БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

ИНВАРИАНТИ ОТ ВТОРИ РЕД НА ТРИПАРАМЕТРИЧНИТЕ СЪВКУПНОСТИ ОТ ПРАВИ В P_4

Иванка Иванова-Каратопраклиева

В [11] построихме каноничен репер на произволна трифокусна трипараметрична съвкупност M_3 от прави в четиримерното проективно пространство P_4 и показахме, че диференциалната околност от втори ред на произволна права $p \in M_3$ притежава 9 диференциални инварианти*. В [12] дадохме геометрично тълкуване на тези диференциални инварианти при каноничен репер. В настоящата работа ще дадем геометрично тълкуване на диференциалните инварианти и инвариантните квадратични форми от втори ред на M_3 с помощта на обекти, които са инвариантни относно подгрупата G_1 на групата G на проективните преобразувания, която запазва реперите от първи ред на M_3.

§ 1. Диференциални инварианти и инвариантни форми от втори ред на M_3

Реперите от първи ред на M_3 имат следната геометрична характеристика: A_1, A_2, A_1+A_2 са фокуси на M_3 върху правата $p(u, v, w)$, която описва съвкупността, а координатните хиперравнини $\varepsilon_1 = A_1A_2A_3A_4$, $\varepsilon_2 = A_1A_3A_4A_5$ и $\varepsilon_3 = A_1A_2A_3A_5$ са съответните им фокални хиперравнини. Главните форми от нулев ред са

$$\omega_1^3,\ \omega_1^4,\ \omega_2^5,\ \omega_2^3,\ \omega_2^4,\ \omega_2^5. \tag{1}$$

Приемайки първите три за базисни както в [13], получаваме, че спрямо реперите от първи ред M_3 се задава със системата

$$\begin{aligned} &\omega_1^5 = 0, \\ &\omega_2^3 = 0, \\ &\omega_2^4 = -\omega_1^4. \end{aligned} \tag{2}$$

Уравненията на развиваемите повърхнини на M_3 са

$$\begin{aligned} &\omega_1^3 = 0, \\ &\omega_1^4 = 0 \end{aligned} \tag{a}$$

---

* Многообразието M_3 е изследвано също от Гейдельман [3] и от Сычева [7] — [10].

с фокус $F_1=A_1$ и допирателна равнина $\zeta_1=A_1A_2A_5$;

$$\text{(b)}\qquad \begin{aligned}\omega_1^4&=0,\\ \omega_2^5&=0\end{aligned}$$

с фокус $F_2=A_2$ и допирателна равнина $\zeta_2=A_1A_2A_3$;

$$\text{(c)}\qquad \begin{aligned}\omega_1^3&=0,\\ \omega_2^5&=0\end{aligned}$$

с фокус $F_3=A_1+A_2$ и допирателна равнина $\zeta_3=A_1A_2A_4$. Продължената система на (2) е

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned}
-\omega_3^5&=x_1\omega_1^3+x_2\omega_1^4+x_3\omega_2^5, & \omega_2^1&=y_1\omega_1^3+y_2\omega_1^4+y_3\omega_2^5,\\
-\omega_4^5&=x_2\omega_1^3+x_4\omega_1^4+x_5\omega_2^5, & \omega_4^3&=y_2\omega_1^3+y_4\omega_1^4+y_5\omega_2^5,\\
\omega_1^2&=x_3\omega_1^3+x_5\omega_1^4+x_6\omega_2^5, & -\omega_5^3&=y_3\omega_1^3+y_5\omega_1^4+y_6\omega_2^5;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\omega_3^4&=z_1\omega_1^3+z_2\omega_1^4+z_3\omega_2^5,\\
\omega_2^1+\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_1^2&=z_2\omega_1^3+z_4\omega_1^4+z_5\omega_2^5,\\
-\omega_5^4&=z_3\omega_1^3+z_5\omega_1^4+z_6\omega_2^5.
\end{aligned}$$

