БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ОДНОГО НУЛЕВОГО И ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Николай Стоянов

Общая задача о стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем до асимптотической устойчивости [1] рассмотрена в работе [2]. Здесь рассматривается задача о стабилизации в критическом случае одного нулевого и пары чисто мнимых корней. Вводится непрерывное управление, аналитическое по переменной, соответствующей нулевому корню, и неаналитическое по двум переменным соответствующим мнимым корням характеристического уравнения линейной части системы.

§ 1. Рассмотрим возмущенное движение управляемого объекта, описываемое системой

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bu+g(x,\ u). \tag{1.1}$$

Здесь x — $(n+3)$-мерный вектор возмущения; u — m-мерный вектор управления, которое будем считать невозмущенным помехами; A, B — постоянные матрицы порядка $(n+3)\times(n+3)$ и $(n+3)\times m$, соответственно; $g(x,\ u)$ — члены выше первого порядка малости относительно x, u.

Если при $u\equiv 0$ невозмущенное движение $x=0$ системы (1.1) не является асимптотически устойчивым, то ставится задача о стабилизации, т. е. задача о выборе такого управления $u=u(x)$, при подстановке которого в (1.1) невозмущенное движение $x=0$ было бы асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Согласно определению в [2], пусть имеем критический случай одного нулевого и пары чисто мнимых корней. При помощи некоторого линейного преобразования переменных x_i, $i=1, 2, \ldots, n+3$, система уравнений (1.1) в этом случае может быть преобразована к виду

$$\begin{gathered}\frac{d\xi}{dt}=X(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ z,\ u),\quad \frac{d\eta}{dt}=-\lambda\zeta+Y(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ z,\ u),\\ \frac{d\zeta}{dt}=\lambda\eta+Z(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ z,\ u),\\ \frac{dz}{dt}=A_0z+B_0u+a\xi+b\eta+c\zeta+\Omega(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ z,\ u).\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь ξ, η, ζ — скалярные переменные; z — n-мерный вектор с компонентами z_s; a, b, c — n-мерные постоянные векторы; A_0, B_0 — постоянные матрицы порядка $n\times n$ и $n\times m$ соответственно; Ω — вектор-функция с компонентами Ω_s; X, Y, Z, Ω_s — аналитические нелинейности по ξ, η, ζ, z, u.

Задача о стабилизации для системы (1.1) эквивалентна той же задаче для системы (1.2).

Известно [2], что можно построить линейное управление

$$u^0(z)=Pz, \tag{1.3}$$

при котором система

$$\frac{dz}{dt}=A_0z+B_0u$$

является асимптотической устойчивой. При таком выборе управления (1.3) все собственные числа μ_s матрицы $C=A_0+B_0P=\mathrm{const}$ удовлетворяют условию $Re\,\mu_s<0$, $s=1, 2, \ldots, n$. Здесь P — постоянная матрица порядка $m\times n$.

Для системы (1.2) рассмотрим неаналитическое управление вида

$$u(\xi, \eta, \zeta, z)=Pz+w(\xi, \eta, \zeta), \quad w=(w_1, \ldots, w_m); \tag{1.4}$$

$$w_j(\xi, \eta, \zeta)=w_j^{(1)}+w_j^{(2)}+\ldots+w_j^{(\omega)}, \tag{1.5}$$

$$w_j^{(k)}(\xi, \eta, \zeta)=\sum_{l=-1}^{a_{jk}}\ \sum_{p+q+r-l=k} a_j^{(pqr-l)}\,\xi^p\eta^q\zeta^r\varrho^{-l}, \tag{1.6}$$

$$p\geq 0,\quad q\geq 0,\quad r\geq 0,\quad \omega>0,\quad a_{jk}\geq 0 \text{ целые числа};$$

$$\varrho=\sqrt{\eta^2+\zeta^2};\quad k=1, 2, \ldots, \omega;\quad j=1, 2, \ldots, m.$$

Функции вида (1.6) удовлетворяют оценки характерные для однородных форм k-го порядка,

$$|w_j^{(k)}(\xi, \eta, \zeta)|\leq A_j^k\|\chi\|^k;\quad \|\chi\|=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\quad A_j^k=\mathrm{const}>0.$$

Здесь и в дальнейшем условимся считать, что

$$w(0, 0, 0)=\lim_{\varrho\to 0} w(0, \eta, \zeta)=0.$$

Постоянные a_j^{pqr-l} и целые числа a_{jk}, ω будем выбирать в зависимости от вида исходной системы (1.2) и возможности ее стабилизации.

