0+\beta(\lambda^2))$, да бъде периодично с период, равен на $\frac{2}{k_2}(\pi+\delta(\lambda^2))$.

Аналогичен резултат се получава и в случай IV. Ще отбележим, че и тук остават в сила кратките бележки, които бяха направени непосредствено след формулировката на теорема 3.

§ 4. Предстои да бъде разгледан вторият специален случай, когато цялото число k е равно на 3. В този случай чрез (1.11) и (2.3) и с използването и на (2.6) се установяват равенствата

$$Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=\frac{-\pi\lambda_{1i}}{24k_2^2\cdot\Delta}\left[\lambda_{21}(3A_2-B_2+2D_2+E_2+2H_2+N_2+4U_2)\right. \tag{4.1}$$

$$-\lambda_{22}(3A_1-B_1+2D_1+E_1+2H_1+N_1+4U_1)]$$

$$-\frac{\pi\lambda_{2i}}{8k_2^2\cdot\Delta}[\lambda_{12}(3B_1+2C_1-D_1+H_1+2L_1-M_1+N_1+4V_1)$$

$$-\lambda_{11}(3B_2+2C_2-D_2+H_2+2L_2-M_2+N_2+4V_2)].$$

Следователно основното условие (1.8) за параметъра N приема вида

$$[(3r_1+s_1)\lambda_{12}-(3r_2+s_2)\lambda_{11}][\lambda_{21}(3A_2-B_2+2D_2+E_2+2H_2+N_2+4U_2)$$
$$-\lambda_{22}(3A_1-B_1+2D_1+E_1+2H_1+N_1+4U_1)]+3[(3r_1+s_1)\lambda_{22}$$
$$-(3r_2+s_2)\lambda_{21}][\lambda_{12}(3B_1+2C_1-D_1+H_1+2L_1-M_1+N_1+4V_1)$$
$$-\lambda_{11}(3B_2+2C_2-D_2+H_2+2L_2-M_2+N_2+4V_2)]=0. \tag{4.2}$$

Нека r_i и s_i имат стойностите от случай I, т. е. нека са изпълнени равенствата ($k=3$)

$$r_1=\frac{1}{3k_2}\lambda_{11},\quad r_2=\frac{1}{3k_2}\lambda_{12},\quad s_1=\frac{3N}{k_2}\lambda_{21},\quad s_2=\frac{3N}{k_2}\lambda_{22}. \tag{4.3}$$

За величините, участвуващи в (4.2), се установяват съгласно (4.3) и (2.4) и (2.5) равенствата

$$B_i=\frac{27}{8}B_i^*N^3,\quad N_i=\frac{27}{8}N_i^*N^3,\quad D_i=\frac{3}{2}D_i^*N^2,\quad H_i=\frac{3}{2}H_i^*N^2,$$
$$M_i=M_i^*N^2,\quad C_i=\frac{2}{3}C_i^*N,\quad L_i=\frac{3}{2}L_i^*N,\quad V_i=\frac{3}{2}V_i^*N, \tag{4.4}$$
$$A_i=\frac{8}{27}A_i^*,\quad E_i=\frac{2}{3}E_i^*,\quad U_i=\frac{2}{3}U_i^*.$$

Тук отбелязаните със звездичка букви изразяват стойностите, дадени чрез зависимостите (3.4) и (3.5), а за M_i^* е в сила

$$M_i^*=\frac{9}{k_2}[2e_{i1}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22}+2g_{i1}\lambda_{12}\lambda_{22}^2+2h_{i1}\lambda_{11}\lambda_{21}^2+2l_{i1}\lambda_{11}\lambda_{21}\lambda_{22}$$
$$+m_{i1}(\lambda_{11}\lambda_{22}+\lambda_{12}\lambda_{21})\lambda_{21}+n_{i1}(\lambda_{11}\lambda_{22}+\lambda_{12}\lambda_{21})\lambda_{22}]. \tag{4.5}$$

