БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

# КВАДРАТИЧНИ АЛГЕБРИ

**Кирил Дочев**

Нека $A$ е асоциативна алгебра над дадено поле $F$. Ще предполагаме, че $A$ съдържа единичен елемент и подалгебрата, породена от единицата, ще отъждествяваме с полето $F$. В частност с 1 ще означаваме както единицата в $A$, така и единичният елемент на $F$. Когато алгебрата $A$ е алгебрична и минималният полином на всеки елемент от $A$ е от степен $\leq 2$, ще казваме за краткост, че $A$ е квадратична алгебра. С други думи, алгебрата $A$ е квадратична, когато подалгебрата $F(a)$, породена от произволен елемент $a \in A$, има размерност $\leq 2$ над полето $F$.

Към класа на квадратичните алгебри се причисляват всички булеви пръстени, тъй като всеки булев пръстен е алгебра над простото поле с характеристика 2. В следващото изложение обаче ще предполагаме, че характеристиката на полето $F$ е $\neq 2$. Освен полето на комплексните числа, тялото на кватернионите и изобщо всяка подалгебра на пълната матрична алгебра от ред 2, които очевидно ни дават примери на квадратични алгебри, могат да се посочат и редица други примери, част от които ще бъдат разгледани след доказателството на основния резултат в настоящата работа. Този резултат се състои в следното: една квадратична алгебра е или кватернионна, или множеството $Q$ от нилпотентните елементи на $A$ е двустранен идеал и фактор-алгебрата $A/Q$ е комутативна с размерност 1 или 2. Тук ще напомним, че една асоциативна алгебра $K(\alpha, \beta)$ се нарича кватернионна (алгебра от обобщени кватерниони), когато притежава четири образуващи $1, i, j, k$, свързани със съотношенията $i^2=-\alpha, j^2=-\beta, ij+ji=0$, $k=ij$ ($\alpha, \beta$ — ненулеви елементи от основното поле $F$). В частност пълната матрична алгебра на матриците от втори ред е кватернионна. Както се вижда от цитирания резултат, кватернионните алгебри са характерни примери за квадратични алгебри, и то не само в случая на некомутативни тела, но даже и когато се допуска съществуването на нетривиални нилпотентни елементи.

## § 1. Дефиниции и леми

Нека $a \in A$ и $a \notin F$. Понеже полето $F$ е с характеристика $\neq 2$, можем да запишем минималния полином на $a$ във вида $X^2-2\gamma X+\delta$, $\gamma \in F$, $\delta \in F$. Елементите (скаларите) $2\gamma$ и $\delta$ от полето $F$, които са определени еднозначно чрез $a \in A$, ще наричаме съответно следа и норма на $a$ и ще пишем

$$2\gamma = \mathrm{Sp}\,(a), \quad \delta = N(a).$$

При $a=\gamma \in F$ полагаме $\mathrm{Sp}\,(a)=2\gamma$, $N(a)=\gamma^2$, Елементът $a' \in A$, определен от равенството

$$a+a'=\mathrm{Sp}\,(a),$$

ще наричаме спрегнат на $a \in A$. Очевидно ще имаме

$$aa'=N(a)$$

(наистина $aa'=a(2\gamma-a)=-a^2+2\gamma a=\delta$) и елементите на полето $F$ ще са единствените елементи от $A$, които съвпадат със спегнатите си (които са самоспрегнати).

