БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

ДИРЕКТНИ РАЗЛАГАНИЯ НА ПРОЕКТИВНИ МОДУЛИ

Владимир Чуканов

Нека A е пръстен с единица. Всички модули, които ще разглеждаме, се предполагат леви и унитарни, всички идеали — леви, освен ако не е уговорено противното.

Ще припомним, че един модул P се нарича проективен, ако за всеки епиморфизъм $\varphi: E \to F$ и всеки морфизъм $v: P \to F$ съществува морфизъм $u: P \to E$, така че $\varphi \circ u = v$. Еквивалентно: ако съществува модул Q, така че $P \oplus Q$ е свободен. Очевидно всеки свободен модул е проективен и всяка директна сума на проективни модули е проективен модул. Значителен интерес представлява следният въпрос: при какви условия за A всеки проективен модул (или всеки крайнопороден проективен модул) се разлага в директна сума от модули от по-специален вид? В частност, кога всеки проективен модул е свободен? В различни частни случаи отговорите на подобни въпроси са известни. Например, ако A е локален или главен пръстен, всеки проективен модул е свободен. Ако A регулярен (т. е. ако уравнението $axa = a$ има решение при всяко $a \in A$), всеки проективен модул се разлага в директна сума от директни идеали [2]. При това един идеал $\mathfrak{a}$ наричаме директен, ако съществува идеал $\mathfrak{b}$, така че $A = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Ако A е дедекиндов пръстен, всеки безкрайно породен проективен модул е свободен, но съществуват крайнопородени несвободни проективни модули, разбира се, ако A не е главен.

Нека пръстенът A е фиксиран. Разглеждаме следните свойства:

(P) Всеки крайнопороден проективен модул е свободен.

(P*) Всеки проективен модул е свободен.

(Q) Всеки крайнопороден проективен модул е директна сума от директни идеали.

(Q*) Всеки проективен модул е директна сума от директни идеали.

Ще отбележим, че условието (P) е еквивалентно на следните две:

(P_1) Всеки крайнопороден проективен модул е стабилно свободен.

(P_2) Ако P_1 и P_2 са крайнопородени проективни модули и $P_1 \oplus A$ и $P_2 \oplus A$ са изоморфни, то P_1 и P_2 са изоморфни.

При това крайнопородения модул P наричаме стабилно свободен, ако $P \oplus A^k$ е свободен за достатъчно големи k. Ще отбележим още, че от (P_2) следва следното по-общо твърдение: ако P_1, P_2 и Q са крайнопородени проективни модули и $P_1 \oplus Q \simeq P_2 \oplus Q$, то $P_1 \simeq P_2$, с други думи, можем да „съкратим" на Q. Еквивалентността на (P) с (P_1) и (P_2) се установява непосредствено.

За всяко от горните свойства възниква въпросът да се характеризират пръстените, притежаващи това свойство. По всяка вероятност тази задача се свързва със значителни трудности. В тази работа се разглежда поведението на горните свойства при преминаване към някои „родствени" пръстени, по-точно към факторпръстени, матрични пръстени и пръстени от формални степенни редове.

Теорема 1. Нека A е пръстен, $\mathfrak{m}$ е двустранен идеал в A, P е крайнопороден проективен A-модул и $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_k$ са подмодули на $P/\mathfrak{m}P$, такива че $P/\mathfrak{m}P=\bigoplus_{i=1}^{k}\bar{P}_i$. Предполагаме A пълен и отделим относно $\mathfrak{m}$-адичната топология [1]. Тогава съществуват подмодули $P_1, P_2, \ldots, P_k$ на P такива, че $P=\bigoplus_{i=1}^{k} P_i$ и $P_i/\mathfrak{m}P_i=\bar{P}_i$.

Доказателство. Ще използваме следната

Лема. Нека R е пълен отделим топологичен пръстен, в който отворените двустранни идеали образуват фундаментална система от околности на нулата, $\mathfrak{a}$ е затворен идеал в R, елементите на който са топологически нилпотентни, $\pi: R\to R/\mathfrak{a}$ е каноничната проекция. За всеки идемпотент $\bar{e}\in R/\mathfrak{a}$ съществува идемпотент $e\in R$ такъв, че $\pi(e)=\bar{e}$.