Като се извършат съответните замествания на величините от (4.3) и (4.4) в (4.2), ще се получи уравнението, което се удовлетворява от N. Условието (1.9), приложено при $k=3$ и за случай I, показва, че това удовлетворяване трябва да стане еднократно. След направените по-горе изследвания е възможно да бъде формулирана

Теорема 5. Нека (1.1_{23}) е системата, отбелязана в теорема 3. Двойката (λ_{i1}, λ_{i2}) е ненулево решение на хомогенната система (1.3), в която с $-k_i^2$ са отбелязани корените на уравнението $(c_{11}-x)(c_{22}-x)-c_{12}c_{21}=0$. Предполага се, че е изпълнено равенството $k_1=3k_2$. Разглеждаме уравнението

$$AN^4+BN^3+CN^2+DN=0, \tag{4.6}$$

коефициентите на което се получават от

$$A=27\,[\lambda_{21}(B_2^*-N_2^*)-\lambda_{22}(B_1^*-N_1^*)],$$

$$B=24[\lambda_{22}(D_1^*+H_1^*)-\lambda_{21}(D_2^*+H_2^*)]+27[\lambda_{12}(3B_1^*+N_1^*)-\lambda_{11}(3B_2^*+N_2^*)],$$

$$(4.7)\qquad C=12\left[\lambda_{12}\left(H_1^*-D_1^*-\frac{2}{3}M_1^*\right)-\lambda_{11}\left(H_2^*-D_2^*-\frac{2}{3}M_2^*\right)\right],$$

$$D=\frac{16}{3}\left[\lambda_{22}\left(\frac{4}{3}A_1^*+E_1^*+4U_1^*\right)-\lambda_{21}\left(\frac{4}{3}A_2^*+E_2^*+4U_2^*\right)\right]$$

$$+24\left[\lambda_{12}\left(\frac{4}{9}C_1^*+L_1^*+2V_1^*\right)-\lambda_{11}\left(\frac{4}{9}C_2^*+L_2^*+2V_2^*\right)\right].$$

Отбелязаните със звездички величини в (4.7) се определят посредством (3.4), (3.5) и (4.5). Съществуват тогава достатъчно малките по абсолютна стойност функции $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ на малкия параметър λ^2 такива, че решението $\psi_i(t)$ на (1.1_{23}), получено при начални условия

$$\psi_i(0)=0,\quad \dot{\psi}_i(0)=\lambda_{1i}+3_{2i}(N_0+\beta(\lambda^2)),$$

е периодично с период $\frac{2}{k_2}(\pi+\delta(\lambda^2))$. Тук N_0 означава прост корен на уравнението (4.6).

Резултат, аналогичен на отбелязания в теорема 5, ще се получи и за случай III, като при него коефициентите от уравнението (4.6) ще бъдат други, а началните условия на съответното периодично решение ще бъдат

$$\psi_i(0)=0,\quad \dot{\psi}_i(0)=\lambda_{1i}+\frac{1}{3}\lambda_{2i}(N_0+\beta(\lambda^2)).$$

Вижда се от теорема 5, че ролята на N_0 може да се играе от нулата, като тогава се налага и условието $D\neq 0$. Представлява интерес откриването на възможности за съществуване и на ненулеви еднократни корени на уравнението (4.6). Да отбележим също, че коефициентите на това уравнение, а следователно и евентуалните реални и ненулеви стойности за N_0 се изразяват в последна сметка чрез коефициентите на класа полиноми от (2.2) и чрез параметрите на линейната част на изследваната нелинейна и автономна система (1.1_{23}) от диференциални уравнения. Ще изтъкнем накрая, че е възможно построяването по степените на λ^2 на периодичното решение, чието съществуване е осигурено от теорема 5. Достатъчно е за тази цел да се приложи, като се вземе пред вид и специалната форма в настоящата работа на функциите $g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$, един метод от [4].