Лема 1. Изображението $a \to a'$ е линейно, т. е.

$$(\alpha a+\beta b)'=\alpha a'+\beta b', \quad \alpha, \beta \in F, \quad a, b \in A.$$

*Доказателство.* Ясно е, че всеки елемент на $A$ може да се представи като сума от симетричен (самоспрегнат) елемент и антисиметричен елемент, т. е. $a=a_1+a_2$, гдето $a_1'=a_1$ и $a_2'=-a_2$. Наистина, когато $a \in F$, твърдението е очевидно, а при $a \bar{\in} F$ то следва от равенството

$$a^2-2\gamma a+\delta=(a-\gamma)^2+\delta-\gamma^2=0,$$

като се положи $a_1=\gamma$ и $a-\gamma=a_2$. От дефиницията на операцията спрегнатост $a \to a'$ директно следва, че при всеки $\alpha \in E$ и $a \in A$ условията за линейност $(a+\alpha)'=a'+\alpha'$ и $(\alpha a)'=\alpha a'$ са изпълнени. Ето защо достатъчно ще бъде да докажем, че при $a'=-a$, $b'=-b$ и при условие за линейна независимост на елементите $a$, $b$, 1 имаме $(a+b)'=a'+b'$. За целта ще използваме равенствата

$$(a+b)^2=\alpha_1(a+b)+\beta_1,$$
$$(a-b)^2=\alpha_2(a-b)+\beta_2, \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F,$$

откъдето чрез почленно събиране и вследствие предположената линейна независимост ще получим $\alpha_1+\alpha_2=0$, $\alpha_1-\alpha_2=0$. От последната хомогенна система, като използваме съществено фиксираното в началото условие за полето $F$ да има характеристика $\neq 2$, получаваме $\beta_1=(a+b)^2 \in F$. И така, $\mathrm{Sp}\,(a+b)=0$. Следователно $(a+b)'=-(a+b)$, т. е. $(a+b)'=a'+b'$.

Следствие. Функционалът $\mathrm{Sp}\,(a)$ е линеен.

Лема 2. Изображението $a \to a'$ притежава свойството

$$(ab)'=b'a' \quad (a, b \in A).$$

*Доказателство.* И тук е достатъчно да разгледаме само случая $a'=-a$, $b'=-b$. Тогава ще имаме $b'a'=ba$, $a^2 \in F$, $b^2 \in F$ и според лема 1 квадратът на сумата $a+b$ ще принадлежи на полето $F$. Оттук получаваме $2\gamma=ab+ba \in F$ и $(ab)(ba) \in F$. Следователно при $ab \in F$ имаме $2\gamma = \mathrm{Sp}\,(ab)$ и $ba=(ab)'$. Случаят $ab \in F$ не води до затруднения.

Следствие. Нормата $N(a)$ е мултипликативна, т. е.

$$N(ab)=N(a)N(b).$$

От доказаното следва, че изображението $a \to a'$ е антиизоморфизъм. Ако в произволна алгебра $A$ е зададено изображение $a \to a'$ със свойствата $a+a' \in F$, $aa' \in F$ и $a'=a$ при $a \in F$, то лесно се вижда, че алгебрата $A$ е квадратична и даденото изображение е еднозначно определено и съвпада с описания по-горе антиизоморфизъм. Ще отбележим, че при произволни елементи $a, b \in A$ имаме

$$ab'+ba' \in F.$$

Наистина $(ab')'=(b')'a'=ba'$, $ab'+ba'=\mathrm{Sp}(ab')$. Това ни позволява да дефинираме скаларно произведение по формулата

$$(a, b)=\frac{1}{2}(ab'+ba'),$$

което лесно се проверява, че притежава обичайните свойства

$$(a, b)=(b, a), \quad (a, b+c)=(a, b)+(a, c), \quad (\lambda a, b)=(a, b),$$

$$(a, a)=N(a).$$

Освен това имаме

$$(ca, cb)=N(c)(a, b), \quad (ac, bc)=N(c)(a, b),$$

$$(1, c)=\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(c), \quad (a, b)=(a', b').$$

Ще използваме още означенията

$$\frac{1}{2}(a+a')=R_e(a), \quad \frac{1}{2}(a-a')=I_m(a).$$

Съвкупността на елементите $a \in A$ с $I_m(a)=0$ е подалгебра на $A$, изоморфна с полето $F$. Съвкупността на елементите $a \in A$ с $R_e(a)=0$ е подпространство на $A$, което ще означаваме с $I_m(A)$. От $a \in I_m(A)$ следва, че $a$ удовлетворява уравнение от вида $X^2=-\delta$, $\delta=N(a) \in F$ и, обратно, от $a^2 \in F$ следва $a \in I_m(A)$, или $a \in F$. Подпространството $I_m(A)$ е ортогоналното допълнение на едномерното подпространство, породено от единичния елемент, т. е.