Ако R е комутативен, доказателството се съдържа например в [1]. В общия случай нека $x\in R$ е такъв, че $\pi(x)=\bar{e}$. Означаваме с S затворения подпръстен на R, породен от x. Тогава S е комутативен. Освен това той е пълен и отделим в индуцираната топология. $\mathfrak{a}\cap S$ е затворен идеал в S, елементите на който са топологически нилпотентни, следователно можем да приложим твърдението на лемата за комутативния пръстен S и идеала $\mathfrak{a}\cap S$. Идентифицираме $S/\mathfrak{a}\cap S$ с подпръстен на $R/\mathfrak{a}$. Тогава $\bar{e}\in S/\mathfrak{a}\cap S$, откъдето следва твърдението.

Преминаваме към доказателство на теоремата. Всеки ендоморфизъм $u\in \mathrm{End}_A(P)$ индуцира ендоморфизъм $\pi(u)\in \mathrm{End}_A(P/\mathfrak{m}P)$. Очевидно съответствието $\pi:\mathrm{End}_A(P)\to\mathrm{End}_A(P/\mathfrak{m}P)$ е пръстенов хомоморфизъм. От проективността на P лесно следва, че π е епиморфизъм. Ще снабдим $\mathrm{End}_A(P)$ с пълна отделима топология, относно която Ker π ще се окаже затворен, а неговите елементи топологически нилпотентни, което ще ни даде възможност да приложим лемата.

Нека Q е такъв модул, че $P\oplus Q=A^n$. Тогава $\mathrm{End}_A(P)$ може да се вложи в $\mathrm{End}_A(A^n)$. По точно $\mathrm{End}_A(P)$ се отъждествява с множеството от ендоморфизми u на A^n, за които $u(P)\subset P$, $u|_Q=0$. Избирайки базис в A^n, можем да считаме $\mathrm{End}_A(A^n)=M_n(A)$ ($M_n(A)$ означава пръстена от квадратни матрици от n-ти ред с коефициенти в A). В $M_n(A)$ разглеждаме тихоновата топология, относно която идеалите $M_n(\mathfrak{m}^k)$, k 1, образуват фундаментална система от околности на нулата. Очевидно $M_n(A)$ е пълен отделим пръстен. В $\mathrm{End}_A(P)$ разглеждаме индуцираната топология. Очевидно тя е отделима и отворените идеали образуват фундаментална система от околности на нулата. Ще покажем, че $\mathrm{End}_A(P)$ е затворен в $M_n(A)$, откъдето ще последва, че е пълен. Нека $F=\{u\in M_n(A):u(P)\subset P\}$, $G=\{u\in M_n(A):u|_Q=0\}$. Тогава $\mathrm{End}_A(P)=F\cap G$. Нека $u\bar{\in} F$. Съществува $x\in P$ и $u(x)\in p$, т. е. $\mathrm{pr}_Q(u(x))=0$. Но тогава поне една координата на $\mathrm{pr}(u(x))$ е $\neq 0$ и следователно не принадлежи на $\mathfrak{m}^k$ за достатъчно голямо k. Можем да твърдим, че $(u+M_n(\mathfrak{m}^k))\cap F=\emptyset$. Действително, ако $\varphi\in M_n(\mathfrak{m}^k)$, то $\mathrm{pr}_Q(u(x)+\varphi(x))\neq 0$, тъй като всички координати на $pr_Q(\varphi(x))$ принадлежат на $\mathfrak{m}^k$, а поне една от координатите на $\mathrm{pr}_Q(u(x))$ не принадлежи на $\mathfrak{m}^k$. Това показва, че $u(x)+\varphi(x)\in\overline{P}$ или $u+\varphi\in\overline{F}$, с което е установено, че F е затворено. По подобен начин се вижда, че и G е затворено, откъдето и $\mathrm{End}_A(P)$ е затворен. Разглеждаме идеала $\mathrm{End}_A(P)\cap M_n(\mathfrak{m})$. Той е отворен, а следователно и затворен. Освен това неговите елементи са топологически нилпотентни, което следва веднага от включването $M_n(\mathfrak{m}))^k\subset M_n(\mathfrak{m}^k)$. Остава да отбележим, че $\mathrm{Ker}\,\pi=\mathrm{End}_A(P)\cap M_n(\mathfrak{m})$.