Случаите II и IV са близки и затова ще се спрем само на случай II, когато

$$(4.8)\qquad r_1=\frac{N}{k_2}\lambda_{11},\quad r_2=\frac{N}{k_2}\lambda_{12},\quad s_1=\frac{1}{k_2}\lambda_{21},\quad s_2=\frac{1}{k_2}\lambda_{22}.$$

За величините, участващи в (4.2), се установяват съгласно (4.8), (2.4) и (2.5) равенствата

$$A_i=8A_i^*N^3,\quad E_i=18E_i^*N^3,\quad C_i=2C_i^*N^2,\quad L_i=\frac{9}{2}L_i^*N^2,$$

$$(4.9)\quad D_i=\frac{1}{2}D_i^*N,\quad H_i=\frac{1}{2}H_i^*N,\quad M_i=\frac{1}{3}M_i^*N,\quad U_i=2U_i^*N,$$

$$N_i=\frac{1}{8}N_i^*,\qquad B_i=\frac{1}{8}B_i^*,\quad V_i=\frac{1}{2}V_i^*.$$

Тук трябва да се имат пред вид формулите (3.4), (3.5), както и (4.5). Сега с използването на (4.9) и (4.8) лесно може да се получи и уравнението (4.2). Така е доказана следната.

Теорема 6. При предположенията на *теорема 5* се разглежда уравнението

$$(4.10)\qquad AN^3+BN^2+CN+D=0,$$

коефициентите на което се получават от

$$A=6[\lambda_{22}(4A_1^*+3E_1^*)-\lambda_{21}(4A_2^*+3E_2^*)]+9[\lambda_{12}(4C_1^*+9L_1^*)-\lambda_{11}(4C_2^*+9L_2^*)],$$

$$B=\frac{3}{2}[\lambda_{12}(3H_1^*-3D_1^*-2M_1^*)-\lambda_{11}(3H_2^*-3D_2^*-2M_2^*)],$$

$$(4.11)\quad C=\lambda_{22}(D_1^*+H_1^*+8U_1^*)-\lambda_{21}(D_2^*+H_2^*+8U_2^*)$$

$$+\frac{9}{8}[\lambda_{12}(3B_1^*+N_1^*+16V_1^*)-\lambda_{11}(3B_2^*+N_2^*+16V_2^*)],$$

$$D=\frac{1}{8}[\lambda_{22}(N_1^*-B_1^*)-\lambda_{21}(N_2^*-B_2^*)],$$

след като се използват формулите (3.4), (3.5) и (4.5). Тогава, ако N_0 е прост корен на кубичното уравнение (4.10), решението $\psi_i(t)$ на системата от диференциални уравнения (1.1_{23}), получено при начални условия

$$\psi_i(0)=0,\quad \dot\psi_i(0)=\lambda_{2i}+3\lambda_{1i}(N_0+\beta(\lambda^2)),$$

е периодично с период $\frac{2}{k_2}(\pi+\delta(\lambda^2))$.

При случай IV за N ще се получи уравнение, по форма еднакво с уравнението (4.10), но с други коефициенти. Освен това сега началните условия за съответното периодично решение ще бъдат

$$\psi_i(0)=0,\quad \dot\psi_i(0)=\lambda_{2i}+\frac{1}{3}\lambda_{1i}(N_0+\beta(\lambda^2)).$$

Да отбележим накрая, че и тук имат място бележките, които бяха направени по-рано след формулирането на теорема 5. Случаите, когато k е цяло число, по-голямо от 3, ще бъдат изследвани в една следваща работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bradistilov, G. Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene. Math. Ann., **116**, 1938, 181—203.
2. Чурин, Ю. В. О поведении периодических решений системы дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными правыми частями. Дифференциальные уравнения, **4**, № 10, 1968, 1821—1834.
3. Hale, J. K. Oscillations in nonlinear systems. New York, 1963.
4. Манолов, С. Периодични решения при една класа от автономни нелинейни системи и някои приложения, Год. ВТУЗ, Математика, **2**, кн. 2, 1967, 69—104.
5. Манолов, С. Върху периодичните решения на един клас от автономни системи с малък параметър при нелинейности от даден вид. Известия на Мат. инст. при БАН, **10**, 1969, 169—182.