$$I_m(A)=\{x;\ x \in A,\ (x, 1)=0\}.$$

Съвкупността от изотропните елементи на $I_m(A)$ (елементите от $I_m(A)$ с нулева норма) съвпада с множеството $Q$ на нилпотентните елементи на $A$. Ще отбележим, че при извършване на пресмятане в $A$ можем да си служим с обичайни тъждества, като например $N(a+b)=N(a)+2R_e(ab')+$ $+N(b)$, и т. н., да употребяваме позната и удобна терминология от геометрията, да прилагаме изпитани методи, като например метода на ортогонализацията и пр. Наличността на ортогонален базис в $A$ е гарантирана в случая на крайномерна алгебра, както това следва от съответните общи резултати ([2)]. Успешното прилагане на метода на ортогонализация естествено е свързано с изучаване свойствата на съвкупността от нилпотентните елементи на $A$. Подобни свойства са предмет на изследване в следващия параграф от настоящата работа.

## § 2. Свойства на нилпотентните елементи на квадратичната алгебра. Основна теорема

Най-напред ще докажем следната лема, същността на която се корени в класическото доказателство на теоремата Фробениус.

Лема 3. Ако в $I_m(A)$ има два неизотропни и взаимно ортогонални елемента, $A$ е кватернионна алгебра.

*Доказателство.* Нека $i$ и $j$ са два такива елемента. Това означава, че $\alpha=N(i)\neq0$, $\beta=N(j)\neq0$ и $(1,i)=(1,j)=(i\,j)=0$. Ако $x$ е произволен елемент на $A$, да положим

$$\lambda_0=(x,1),\quad \lambda_1=\frac{1}{\alpha}(x,i),\quad \lambda_2=\frac{1}{\beta}(x,j),\quad k=ij,\quad \lambda_3=\frac{1}{\alpha\beta}(x,k)$$

и да определим $z\in A$ от равенството

$$x=\lambda_0+\lambda_1 i+\lambda_2 j+\lambda_3 k+z.$$

Получаваме

$$(z,1)=(z,i)=(z,j)=(z,k)=0,$$

т. е.

$$z+z'=zi+iz=zj+jz=zk+kz=0;$$

$$zij=-izj=(-i)(-jz)=ijz=-zij,\ zk=0.$$

Следователно $z=0$ и алгебрата $A$ е кватернионна.

Полученият резултат може да се изкаже още във формата на следното

Следствие. Необходимото и достатъчно условие една квадратична алгебра да бъде кватернионна е да съществуват елементи $i$, $j$ от алгебрата, чиито квадрати принадлежат на полето и са отлични от нула, като при това $ij+ji=0$.

Лема 4. Ако множеството $Q$ от нилпотентните елементи на $A$ не е линейно пространство, $A$ е кватернионна алгебра.

*Доказателство.* Множеството $Q$ очевидно е затворено относно умножение със скалари от $F$. Допускането, че $Q$ не е линейно пространство, означава, че съществуват елементи $x, y\in Q$ такива, че $x+y\notin Q$, откъдето следва $x^2=0$, $y^2=0$ и $N(x+y)=2(x,y)\neq0$. Да положим $i=x+y$, $j=x-y$; тогава

$$(i,j)=(x,x)-(y,y)=N(x)-N(y)=0,\ N(i)=2(x,y)\neq0,\ N(j)=-N(i)\neq0.$$

За да завършим доказателството, следва да приложим лема 3.

Лема 5. Ако $A$ не е кватернионна алгебра, $Q$ е подалгебра на $A$.