Нека сега $P/\mathfrak{m}P=\overline{P}_1\oplus\overline{P}_2$. Означаваме с $\overline{e}_i$, $i=1, 2$, каноничната проекция на $R/\mathfrak{m}P$ върху $\overline{P}_i$. Очевидно $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ са идемпотенти в $\mathrm{End}_A(P/\mathfrak{m}P)$, свързани с равенството $\overline{e}_1+\overline{e}_2=1$. Съгласно лемата съществува идемпотент $e_i\in\mathrm{End}_A(P)$, такъв че $\pi(e_1)=\overline{e}_1$. Нека $e_2=1-e_1$. Тогава $\pi(e_2)=\overline{e}_2$. Полагаме $P_i=\mathrm{Im}\,e_1$, $P_2=\mathrm{Im}\,e_2$. Очевидно $P=P_1\oplus P_2$. Нека $\varphi:P\to P\mathfrak{m}P$ е каноничната проекция. О комутативната диаграма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{e_1} & P \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ P/\mathfrak{m}P & \xrightarrow{\overline{e}_1} & P/\mathfrak{m}P \end{array}$$

следва равенството $\varphi(e_1(P))=\overline{e}_1(\varphi(P))$, което може да се запише още във вида $\varphi(P_1)=\overline{P}_1$. Но P_i е директна компонента в P, откъдето $\varphi(P_1)=P_1\mathfrak{m}P_1$, т. е. $P_1/\mathfrak{m}P_1=\overline{P}_1$. Аналогично се установява, че $P_2/\mathfrak{m}P_2=\overline{P}_2$.

В общия случай, когато $K>2$, процедираме по индукция.

В следващите твърдения предположенията за A и $\mathfrak{m}$ са същите, както в теорема 1.

Следствие 1. Нека $\overline{P}$ е крайнопороден проективен $A/\mathfrak{m}$-модул. Съществува крайнопороден проективен A-модул P, така че $\overline{P}/\mathfrak{m}P\cong\overline{P}$. Ако $\overline{P}$ се поражда от n елемента, P може да бъде избран така, че да се поражда от n елемента. В частност, ако $\overline{\mathfrak{p}}$ е директен идеал в $A/\mathfrak{m}$, съществува директен идеал $\mathfrak{p}$ в A, така че $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}\mathfrak{p}=\overline{\mathfrak{p}}$.

Съществува $A/\mathfrak{m}$-модул $\overline{Q}$, така че $P\oplus\overline{Q}=(A/\mathfrak{m})^n$. Но $(A/\mathfrak{m})^n=A^n/\mathfrak{m}A^n$ и съгласно теорема 1 съществува директно разлагане $A^n=P\oplus Q$ с $P/\mathfrak{m}P=\overline{P}$ и $Q/\mathfrak{m}Q=\overline{Q}$. Освен това $P\simeq A^n/Q$, което показва, че P има система образуващи от n елемента. Твърдението за директни идеали следва от факта, че с точност до изоморфизъм директните идеали съвпадат с моногенните проективни модули.

Следствие 2. Ако A удовлетворява условието (P) или (P_1), то и $A/\mathfrak{m}$ удовлетворява същото условие.

Действително, нека $\overline{P}$ е крайнопореден проективен $A/\mathfrak{m}$-модул. Тогава съществува крайнопороден проективен A-модул P такъв, че $P/\mathfrak{m}P\simeq\overline{P}$. По предположение P е свободен (стабилно свободен) откъдето следва, че и $\overline{P}$ е свободен (стабилно свободен).

Следствие 3. Ако A удовлетворява условието (Q), то и $A/\mathfrak{m}$ го удовлетворява.

Доказателството е аналогично на това на следствие 2.

Следствие 4. Ако P е крайнопороден неразложим проективен A-модул, $P/\mathfrak{m}P$ е неразложим.

Следва непосредствено от теорема 1.