Следователно

$$\text{(4)}\qquad \omega_3^5,\ \omega_4^5,\ \omega_1^2,\ \omega_2^1,\ \omega_4^3,\ \omega_5^3,\ \omega_3^4,\ \omega_1^1-\omega_2^2,\ \omega_5^4$$

са диференциални форми от първи ред на съвкупността M^3. Коефициентите x_i, y_i, z_i, $i=1,\ldots,6$, характеризират диференциалната околност от втори ред на правата p. За техните вариации при изменението на реперите вътре в подгрупата на реперите от първи ред получаваме

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned}
\delta x_1&=x_1(2\pi_3^3-\pi_5^5-\pi_2^2), & \delta y_1&=y_1(\pi_3^3-\pi_2^2),\\
\delta x_2&=x_2(\pi_3^3+\pi_4^4-\pi_2^2-\pi_5^5), & \delta y_4&=y_4(2\pi_4^4-\pi_3^3-\pi_2^2),\\
\delta x_4&=x_4(2\pi_4^4-\pi_2^2-\pi_5^5), & \delta y_5&=y_5(\pi_5^5+\pi_4^4-\pi_3^3-\pi_2^2),\\
\delta x_6&=x_6(\pi_5^5-\pi_2^2), & \delta y_6&=y_6(2\pi_5^5-\pi_3^3-\pi_2^2),\\
\delta z_1&=z_1(2\pi_3^3-\pi_4^4-\pi_2^2), & \delta z_4&=z_4(\pi_4^4-\pi_2^2),\\
\delta z_3&=z_3(\pi_3^3+\pi_5^5-\pi_2^2-\pi_4^4), & \delta z_6&=z_6(2\pi_5^5-\pi_4^4-\pi_2^2),
\end{aligned}$$

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned}
\delta x_3&=x_3(\pi_3^3-\pi_2^2)-\pi_3^2,\\
\delta x_5&=x_5(\pi_4^4-\pi_2^2)-\pi_4^2,\\
\delta y_2&=y_2(\pi_4^4-\pi_2^2)+\pi_4^1,\\
\delta y_3&=y_3(\pi_5^5-\pi_2^2)-\pi_5^1,\\
\delta z_2&=z_2(\pi_3^3-\pi_2^2)-\pi_3^1+\pi_3^2,\\
\delta z_5&=z_5(\pi_5^5-\pi_2^2)-\pi_5^1+\pi_5^2.
\end{aligned}$$

Равенствата (5) показват, че величините

$$(7) \qquad x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_6,\ y_1,\ y_4,\ y_5,\ y_6,\ z_1,\ z_3,\ z_4,\ z_6$$

са относителни инварианти от втори ред.

От (5) чрез елиминиране на разликите $\pi_3^3-\pi_2^2$, $\pi_4^4-\pi_2^2$, $\pi_5^5-\pi_2^2$ получаваме деветте абсолютни диференциални инварианти от втори ред на M_3 [11], [13]:

$$(8) \qquad \begin{aligned} I_1&=\frac{x_1x_6}{y_1^2}, & I_2&=\frac{x_2x_6}{y_1z_4}, & I_3&=\frac{x_4x_6}{z_4^2};\\ I_4&=\frac{y_1y_4}{z_4^2}, & I_5&=\frac{y_1y_5}{x_6z_4}, & I_6&=\frac{y_1y_6}{x_6^2};\\ I_7&=\frac{z_1z_4}{y_1^2}, & I_8&=\frac{z_3z_4}{y_1x_6}, & I_9&=\frac{z_6z_4}{x_6^2}. \end{aligned}$$

Като диференцираме външно базисните форми ω_1^3, ω_1^4, ω_2^5, получаваме съответно

$$(9) \qquad \begin{aligned} D\omega_1^3&=(\omega_1^1-\omega_3^3)\wedge\omega_1^3-\omega_4^3\wedge\omega_1^4,\\ D\omega_1^4&=(\omega_1^1-\omega_4^4)\wedge\omega_1^4-\omega_3^4\wedge\omega_1^3+\omega_1^2\wedge\omega_2^4,\\ D\omega_2^5&=(\omega_2^2-\omega_5^5)\wedge\omega_2^5-\omega_4^5\wedge\omega_2^4. \end{aligned}$$