*Доказателство.* Вследствие лема 4 ще имаме $x+y\in Q$ за всеки два елемента от $Q$, откъдето получаваме $(x+y)^2=0$. Следователно

$$xy=-yx,\quad (xy)^2=-x(xy)y=-x^2y^2=0,$$

т. е. $xy\in Q$.

Лема 6. Ако $A$ не е кватернионна алгебра, $Q$ е двустранен идеал на $A$ и фактор-алгебрата $A/Q$ е комутативна.

*Доказателство.* Да допуснем, че $a \in A$, $q \in Q$ и $qa \overline{\in} Q$. Според лема 5 $a \overline{\in} Q$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $a \in I_m(A)$. Имаме $N(qa)=0$ и $(qa)^2=2\lambda qa$, $2\lambda=\mathrm{Sp}\,(qa)\in F$. Съгласно допускането $qa \overline{\in} Q$ имаме $\lambda \neq 0$, т. е.

$$(a, q)=-\frac{1}{2}(aq+qa)=-\lambda \neq 0.$$

Да положим $b=a+\mu q$, гдето $\mu=-\frac{N(a)}{(a, q)}\cdot$ Понеже $a \in I_m(A)$ и $a \overline{\in} Q$, ще имаме $N(a) \neq 0$ и следователно

$$N(b)=N(a)+2\mu(a, q)=-N(a) \neq 0.$$

От друга страна, $(a, b)=0$. По такъв начин достигнахме до противоречие с лема 3, тъй като елементите $a$, $b$ $(a, b \in I_m(A))$ са неизотропни (с ненулева норма) и взаимно ортогонални. И така, от $a \in I_m(A)$ и $q \in Q$ следва $qa \in Q$. От представянето $a=R_e(a)+I_m(a)$, $R_e(a) \in F$ и от лема 4 (също от лема 5) следва $qa \in Q$ при всяко $a \in A$, т. е. $QA \quad Q$. Аналогично $AQ \subset Q$. Нека сега $u=xy-yx$ да означава комутатора на два произволни елемента от $A$. За да докажем включването $u \in Q$, достатъчно е да разгледаме случая, когато $x, y \in I_m(A)$ и $x, y \overline{\in} Q$. Елементът $u$ очевидно е ортогонален на неизотропния елемент $x \in I_m(A)$. Наистина

$$(u, x)=(xy, x)-(yx, x)=N(x)(y, 1)-N(x)(y, 1)=0.$$

Тогава допускането, че $u \overline{\in} Q$ би довело до противоречие с лема 3, тъй като бихме получили двойка $x$, $u$ неизотропни и ортогонални елементи $\in I_m(A)$. С това доказахме, че фактор-алгебрата $A/Q$ е комутативна.

Ясно е също така, че фактор-алгебрата $A/Q$ не притежава ненулеви нилпотентни елементи.

Лема 7. Ако $A$ е комутативна квадратична алгебра и $Q=\{0\}$, алгебрата $A$ е едномерна или двумерна.

*Доказателство.* Нека $A \neq F$ и $a$, $b$ да са два ненулеви елемента $I_m(A)$. Имаме

$$(a, b)=-\frac{1}{2}(ab+ba)=-ab, \quad (a, b)^2=(ab)^2,$$

$$(a, b)^2=a^2 . b^2, \quad (a, b)^2=(a, a)(b, b).$$

Следователно $N(\lambda a+\mu\beta)=0$ при $\lambda=-(a, b)$, $\mu=(a, a)$, откъдето получаваме $\lambda a+\mu b=0$, т. е. $a$ и $b$ са линейно зависими.

Като резултат от доказаните леми получаваме следната

Теорема 1. Една квадратична алгебра над поле с характеристика $\neq 2$ е или кватернионна, или множеството $Q$ от нилпотентните ѝ елементи е двустранен идеал и фактор-алгебрата по идеала $Q$ е комутативна, с размерност 1 или 2.