Теперь преобразуем системы (1.2) посредством подстановки

$$z_s=\varkappa_s(\xi, \eta, \zeta)+y_s. \tag{1.7}$$

Здесь y_s — новые переменные, а функции $\varkappa_s(\xi, \eta, \zeta)$ определим как формальное решение системы уравнений

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial\xi}X(\xi, \eta, \zeta, \varkappa, u)+\frac{\partial\varkappa}{\partial\eta}[-\lambda\zeta+Y(\xi, \eta, \zeta, \varkappa, u)]+\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}[\lambda\eta+Z(\xi, \eta, \zeta, \varkappa, u)] \tag{1.8}$$

$$=C\varkappa+a\xi+b\eta+c\zeta+\Omega(\xi, \eta, \zeta, \varkappa, u),$$

где $\varkappa$ — n-мерный вектор с компонентами $\varkappa_s$.

Решение системы (1.8) будем искать в виде формальных рядов

$$(1.9)\qquad \varkappa_s(\xi,\eta,\zeta)=\varkappa_s^{(1)}+\varkappa_s^{(2)}+$$

где $\varkappa_s^{(k)}$ — функции типа (1.6), т. е.

$$(1.10)\qquad \varkappa_s^{(k)}(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{l=-1}^{b_{sk}}\sum_{p+q+r-l=k} a_s^{(pqr-l)}\,\xi^p\eta^q\zeta^r\varrho^{-l}.$$

Подставим эти ряды и управление (1.4) — (1.6) в (1.8). Учитывая, что функции X, Y, Z, Ω_s имеют порядок малости не ниже второго ($p+q+r-l\geq 2$), приравнивая в левой и правой частях (1.8) члены ν-го порядка (члены, для которых $p+q+r-l=\nu$), для определения вектор-функции $\varkappa^{(\nu)}$ получим систему уравнений

$$(1.11)\qquad \lambda\left(\eta\frac{\partial\varkappa^{(\nu)}}{\partial\zeta}-\zeta\frac{\partial\varkappa^{(\nu)}}{\partial\eta}\right)=C\varkappa^{(\nu)}+\tau^{(\nu)}(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \varkappa^{(\gamma)}).$$

Здесь $\tau_s^{(\nu)}$ — компоненты вектор-функции $\tau^{(\nu)}$ — однородные функции ν-го порядка переменных ξ, η, ζ типа (1.6), зависящие только от тех $\varkappa_s^{(\gamma)}$, для которых $\gamma<\nu$. Так как предполагается, что все функции $\varkappa_s^{(\gamma)}$ при $\gamma<\nu$ уже вычислены, то функции $\tau_s^{(\nu)}$ будут известными.

Обозначим

$$(1.12)\qquad \varkappa_s^{(\nu)}=\sum_{l=-1}^{b_{sk}}\varkappa_s{}^{(\nu+l)}{}_{\gamma}\,\varrho^{-l},\qquad \tau_s^{(\nu)}=\sum_{l=-1}^{g_{s\nu}}\tau_s^{(\nu+l)}{}_{\nu}\,\varrho^{-l},$$

где $\varkappa_s^{(\nu+l)}{}_{\nu}$ и $\tau_s^{(\nu+l)}{}_{\nu}$ — формы $(\nu+l)$-го порядка относительно переменных ξ, η, ζ; $g_{s\nu}\geq 0$ — целые числа. Положим сначала

$$b_{1\nu}=b_{2\nu}=\qquad =b_{n\nu}=\max\,[g_{1\nu},\ g_{2\nu},\ \ldots,\ g_{n\nu}].$$

Конкретные значения для $b_{1\nu},\ldots,b_{n\nu}$ получим, подставляя (1.12) в (1.11) и приравнивая в обеих частях члены с одинаковыми множителями ϱ^{-l}. Таким образом, для определения функций $\varkappa_s{}^{(\nu+l)}{}_{\nu}$ получим систему уравнений

$$(1.13)\qquad \lambda\left(\eta\frac{\partial\varkappa^{(\nu+l)}{}_{\nu}}{\partial\zeta}-\zeta\frac{\partial\varkappa^{(\nu+l)}{}_{\nu}}{\partial\eta}\right)=C\varkappa^{(\nu+l)}{}_{\nu}+\tau^{(\nu+l)}{}_{\nu}$$

На основании теоремы Ляпунова [1, 3] эти уравнения имеют единственное решение, которое можем искать методом неопределенных коэффициентов. Для определения коэффициентов $a_s^{(pqr-l)}$, $p+q+r-l=\nu$, формы $\varkappa_s{}^{\nu+l}{}_{\nu}$ получаются линейные алгебраические системы. Итак, из уравнений (1.13) можно последовательно определить функции $\varkappa_s^{(\nu+l)}{}_{\nu}$, $\nu=1,\ 2,\ldots$, а, следовательно, и функции $\varkappa_s^{(k)}$ (1.10).