Написвайки присъединените им билинейни форми за двата символа за диференциране — символа δ за диференциране спрямо вторичните параметри и символа d за диференциране спрямо главните параметри, — получаваме, че при изменението на репера вътре в подгрупата на реперите от първи ред базисните форми се изменят по следния начин:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \delta\omega_1^3&=(\pi_2^2-\pi_3^3)\omega_1^3,\\ \delta\omega_1^4&=(\pi_2^2-\pi_4^4)\omega_1^4,\\ \delta\omega_2^5&=(\pi_2^2-\pi_5^5)\omega_2^5. \end{aligned}$$

Формулите (10) показват, че ω_1^3, ω_1^4, ω_2^5 са относителни инвариантни форми на M_3. Съответните им нулеви двупараметрични подмногообразия

$$(d) \qquad \omega_1^3=0,$$

$$(e) \qquad \omega_1^4=0,$$

$$(f) \qquad \omega_2^5=0$$

имат инвариантна характеристика — всяка от тях съдържа две от трите развиваеми повърхнини на M_3. Двупараметричните подмногообразия (d), (e), (f), които в общия случай са нехолономни, в [12] и [13] назовахме конгруенции, следвайки терминологията на Карапетян [5], [6]. Според терминологията на Гейдельман [4] двупараметричните многообразия се наричат псевдоконгруенции, а трипараметричните — конгруенции. Ние ще продължаваме да ползваме първата терминология.

За вариациите на главните форми (4) от първи ред при изменението на репера вътре в подгрупата на реперите от първи ред получаваме

$$\delta\omega_3^5=(\pi_3^3-\pi_5^5)\omega_3^5+\pi_3^2\omega_2^5, \qquad \delta\omega_2^1=-\pi_4^1\omega_2^4-\pi_5^1\omega_2^5,$$

$$\delta\omega_4^5=(\pi_4^4-\pi_5^5)\omega_4^5+\pi_4^2\omega_2^5, \qquad \delta\omega_4^3=(\pi_4^4-\pi_3^3)\omega_4^3+\pi_4^1\omega_1^3,$$

$$\delta\omega_1^2=-\pi_3^2\omega_1^3-\pi_4^2\omega_1^4; \qquad \delta\omega_5^3=(\pi_5^5-\pi_3^3)\omega_5^3+\pi_5^1\omega_1^3;$$

$$(11) \qquad \delta\omega_3^4=(\pi_3^3-\pi_4^4)\omega_3^4+\pi_3^1\omega_1^4+\pi_3^2\omega_2^4,$$

$$\delta(\omega_2^1-\omega_2^2+\omega_1^1-\omega_1^2)=(\pi_5^2-\pi_5^1)\omega_2^5+(\pi_3^2-\pi_3^1)\omega_1^3,$$

$$\delta\omega_5^4=(\pi_5^5-\pi_4^4)\omega_5^4+\pi_5^1\omega_1^4+\pi_5^2\omega_2^4.$$

Елиминирайки от (10) и (11) вторичниге форми π_3^1, π_3^2, π_4^1, π_4^2, π_5^1, π_5^2, получаваме

$$\delta\varphi_1=(\pi_2^2-\pi_5^5)\varphi_1,$$

$$(12) \qquad \delta\varphi_2=(\pi_2^2-\pi_3^3)\varphi_2,$$

$$\delta\varphi_3=(\pi_2^2-\pi_4^4)\varphi_3,$$

където

$$\varphi_1=\omega_1^2\omega_2^5+\omega_1^3\omega_3^5+\omega_1^4\omega_4^5,$$

$$(13) \qquad \varphi_2=\omega_2^1\omega_1^3+\omega_2^4\omega_4^3+\omega_2^5\omega_5^3,$$

$$\varphi_3=(\omega_1^1+\omega_2^1-\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_1^4+\omega_1^3\omega_3^4+\omega_2^5\omega_5^4.$$