Постъпила на 12. II. 1969 г.

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ, СВЯЗАННЫЕ С МНОГОЧЛЕНАМИ ОПРЕДЕЛЕННОГО ВИДА

Спас Манолов

(Резюме)

Рассматриваются нелинейные и автономные системы вида (1.1) при предположении, что функции $g_{ik}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \ldots, \dot{\varphi}_n)$ аналитические и удовлетворяют равенствам (1.2). Отмеченные в (1.1) разложения по степеням параметра λ^2 по условию сходятся для достаточно малых по модулю значений этого параметра.

В [4] отмечены исследования механических систем, движения которых описываются при помощи дифференциальных уравнений вида (1.1). В [5] упоминаются авторы, получившие интересные результаты для систем, обладающих подобными или более общими свойствами, чем (1.2). Система (1.1) для $n=2$ обозначена через (1.1_2). Предполагается, что уравнение $(c_{11}-x)(c_{22}-x)-c_{12}c_{21}=0$ имеет два отрицательных корня $(-1)k_i^2$, $i=1, 2$, причем $k_1=k.k_2$, где $k\geq 2$ есть целое число. Кроме того, $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2})$ — некоторое ненулевое решение системы (1.3). Пусть $\varphi_{i0}(t)$ — решение системы (1.1_2) при $\lambda^2=0$ и при начальных условиях $\varphi_i(0)=0$ и $\dot{\varphi}_i(0)=p_i+q_iN$. Числа p_i и q_i определяются из (1.4), смотря по тому, который из отмеченных четырех случаев рассматривается. Через $P_i(t)$ обозначается то решение системы (1.1_2), которое получается при $\lambda^2=0$ и при начальных условиях $P_i(0)=0$ и $\dot{P}_i(0)=q_i$. Величины r_i и s_i определяются из (1.6), а x_{1i} и x_{2i} представляются через (1.7). В [4] доказано, что если параметр N удовлетворяет (1.8) и (1.9), то решение $\varphi_i(t)$ системы (1.1_2) при начальных условиях $\varphi_i(0)=0$ и $\dot{\varphi}_i(0)=p_i+q_i(N+\beta(\lambda^2))$ — периодическое периода $\frac{2}{k_2}(\pi+\delta(\lambda^2))$. Здесь $\beta(\lambda^2)$ и $\delta(\lambda^2)$ — достаточно малые по модулю функции λ^2, а $\varepsilon=\pm 1$

в зависимости от того, является ли число k четным или нет. Кроме этого $Q_i(t)$ решение системы (1.10) при начальных условиях $Q_i(0)=\dot{Q}_i(0)=0$, а $R_i(t)$ — решение системы (1.12) при начальных условиях $R_i(0)=\dot{R}_i(0)=0$. Функции $\bar{g}_{i1}(t)$ имеют вид (1.13).

В настоящей работе исследуются указанные выше достаточные условия существования периодических решений системы (1.1_2) в случае, когда функции $g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$ — многочлены третьей степени, удовлетворяющие соотношениям (1.2). Показано, что совокупность упомянутых многочленов имеет форму (2.2). После этого исследуются подробно специальные случаи $k=2$ и $k=3$. Выводятся уравнения вида (3.9), (3.14), (4.6) и (4.10) для параметра N, который входит в начальные условия соответрствующего периодического решения. Коэффициенты этих уравнений выражаются через коэффициенты многочленов (2.2) и через параметры линейной части системы (1.1_2). С другой стороны, возможно построение периодических решений системы (1.1_2) по степеням λ^2. Для этого достаточно применить один метод из [4], в котором используются как равенства (1.2), так и условие $k_1=kk_2$. В другой работе будут исследованы случаи, когда целое число k больше 3.