Здесь можно показать, что если в управлении (1.4) — (1.6) положить $\varrho=\sqrt{\alpha\eta^2+\beta\zeta^2}$, то необходимо должно быть $\alpha=\beta$.

Допустим, что все функции $\varkappa_s(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ до заданного порядка $N-1$ ($N>1$ целое число) уже вычислены, т. е. известны функции

$$(1.14)\qquad \varkappa_s(\xi,\ \eta,\ \zeta)=\varkappa_s^{(1)}+\varkappa_s^{(2)}+\cdots+\varkappa_s^{(N-1)}.$$

Подставляя в уравнения (1.2) управление (1.4) — (1.6) и преобразуя эту систему по формулам (1.7), (1.14), получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dt}=\sum_{\sigma=2}^{N}R_1^{(\sigma)}(\xi,\ \eta,\ \zeta)+\varphi_1(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ y),\\
&\frac{d\eta}{dt}=-\lambda\zeta+\sum_{\sigma=2}^{N}R_2^{(\sigma)}(\xi,\ \eta,\ \zeta)+\varphi_2(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ y),\\
&\frac{d\zeta}{dt}=\lambda\eta+\sum_{\sigma=2}^{N}R_3^{(\sigma)}(\xi,\ \eta,\ \zeta)+\varphi_3(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ y),\\
&\frac{dy}{dt}=Cy+G(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ y).
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Здесь компоненты вектор-функции $G(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ y)$ и функции $\varphi_i(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ y)$, $i=1,\ 2,\ 3$, имеют относительно $\xi,\ \eta,\ \zeta,\ y_s$ порядок малости не ниже второго.

Функции $\varphi_i(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ 0)$ удовлетворяют условию Липшица с бесконечно малой константой и оценке

$$
|\varphi_i(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ 0)|\leq B_i\|x\|^{N+1},\quad B_i=\mathrm{const}>0.
$$

Разложения компонент вектор-функции $G(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ 0)$ в силу выбора преобразования (1.7), (1.14) начинаются с членов порядка не ниже чем N.

Рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dt}=\sum_{\sigma=2}^{N}R_1^{(\sigma)}(\xi,\ \eta,\ \zeta),\\
&\frac{d\eta}{dt}=-\lambda\zeta+\sum_{\sigma=2}^{N}R_2^{(\sigma)}(\xi,\ \eta,\ \zeta),\\
&\frac{d\zeta}{dt}=\lambda\eta+\sum_{\sigma=2}^{N}R_3^{(\sigma)}(\xi,\ \eta,\ \zeta).
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

Согласно принципу сведения (теорема 2.2 из [4]), если нулевое решение системы (1.16) асимптотически устойчиво (неустойчиво), то нулевое решение системы (1.15) также асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Систему (1.16) можно получить, подставляя в первые три уравнения (1.2) управление (1.4) — (1.6), а затем заменяя в полученных соотношениях компоненты вектора z на компоненты вектора $\varkappa$ (1.14) соответственно, и ограничиваясь членами до N-го порядка включительно.

§ 2. Перейдем теперь к исследованию укороченной системы (1.16). Перепишем ее в виде

$$
(2.1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= R_1^{(2)}(\xi,\ \eta,\ \zeta) + \\
\frac{d\eta}{dt} &= -\lambda\zeta + R_2^{(2)}(\xi,\ \eta,\ \zeta) + \\
\frac{d\zeta}{dt} &= \lambda\eta + R_3^{(2)}(\xi,\ \eta,\ \zeta) +
\end{aligned}
$$

где ненаписанные члены выше третьего порядка. $R_i^{(2)}$, $i=1, 2, 3$, — однородные функции второго порядка переменных ξ, η, ζ, типа (1.6), коэффициенты которых зависят определенным образом от коэффициентов управления (1.4) — (1.6).

Каменков [5] и Малкин [3] исследовали устойчивость нулевого решения системы (2.1) в случае аналитических правых частей. При помощи ряда преобразований они привели рассматриваемую задачу к случаю двух нулевых корней с двумя группами решений.