Следователно φ_1, φ_2, φ_3 са относителни инвариантни квадратични форми на M_3. Като използваме равенствата (3), получаваме

$$\varphi_1=x_1(\omega_1^3)^2+x_4(\omega_1^4)^2-x_6(\omega_2^5)^2+2x_2\omega_1^3\omega_1^4,$$

$$(14) \qquad \varphi_2=y_1(\omega_1^3)^2-y_4(\omega_1^4)^2-y_6(\omega_2^5)^2-2y_5\omega_1^4\omega_2^5,$$

$$\varphi_3=z_1(\omega_1^3)^2-z_4(\omega_1^4)^2+z_6(\omega_2^5)^2+2z_3\omega_1^3\omega_2^5.$$

Нулевите еднопараметрични подсъвкупности на квадратичните форми φ_1, φ_2, φ_3 провеждат върху фокалните хиперповърхнини (F_1), (F_2), (F_3) асимптотични линии [12].

С помощта на (10) и (12) получаваме

$$\delta\ln\frac{\varphi_1}{\omega_2^5}=0, \qquad \delta\ln\frac{\varphi_2}{\omega_1^3}=0, \qquad \delta\ln\frac{\varphi_3}{\omega_1^4}=0.$$

Тогава и

$$\delta\ln\frac{\varphi_2\varphi_3}{\omega_1^3\omega_1^4}=0, \qquad \delta\ln\frac{\varphi_1\varphi_3}{\omega_2^5\omega_1^4}=0, \qquad \delta\ln\frac{\varphi_1\varphi_2}{\omega_2^5\omega_1^3}=0;$$

$$\delta\ln\frac{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}{\omega_1^3\omega_1^4\omega_2^5}=0.$$

Следователно

$$(15) \qquad \bar{\varphi}_1=\frac{\varphi_1}{\omega_2^5}, \qquad \bar{\varphi}_2=\frac{\varphi_2}{\omega_1^3}, \qquad \bar{\varphi}_3=\frac{\varphi_3}{\omega_1^4};$$

$$(16) \qquad \Phi_1 = \frac{\varphi_2\varphi_3}{\omega_1^3 \cdot \omega_1^4}, \quad \Phi_2 = \frac{\varphi_1\varphi_3}{\omega_2^5\omega_1^4}, \quad \Phi_3 = \frac{\varphi_1\varphi_2}{\omega_2^5\omega_1^3};$$

$$(17) \qquad \Phi = \frac{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}{\omega_1^3\omega_1^4\omega_2^5}$$

са абсолютни инвариантни форми от втори ред на M_3. От тях очевидно независими са само $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2$, $\overline{\varphi}_3$.

§ 2. Геометрични тълкувания на диференциалните инварианти

За по-голяма яснота в следващите разглеждания ще ползваме даденото в [12] изображение на подмногообразията на M_3 в двумерната проективна равнина P_2. Гледайки на наредената тройка базисни форми ω_2^5, ω_1^3, ω_1^4 като на хомогенни точкови координати в P_2, то: развиваемите еднопараметрични подсъвкупности (a), (b), (c) се изобразяват съответно в точките $C_1(1, 0, 0)$, $C_2(0, 1, 0)$, $C_3(0, 0, 1)$; нехолономните конгруенции (d), (e), (f) — съответно в правите C_1C_3, C_1C_2, C_2C_3; съвкупността от еднопараметричните подсъвкупности, които анулират квадратичната форма φ_1, се изобразява в крива k_1 от втора степен. Аналогично имаме още криви k_2 и k_3.

За следващите разглеждания ще предполагаме, че всички относителни инварианти (7) на M_3 са различни от нула. С това изключваме от разглеждане следните специални видове трипараметрични съвкупности: съвкупности на които някоя от развиваемите повърхнини е конична, съвкупности, на които някоя от конгруенциите (d), (e), (f) е холономна, и съвкупности, на които някоя от фокалните линии* е асимптотична.