Преди да продължим по-нататъшното изложение, ще отбележим, че не ни е известно дали формулираната по-горе теорема е в сила за безкрайнопородени модули и дали не могат да се отслабят някои от нейните предположения.

Теорема 2. Нека A е пръстен и $\mathfrak{m}$ е двустранен идеал в A, съдържащ се в радикала на A, P_1 и P_2 са крайно породени проективни A-модули. За да бъдат P_1 и P_2 изоморфни, необходимо и достатъчно е $P_1/\mathfrak{m}P_1$ и $P_2/\mathfrak{m}P_2$ да са изоморфни. Ако освен това $\mathfrak{m}$ е нилпотентен, твърдението остава в сила за произволни проективни P_1 и P_2.

Доказателство. Необходимостта е тривиална. Да установим достатъчността. Нека θ: $P_1/\mathfrak{m}P_1 \longrightarrow P_2/\mathfrak{m}P_2$ е изоморфизъм. От проективността на P_1 следва, че съществува морфизъм $\varphi: P_1 \to P_2$ така, че следната диаграма е комутативна:

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\varphi} & P_2 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ P_1/\mathfrak{m}P_1 & \xrightarrow{\theta} & P_2/\mathfrak{m}P_2 \end{array}$$

π_1 и π_2 означават каноничните епиморфизми). Тъй като θ и π_1 са епиморфизми, то и $\theta\circ\pi_1$ е епиморфизъм, а следователно $\pi_2\circ\varphi$ е епиморфизъм, откъдето $\operatorname{Im}\varphi+\mathfrak{m}P_2=P_2$. Ако P_2 е крайнопороден, от лемата на Накаяма следва $\operatorname{Im}\varphi=P_2$. Ако P_2 е произволен, но $\mathfrak{m}$ е нилпотентен, горното равенство дава $\mathfrak{m}(P_2/\operatorname{Im}\varphi)=P_2/\operatorname{Im}\varphi$, откъдето по индукция $\mathfrak{m}^n(P_2/\operatorname{Im}\varphi)=P_2/\operatorname{Im}\varphi$ за всяко $n>1$. Но $\mathfrak{m}^n=0$ за достатъчно големи n и следователно $P_2/\operatorname{Im}\varphi=0$ или $P_2=\operatorname{Im}\varphi$. И така, и в двата случая φ е епиморфизъм. Нека K е ядрото на φ. От проективността на P_2 следва, че P_1 се разлага в директна сума $K\oplus L$, където L се изобразява чрез φ изоморфно върху P_2. Тогава $P_1/\mathfrak{m}P_1$ се разлага в директна сума $K/\mathfrak{m}K\oplus L/\mathfrak{m}L$ и $L/\mathfrak{m}L$ се изобразява чрез θ изоморфно върху $P_2/\mathfrak{m}P_2$, което е възможно само при $K/\mathfrak{m}K=0$, защото θ е изоморфизъм. И така, $K/\mathfrak{m}K=0$ или $K=\mathfrak{m}K$. Ако P_1 е крайнопороден, то и K е крайнопороден и от лемата на Накаяма следва $K=0$. Ако $\mathfrak{m}$ е нилпотентен, за всяко $n\geq 1$ имаме $K=\mathfrak{m}^nK$ и следователно $K=0$. С това е показано, че φ е мономорфизъм, а следователно и изоморфизъм.

Следващите две твърдения се формулират при предположение, че A е пръстен, $\mathfrak{m}$ е двустранен идеал, съдържащ се в радикала на A.

Следствие 1. Нека P е крайнопороден проективен A-модул. За да бъде P свободен (стабилно свободен), необходимо и достатъчно е $P/\mathfrak{m}P$ да е свободен (стабилно свободен) като $A/\mathfrak{m}$-модул. Ако освен това $\mathfrak{m}$ е нилпотентен, твърдението остава в сила без предположението за крайна породеност на P.

Във всички случаи необходимостта е очевидна. Нека сега например $P/\mathfrak{m}P$ е стабилно свободен. Тогава

$$(P/\mathfrak{m}P)\oplus(A^k/\mathfrak{m}A^k)\simeq A^n/\mathfrak{m}A^n.$$

Но от теорема 2 следва, че $P\oplus A^k\simeq A^n$, т. е. P е стабилно свободен.