Для рассматриваемой здесь задачи ограничимся случаем, когда вопрос о стабилизации системы (2.1) решается только членов второго порядка $R_i^{(2)}$ (2.1). Так как коэффициенты функций $R_i^{(2)}$ зависят только от коэффициентов членов первого порядка ($p+q+r-l=1$) управления (1.4) — (1.6) , то рассмотрим в (1.4)—(1.6) эти члены и ограничимся значениями $l=-1, 0$, т. е. ограниимся рассмотрением управления

$$
(2.2)\qquad u_j = u_j^0(z) + \sum_{p+q+r=1} a_j^{(pqr0)}\xi^p\eta^q\zeta^r + a_j^{(0001)}
$$

При выбранном управлении (2.2) функции $R_i^{(2)}$ имеют вид

$$
R_i^{(2)} = \sum_{p+q+r=2} l_i^{(pqr0)}\,\xi^p\eta^q\zeta^r + \sum_{p+q+r=1} l_i^{(pqr1)}\,\xi^p\eta^q\zeta^r\varrho.
$$

Эти выражения запишем в следующем виде:

$$
(2.3)\qquad R_i^{(2)} = \psi_i^{(1)}(\xi,\ \eta,\ \zeta)\cdot\varrho + \psi_i^{(2)}(\xi,\ \eta,\ \zeta).
$$

Здесь $\psi_i^{(1)}$, $\psi_i^{(2)}$, $i=1, 2, 3$, — формы относительно ξ, η, ζ, соответственно первого и второго порядка. Коэффициенты этих форм зависят определенным образом от коэффициентов управления (2.2).

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$
2V = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 2V_1(\xi,\ \eta,\ \zeta),
$$

где

$$
(2.4)\qquad V_1 = \xi(h_1\eta^2 + \eta\zeta) + \eta(h_2\xi^2 + h_3\eta^2 + h_4\zeta^2) + \zeta(h_5\xi^2 + h_6\eta^2 + h_7\zeta^2)
$$

(h_i, $i=1, 2, \ldots, 7$, подлежащие определению постоянные).

Вычислим dV/dt в силу уравнений (2.1):

$$
(2.5)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \xi R_1^{(2)} + \eta R_2^{(2)} + \zeta R_3^{(2)} + \lambda\left(\eta\frac{\partial V_1}{\partial \zeta} - \zeta\frac{\partial V_1}{\partial \eta}\right) +
$$

где ненаписанные члены выше третьего порядка.

Выражение (2.5) с учетом (2.3) запишем так:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\Phi(\xi,\ \eta,\ \zeta)+\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)\varrho+\lambda\left(\eta\frac{\partial V_1}{\partial\zeta}-\zeta\frac{\partial V_1}{\partial\eta}\right)+ \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\xi,\ \eta,\ \zeta)&=\xi\psi_1^{(2)}(\xi,\ \eta,\ \zeta)+\eta\psi_2^{(2)}(\xi,\ \eta,\ \zeta)+\zeta\psi_3^{(2)}(\xi,\ \eta,\ \zeta)\\&=\xi(d_1\xi^2+d_2\eta^2+d_3\zeta^2)+\eta(d_4\xi^2+d_5\eta^2+d_6\zeta^2)\\&\quad+\zeta(d_7\xi^2+d_8\eta^2+d_9\zeta^2)+d_{10}\xi\eta\zeta,\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)&=\xi\psi_1^{(1)}(\xi,\ \eta,\ \zeta)+\eta\psi_2^{(1)}(\xi,\ \eta,\ \zeta)+\zeta\psi_3^{(1)}(\xi,\ \eta,\ \zeta)\\&=a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+2a_{13}\xi\zeta+a_{22}\eta^2+2a_{23}\eta\zeta+a_{33}\zeta^2.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Коэффициенты d_k, $k=1, 2, \ldots, 10$, и a_{ij}, $i, j=1, 2, 3$, зависят от коэффициентов управления (2.2). Коэффициенты функций V_1 могут быть подобраны так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\begin{aligned}\lambda\left(\eta\frac{\partial V_1}{\partial\zeta}-\zeta\frac{\partial V_1}{\partial\eta}\right)&=-\eta(d_4\xi^2+d_5\eta^2+d_6\zeta^2)\\&-\zeta(d_7\xi^2+d_8\eta^2+d_9\zeta^2)-d_{10}\xi\eta\zeta-\xi(d_2\eta^2+d_3\zeta^2).\end{aligned} \tag{2.9}$$

После того как V_1 определена, производная dV/dt примет вид

$$\frac{dV}{dt}=\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)\varrho+d_1\xi^3+ \tag{2.10}$$

где ненаписанные члены выше третьего порядка.