## §3. Някои приложения и примери

Непосредствено следствие от теорема 1 е твърдението ([1], стр. 270): ако $A$ е некомутативно тяло с център $F$ с характеристика $\neq 2$ и за всяко $x \in A$ подалгебрата $F(x)$ има ранг $\leq 2$ над центъра $F$, $A$ е тяло на кватерниони над полето $F$.

Като друго приложение на доказаните резултати се получава следното твърдение.

Ако в некомутативното тяло $A$ с център $F$ с характеристика $\neq 2$ е дефинирано изображение $x \to x'$ $(x, x' \in A)$ със свойствата $x+x' \in F$, $xx' \in F$, $x'=x$ при $x \in F$, то $A$ е тяло на кватерниони над $F$ и даденото изображение е тъждествено с антиизоморфизма, при който на всеки кватернион е съпоставен спрегнатия му $x'$.

Да отбележим, че тук за разлика от [1], стр. 270, не се изисква по условие изображението да е антиизоморфизъм.

От теорема 1 също така се получава като следствие известната характеризация на тялото на кватернионите (вж. например [1], стр. 268) и в частност — теоремата на Фробениус.

Примери за квадратични алгебри могат да се получават още по следния начин. Нека $H$ е линейно пространство над $F$, $f(x, y)$, $x, y \in H$ е неособена симетрична билинейна форма в $H$ и $\mathrm{Aut}(f)$ да означава групата на всички автоморфизми на формата $f$ (вж. напр. [2], стр. 392). Нека $G \subset \mathrm{Aut}(f)$ е подгрупа на $\mathrm{Aut}(f)$, която действува транзитивно в единичната сфера $S=\{x;\ x \in H,\ (x, x)=1\}$. Това означава, че за всеки два вектора $x, y \in S$ съществува $g \in G$, така че $g(x)=y$. Да означим с $A$ централизатора на $G$ в множеството на всички ендоморфизми на $H$, т. е. $A$ е множеството на всички линейни оператори в $H$, които комутират с всеки автоморфизъм $g \in G$. Оказва се, че $A$ е квадратична алгебра. Наистина множеството $A$ очевидно е алгебра и от $a \in A$ следва $a' \in A$, където $a'$ е спрегнатият ендоморфизъм на $a$ спрямо формата $f$ ([2], стр. 389). За всеки два елемента $x, y \in S$ и при подходящо $g \in G$ ще имаме

$$(a(y), y)=(ag(x), g(x))=(ga(x), g(x))=(a(x), x),$$

откъдето получаваме $(a(x), x)=\gamma=\mathrm{const} \in F$. Следователно $((a-\gamma)(x), x)=0$ $x \in H$ и $(a-\gamma)' = -(a-\gamma)$, т. е. $a+a' = 2\gamma \in F$. Аналогично $aa' = \delta \in F$. От последните две равенства получаваме $a^2-2\gamma a+\delta=0$, което показва, че алгебрата $A$ е квадратична. Когато формата $(x, y)$ притежава свойството от $(x, x)=0$ да следва $x=0$, множеството $Q$ от нилпотентните елементи на $A$ ще се състои само от нулевия ендоморфизъм и според теорема 1 алгебрата $A$ ще бъде или четиримерна (и кватернионна), или двумерна (и комутативна), или едномерна ($A=F$). Така ще бъде например в случая на реално евклидово пространство и когато $G$ е транзитивна подгрупа на ортогоналната група. В този случай $N(a)=\delta>0$ и константите $\alpha, \beta$ от определението на обобщената кватернионна алгебра могат да се изберат равни на 1, така че централизаторът $A$ или ще съвпада с класическото тяло на кватернионите над полето $F$ на реалните числа, или с полето на комплексните числа, или $A=F$. Оттук не е трудно да се изведе в частност следният геометричен аналог на класическата теорема на Фробениус ([3], стр. 33): нека $G$ е подгрупа на ортогоналната група $O_n$ и $G$ действува транзитивно в единичната сфера на евклидовото пространство $E_n$, $n>2$, $n \neq 4$; тогава за всяко $x \neq 0$, $x \in E_n$ съществуват $a, b \in G$, така че $(x, ab(x)) \neq (x, ba(x))$ и в частност всяка транзитивна група $G \subset O_n$ при $n>2$ е некомутативна.