С л е д с т в и е 2. Ако $A/\mathfrak{m}$ удовлетворява някое от условията (P), (P_1), (P_2), то и A удовлетворява това условие. Ако $\mathfrak{m}$ е нилпотентен и $A/\mathfrak{m}$ удовлетворява (P*), то и A го удовлетворява.

Да разгледаме например (P_2). Нека $P_1 \oplus A \cong P_2 \oplus A$. Тогава

$$P_1 \mathfrak{m} P_1 \oplus A/\mathfrak{m} \cong P_2/\mathfrak{m}P_2 \oplus A/\mathfrak{m}$$

и от предположението за $A/\mathfrak{m}$ следва $P_1/\mathfrak{m}P_1 \cong P_2/\mathfrak{m}P_2$. Но тогава $P_1 \cong P_2$ съгласно теорема 2.

С л е д с т в и е 3. Нека K е комутативен пръстен, удовлетворяващ някое от условията (P), (P_1), (P_2). Тогава всеки пръстен от формални степенни редове над K (от комутиращи или не променливи) удовлетворява същото условие.

Действително, нека A е пръстен от степенни редове на n променливи $T_1, T_2, \ldots, T_n$ (комутиращи или не). Означаваме с $\mathfrak{m}$ двустранния идеал, породен от $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Тогава $\mathfrak{m}$ се съдържа в радикала на A и $A/\mathfrak{m} \cong K$. Твърдението следва веднага от следствие 2.

Последното следствие дава възможност значително да разширим класа от известни пръстени, удовлетворяващи например (P). Ще отбележим, че това е най-важното условие от разглежданите.

Можем, разбира се, да прилагаме комбинирано теорема 1 и теорема 2. Така например, ако $\mathfrak{m}$ е двустранен идеал в един пръстен A, съдържащ се в радикала на A и такъв, че A е пълен и отделим в $\mathfrak{m}$-адичната топология, за да удовлетворява A някое от условията (P), (P_1), необходимо и достатъчно е $A/\mathfrak{m}$ да го удовлетворява. Да разгледаме друг пример. Нека A е пълен полулокален пръстен, $\mathfrak{m}$ е радикалът на A. Ще покажем, че всеки крайнопороден проективен модул над A е сума от директни идеали. Действително, тъй като $A/\mathfrak{m}$ е полупрост пръстен, $P/\mathfrak{m}P$ се разлага в директна сума $\bar{\mathfrak{p}}_1 \oplus \bar{\mathfrak{p}}_2 \oplus \cdots \oplus \bar{\mathfrak{p}}_k$ от прости $A/\mathfrak{m}$-модули, които с точност до изоморфизъм са директни идеали в $A/\mathfrak{m}$. Съгласно следствие 1 от теорема 1 съществуват директни идеали $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \ldots, \mathfrak{p}_k$ в A, така че $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{m}\mathfrak{p}_i = \bar{\mathfrak{p}}_i$. От теорема 2 веднага следва $P = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_k$.

Накрая ще направим някои бележки за матрични пръстени. Ще отбележим, че дори ако K е поле, матричните пръстени $M_n(K)$, $n \geqq 2$, не са задължени да удовлетворяват условието (P). Но както следва от [2], те удовлетворяват (Q), дори (Q*).

Т е о р е м а 3. Нека A е пръстен, $M_n(A)$ е пръстенът от квадратни матрици от ред n с коефициенти в A. Ако A удовлетворява условието (Q) или (Q*), то и $M_n(A)$ удовлетворява същото условие.

В действителност категорията от A-модули е естествено еквивалентна на категорията от $M_n(A)$-модули. Отъждествяваме $M_n(A)$с $\mathrm{End}_A(A^n)$, при което A^n се превръща в $M_n(A)$-модул. Тогава функторът $E \xrightarrow{T} E \oplus_A A^n$ преобразува A-модулите в $M_n(A)$-модули и е еквивалентност, т. е. има обратен. Ще отбележим, че T преобразува директните идеали на A в директни идеали на $M_n(A)$. За да завършим доказателството, достатъчно е да отбележим, че при еквивалентност между две абелеви категории проективните модули се преобразуват в проективни, крайнопородените в крайнопородени и директните суми в директни суми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bourbaki, N. Algèbre commutative. Paris, Herman, 1961.
2. Капланский, И. Проективные модули. Математика 4 : 1, 1960, Москва, 3—8.