Потребуем теперь, чтобы

$$|d_1<\varepsilon,\quad \varepsilon>0 \text{ и достаточно мало.} \tag{2.11}$$

Если неравенство (2.11) удовлетворено, то согласно Лемме 3 § 7 [3] знак производной dV/dt будет определяться знаком функции $\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, если она не знакопостоянная.

Функция $\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ (2.8) — квадратичная форма переменных ξ, η, ζ. Обозначим главные миноры ее дискриминанта через $\Delta_{\nu\nu}$:

$$\Delta_{11}=a_{11},\qquad \Delta_{22}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\qquad \Delta_{33}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$a_{ij}=a_{ji},$$

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма $\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ тогда и только тогда будет определенно-отрицательной, когда удовлетворяются неравенства

$$\Delta_{11}<0,\quad \Delta_{22}>0,\quad \Delta_{33}<0, \tag{2.12}$$

а определенно-положительной, когда

$$\Delta_{11}>0,\quad \Delta_{22}>0,\quad \Delta_{33}>0. \tag{2.13}$$

Функция V определенно-положительная. Если выполняются неравенства (2.11) и (2.12), то dV/dt будет определенно-отрицательной и на основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости невозмущенное движение системы (2.1) будет асимптотически устойчиво. Если выполняются неравенства (2.11) и (2.13), то dV/dt — определенно-положительная и, согласно первой теореме Ляпунова о неустойчивости, невозмущенное движение системы (2.1) будет неустойчиво. В силу принципа сведения (теорема 2.2 [4]), то же самое будет справедливо и для невозмущенного движения исходной системы (1.2).

На основании изложенного можно высказать следующее утверждение:

Теорема 2.1. Управление (2.2) стабилизирует систему (2.1), а тем самым и систему (1.2), если коэффициенты $a_j^{(pqr0)}$, $(p+q+r=1)$, $a_j^{(0001)}$ управление (2.2) могут быть выбраны так, чтобы удовлетворялись неравенства (2.11) и (2.12).

Если при любом выборе коэффициентов $a_j^{(pqr0)}$ $(p+q+r=1)$, $a_j^{(0001)}$ выполняются неравенства (2.11) и (2.13), то стабилизация системы (2.1) управлением (2.2) невозможна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движения. Москва, 1950.
2. Гальперин, Е. А., Н. Н. Красовский, О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. ПММ, **27**, вып. 6, 1963.
3. Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения. Москва, 1966.
4. Плисс, В. А., О принципе сведения в теории устойчивости движения. Изв. АН СССР, сер. матем. **28***, № 6, 1964.
5. Каменков, Г. В. Об устойчивости движения. Труды КАИ, № 9, 1939.

Поступила 14. II. 1969 г.

ВЪРХУ СТАБИЛИЗАЦИЯТА НА НЕЛИНЕЙНА УПРАВЛЯЕМА СИСТЕМА В КРИТИЧЕСКИЯ СЛУЧАЙ НА ЕДИН НУЛЕВ И ДВОЙКА ЧИСТО ИМАГИНЕРНИ КОРЕНИ

Николай Стоянов

(Резюме)

Разглежда се задачата за стабилизация на стационарното движение на нелинейна управляема система в критическия случай на един нулев и двойка чисто имагинерни корени. Въвежда се непрекъснато управление, аналитично относно променливата, съответствуваща на нулевия корен, и неаналитично относно двете променливи, съответствуващи на имагинерните корени на характеристичното уравнение.

Получени са условия, при които избраното управление стабилизира несмутеното движение на системата.

THE STABILITY OF A NONLINEAR, GOVERNED SYSTEM IN THE CRITICAL CASE OF A ZERO ROOT AND A PAIR OF PURELY IMAGINARY ROOTS

Nikolai Stoyanov

(Summary)

This article deals with the stabilization of the stationary behaviour (motion) of a nonlinear, governed system in the critical case of a zero root and a pair of purely imaginary roots. Incessant governing has been introduced, analytical in relation to the variable corresponding to the zero root, and non-analytical in relation to the two variables corresponding to the imaginary roots of the characteristic equation.

Conditions have been obtained under which the chosen governing unit stabilizes the undisturbed motion of the system.