Когато спрямо метриката, породена от квадратичната форма $f(x, y)$, съществуват ненулеви изотропни елементи, може да се случи в централизатора $A$ да има нетривиални нилпотентни елементи, но и тогава теорема 1 ще ни даде известна информация за този централизатор.

В следващото изложение ще допълним резултата от теорема 1, като ще установим, че когато множеството $Q$ от нилпотентните елементи на квадратичната алгебра $A$ е идеал, от $A/Q=R$ ще следва $A=R\oplus Q$.

## § 4. Пълно описание на квадратичните алгебри

Теорема 2. Единствените квадратични алгебри над полето $F$ с характеристика $\neq 2$ са:

1) кватернионната алгебра $K(\alpha, \beta)$ с образуващи $1, i, j, k$ и съотношения $i^2=-\alpha$, $j^2=-\beta$, $ij+ji=0$, $k=ij$, $\alpha\in F$, $\beta\in F$, $\alpha\beta\neq 0$;

2) двумерната комутативна алгебра $K(\alpha)$ с образуващи $1, i$ и съотношение $i^2=-\alpha$, $0\neq\alpha\in F$;

3) полето $F$;

4) директната сума $R\oplus Q$ на алгебра $R$ от типа 2) или 3) и нилпотентна алгебра $Q$ с тъждествено съотношение $x^2=0$.

*Доказателство.* От теорема 1 следва, че когато квадратичната алгебра $A$ не е от типа 1), фактор-алгебрата $R=A/Q$ ще бъде от типа 2), или 3). В такъв случай поради комутативността на $R$ ще имаме $xy-yx\in Q$ при произволни $x, y\in A$, т. е. $(xy-yx)^2=0$. Нека $A\neq F$ и $x, y$ да са два произволни елемента от $I_m(A)$. Тогава

$$x^2=\lambda\in F,\quad y^2=\mu\in F,\quad (xy)'=yx,\quad xy+yx=2\gamma\in F,\quad (xy-yx)^2=0,$$
$$(xy)^2+(yx)^2-2\lambda\mu=0$$

и ще имаме

$$(xy)^2=x(yx)y=x(2\gamma-xy)y=2\gamma xy-2\lambda\mu,$$
$$(yx)^2=y(xy)x=y(2\gamma-yx)x=2\gamma yx-2\lambda\mu,$$

откъдето чрез почленно събиране и вземайки пред вид равенството $(xy)^2+(yx)^2=2\lambda\mu$, получаваме $2\lambda\mu=2\gamma(xy+yx)-4\lambda\mu$, т. е. $\gamma^2=\lambda\mu$. Последното равенство може да се запише във вида

$$(R_e(xy))^2=N(x)N(y),\quad x, y\in I_m(A)$$

или още така:

$$(x, y)^2=(x, x)(y, y),\quad x, y\in I_m(A).$$

(Това означава, че детерминантата на Грам за всеки два елемента от $I_m(A)$ е равна на нула.) Като положим $\alpha=(y, y)$, $\beta=-(x, y)$ и разгледаме линейната комбинация $u=\alpha x+\beta y$, ще се убедим, че $u\in Q$. Наистина ще имаме $u'=-u$ и

$$N(u)=\alpha^2(x, x)+2\alpha\beta(x, y)+\beta^2(y, y)=(y, y)[(y, y)(x, x)-(x, y)^2]=0;$$