Постъпила на 15. II. 1969 г.

ПРЯМЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ

Владимир Чуканов

(Резюме)

Пусть A кольцо и $\mathfrak{m}$ двусторонний идеал, такой что A полно и отделимо в $\mathfrak{m}$-адической топологии. Доказывается следующая

Теорема 1. Пусть P конечно порожденный проективный A-модуль, а $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_k$ такие подмодули $P/\mathfrak{m}P$, что $P/\mathfrak{m}P = \bigoplus_{i=1}^{k} \bar{P}_i$. Тогда существуют подмодули $P_1, \ldots, P_k$, что $P = \bigoplus_{i=1}^{k} P_i$ и $P_i/\mathfrak{m}P_i = \bar{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Из теоремы 1 в частности следует, что для каждого конечно порожденного проективного $A/\mathfrak{m}$-модуля $\bar{P}$ существует конечно порожденный проективный A-модуль P такой, что $P/\mathfrak{m}P \approx \bar{P}$. Из этого следует, что если каждый конечно порожденный проективный A-модуль является свободным, $A/\mathfrak{m}$ обладает тем же свойством.

Пусть A кольцо, $\mathfrak{m}$ двусторонний идеал, содержащийся в радикале кольца A. Доказывается

Теорема 2. Если P_1 и P_2 являются двумя конечно порожденными проективными A-модулями, для того, чтобы они были изоморфными, необходимо и достаточно, чтобы $P_1/\mathfrak{m}P_1$ и $P_2/\mathfrak{m}P_2$ были изоморфными.

Из теоремы 2 в частности следует, что если каждый конечно порожденный проективный $A/\mathfrak{m}$-модуль свободен, то A обладает тем же свойством. В виде следствия получаем: пусть K такое кольцо, что каждый конечно порожденный проективный K-модуль свободен. Тогда такое же свойство имеет и кольцо $K[[T_1 \ldots T_n]]$ формальных степенных рядов n переменных с коэффициентами в K.

DÉCOMPOSITION DIRECTE DE MODULES PROJECTIFS

Vladimir Čukanov

(Résumé)

Soient A un anneau et $\mathfrak{m}$ un idéal bilatère, tel que A soit complet et séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Nous démontrons le théorème suivant:

Théorème 1. Soient P un A-module projectif de type fini $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_k$, des sous-modules de $P/\mathfrak{m}P$, tels que $P/\mathfrak{m}P = \bigoplus_{i=1}^{k} \bar{P}_i$. Alors il existe des sous-modules $P_1, P_2, \ldots, P_k$, de P tels que $P \bigoplus_{i=1}^{k} P_i$ et $P_i/\mathfrak{m}P_i = \bar{P}_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$.

En particulier il résulte du théorème 1 que pour chaque $A/\mathfrak{m}$-module projectif de type fini $\bar{P}$ il existe un A-module projectif de type fini P tel que $P/\mathfrak{m}P \simeq \bar{P}$. De ceci il résulte que si chaque A-module projectif de type fini est libre, $A/\mathfrak{m}$ possède la même propriété.

Soient A un anneau et $\mathfrak{m}$ un idéal bilatère, contenu dans le radical de A. Nous démontrons

Théorème 2. Si P_1 et P_2 sont deux A-modules projectifs de type fini, pour que $P_1 \cong P_2$ il faut et il suffit que $P_1/\mathfrak{m}P_1 \cong P_2/\mathfrak{m}P_2$.

En particulier il résulte du théorème 2 que si chaque $A/\mathfrak{m}$-module projectif de type fini est libre, A possède la même propriété. Comme conséquence: si K est un anneau tel que chaque K-module projectif de type fini est libre, il en est de même pour l'anneau $K[[T_1, T_2, \ldots, T_n]]$ de séries formelles de n indéterminé à coefficients dans A.