QUELQUES CAS D'EXISTENCE ET DE CONSTRUCTION DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES NONLINÉAIRES AVEC UN PETIT PARAMÈTRE, LIÉS AVEC LES POLYNÔMES D'UNE ESPÈCE DONNÉE

Spas Manolov

(Résumé)

On considère les systèmes nonlinéaires et autonomes de la forme (1.1) où les fonctions $g_{ik}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \ldots, \dot{\psi}_n)$ sont analytiques et elles satisfont aux conditions (1.2). On propose, que les développements, indiqués à (1.1) par rapport au paramètre λ^2, sont convergents dans les cas où ce paramètre est suffisamment petit en valeur absolue.

Dans le travail [4] sont indiquées de certaines recherches, concernant des systèmes mécaniques dont les mouvements s'expriment par des équations différentielles de la forme (1.1). Dans le travail [5] sont montrés des auteurs, qui ont obtenu des résultats intéressants sur des systèmes, possédant des propriétés semblables ou bien plus générales à celles énoncées par (1.2).

On désigne par (1.1_2) le système (1.1) lorsque $n=2$. On propose, que l'équation $(c_{11}-x)(c_{22}-x)-c_{12}c_{21}=0$ possède deux racines négatives $(-1)k_i^2 (i=1, 2)$ et que le rapport $k_1:k_2$ est un nombre entier $k\geq 2$. En outre $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2})$ est une solution quelconque et non nulle du système (1.3). Soit $\psi_{i0}(t)$ la solution du système (1.1_2), lorsque $\lambda^2=0$ et dans les conditions initiales $\psi_{i0}(0)=0$, et $\dot{\psi}_{i0}(0)=p_i+q_iN$. Les nombres p_i et q_i se déterminent par (1.4), où l'on traite quatre cas différents. Désignons par $P_i(t)$ la solution du système (1.1_2), obtenue dans les conditions initiales $P_i(0)=0$, $\dot{P}_i(0)=q_i$ et dans

le cas où $\lambda^2=0$. Les quantités r_i, s_i et x_{1i}, x_{2i} s'expriment respectivement par les formules (1.6) et (1.7). Nous avons démontré dans le travail [4], que si le paramètre N satisfait (1.8) et (1.9), alors la solution $\psi_i(t)$ du système (1.1_2), dans les conditions initiales $\psi_i(0)=0$ et $\dot{\psi}_i(0)=p_i+q_i(N+\beta(\lambda^2))$ est périodique de période $\frac{2}{k_2}(\pi+\delta(\lambda^2))$. Ici $\beta(\lambda^2)$ et $\delta(\lambda^2)$ sont deux fonctions du petit paramètre λ^2, suffisamment petites en valeur absolue, et $\varepsilon=\pm 1$ d'après cela si k est pair ou impair. Outre cela $Q_i(t)$ est la solution du système (1.10) dans les conditions initiales $Q_i(0)=\dot{Q}_i(0)=0$ et $R_i(t)$ représente la solution du système (1.12) dans les conditions initiales $R_i(0)=\dot{R}_i(0)=0$. Les fonctions $\bar{g}_{i1}(t)$ s'introduissent par les égalités (1.13).

Dans le présent travail on étudie les conditions (1.8) et (1.9) dans les cas où les fonctions $g_{i1}(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$ sont des polynômes de puissance trois, vérifiant les conditions (1.2). On démontre la formule (2.2) par rapport aux polynômes mentionnés. On considère après en détail les cas spéciaux $k=2$ et $k=3$. Ainsi on obtient des équations de la forme (3.9), (3.14), (4.6) et (4.10) par rapport au paramètre N, qui prend part aux conditions initiales de la solution périodique respective. Les coefficients des équations citées s'expriment par les coefficients des polynômes (2.2) et par les paramètres de la partie linéaire du système (1.1_2).

Il est possible de même de faire une construction des solutions périodiques du système (1.1_2) suivant les puissances du paramètre λ^2. Il en suffit d'utiliser une méthode, donnée dans le travail [4], dans laquelle les égalités (1.2) et la condition $k_1=kk_2$ jouent un rôle fondamental.

Les cas où le nombre entier k est plus grand que trois seront considérés dans un autre travail.