следователно $u\in Q$. Ако множеството от елементите на $I_m(A)$ с ненулева норма е празно, очевидно всеки елемент $a$ от $A$ еднозначно ще се представя във вида $a=a_1+a_2$, $a_1\in F$, $a_2\in Q$ и следователно $A=F\oplus Q$. Сега да предположим, че в $I_m(A)$ има елемент $y$ с $N(y)=\alpha\neq 0$. Нека $x$ е произволен елемент от $I_m(A)$. Според доказаното по-горе ще имаме $\alpha x+\beta y \in Q$. Тъй като $y \in Q$, то $\alpha \neq 0$ и всеки елемент $x$ от $I_m(A)$ ще може да се представи еднозначно във вида $x = \gamma y+q$, гдето $\gamma \in F$ и $q \in Q$. Оттук заключаваме, че $A=R\oplus Q$, гдето $R$ е комутативната двумерна алгебра, породена от елементите $1, y$. Случаят, когато фактор-алгебрата на $A$ по идеала $Q$ е едномерна, е тривиален и тогава равенството $A=F\oplus Q$ е очевидно. С това теоремата е доказана.

В заключение ще отбележим едно тъждествено съотношение, което е изпълнено във всяка квадратична алгебра (и в частност в пълната матрична алгебра на матриците от втори ред). Това тъждество се получава формално от следните геометрични съображения. Нека $x$, $y$, $z$ да са произволни елементи от $A$ и да въведем „смесено произведение" $V=(x, y, z)$ по формулата

$$V=(x, [y, z]), \quad [y, z]=yz-zy.$$

Можем да очакваме по аналогия с подобен случай от геометрията на тримерното пространство, че ще имаме

$$(x, y, z)=(y, z, x).$$

Теорема 2 ни дава възможност да направим директна проверка, чрез което да докажем горното тъждество, разглеждайки поотделно различните възможни случаи на описаните четири типа квадратични алгебри. Върху пресмятанията тук няма да се спираме. Като преобразуваме това тъждество елиминирайки константите от полето, които биха се появили при записването му в развит вид, ще получим следното тъждествено съотношение в $A$

$$[xy+yx, z][[y, z], [z, x]]+[[y, z], [z, x]][xy+yx, z]=0.$$

Интересно е да се знае дали горното тъждество в пълната матрична алгебра на матриците от втори ред е следствие от единствено досега познатите подобни тъждества: тъждеството на Хол $[x, [y, z]^2]=0$ и стандартното за матричните алгебри тъждество $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$. Отговорът на така поставения въпрос обаче не ни е известен.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Бурбаки, Н. Алгебра — модули, кольца, формы. Москва, 1966.
2. Ленг, С. Алгебра. Москва, 1968.
3. Дочев, К. О некоторых свойствах подгрупп ортогональной группы. Втори конгрес на българските математици, 1967 (доклад).


*Постъпила на 15. II. 1969 г.*

# КВАДРАТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

Кирил Дочев

*(Резюме)*

Пусть $A$ ассоциативная алгебра с единицей над произвольным полем $F$ с характеристикой $\neq 2$ и каждая подалгебра $F(a)$, порожденная элементом $a \in A$, одномерная или двумерная. Имеет место следующая теорема: или $A$ является алгеброй обобщенных кватернионов, над $F$, или все нильпотентные элементы $Q$ образуют двусторонний идеал $A$, и фактор-алгебра $A/Q$ коммутативна с размерностью 1 или 2, причем $A \cong Q \times A/Q$.

Указаны некоторые следствия теоремы.

# ALGÈBRES QUADRATIQUES

Kiril Dočev

*(Résumé)*

Soit $A$ une algèbre associative avec unité sur corps commutatif $F$ à caractéristique $\neq 2$, telle que chaque sous-algèbre monogène $F[a]$ de $A$ soit à une ou deux dimensions. Nous avons le théorème suivant:

$A$ est une algèbre de quaterniens sur $F$, ou bien l'ensemble $Q$ des éléments nilpotenst de $A$ est un idéal bilatère de $A$ et $A/Q$ est une algèbre commutative de dimension un ou deux. En outre $A \cong Q \times A/Q$.

Suivent quelques corollaires du théorème démontré.