Всяка от правите C_jC_k, $j, k = 1, 2, 3$, $j \neq k$, има по две пресечни точки с всяка от кривите k_i, $i = 1, 2, 3$. Всичко ще има осемнадесет такива точки, на всяка от които в M_3 съответствува еднопараметрична подсъвкупност, принадлежаща на една от трите конгруенции на M_3 и пораждаща асимптотична линия върху една от фокалните хиперповърхнини. Техните уравнения са

$$(18) \qquad \omega_1^3 = 0, \qquad \sqrt{x_4}\,\omega_1^4 \pm \sqrt{x_6}\,\omega_2^5 = 0;$$

$$(19) \qquad \omega_1^4 = 0, \qquad \sqrt{x_1}\,\omega_1^3 \pm \sqrt{x_6}\,\omega_2^5 = 0;$$

$$(20) \qquad \omega_2^5 = 0, \qquad x_1\omega_1^3 + \left(x_2 \pm \sqrt{x_2^2 - x_1x_4}\right)\omega_1^4 = 0;$$

$$(21) \qquad \omega_1^3 = 0, \qquad y_4\omega_1^4 + \left(y_5 \pm \sqrt{y_5^2 - y_4y_6}\right)\omega_2^5 \quad 0;$$

* В [11], [12] тези линии са наречени главни.

$$\omega_1^4=0,$$
(22)
$$\sqrt{y_6}\,\omega_2^5\pm\sqrt{y_1}\,\omega_1^3=0;$$

$$\omega_2^5=0,$$
(23)
$$\sqrt{y_1}\,\omega_1^3\pm\sqrt{y_4}\,\omega_1^4=0;$$

$$\omega_1^3=0,$$
(24)
$$\sqrt{z_4}\,\omega_1^4\pm\sqrt{z_6}\,\omega_2^5=0;$$

$$\omega_1^4=0,$$
(25)
$$z_1\omega_1^3+(z_3\pm\sqrt{z_3^2-z_1z_6})\omega_2^5=0;$$

$$\omega_2^5=0,$$
(26)
$$\sqrt{z_1}\,\omega_1^3\pm\sqrt{z_4}\,\omega_1^4=0.$$

На всяка права C_jC_k, j, $k=1$, 2, 3, $j\neq k$, съответствува спрямо кривите k_i, $i=1$, 2, 3, по един полюс, единият от които е C_i, $i\neq j$, k, а другите два са инцидентни с C_iC_j, C_iC_k. На тях в многообразието M_3 съответствуват нови шест инвариантни еднопараметрични подсъвкупности, всяка от които е спрегната с една от конгуренциите на M_3 спрямо някоя от фокалните хиперповърхнини и принадлежи на някоя от другите две конгруенции [12]. Техните уравнения са

$$\omega_2^5=0,$$
(27)
$$x_2\omega_1^3+x_4\omega_1^4=0;$$

$$\omega_2^5=0,$$
(28)
$$x_1\omega_1^3+x_2\omega_1^4=0;$$

$$\omega_1^3=0,$$
(29)
$$y_5\omega_1^4+y_6\omega_2^5=0;$$

$$\omega_1^3=0,$$
(30)
$$y_4\omega_1^4+y_5\omega_2^5=0;$$

$$\omega_1^4=0,$$
(31)
$$z_3\omega_1^3+z_6\omega_2^5=0;$$

$$\omega_1^4=0,$$
(32)
$$z_1\omega_1^3+z_3\omega_2^5=0.$$

Освен горните еднопараметрични подсъвкупности на M_3 могат да се посочат и други. Например всеки две от кривите k_1, k_2, k_3 в общия случай имат четири общи точки и един общ полярен триъгълник. Следователно в общия случай за кои да е две фокални хиперповърхнини съществуват четири еднопараметрични подсъвкупности, които пораждат асимптотични линии, и три еднопараметрични подсъвкупности, всеки две от които са спрегнати относно тези две фокални хиперповърхнини. На всяка една от тези три еднопараметрични подсъвкупности съответствува едно двупараметрично подмногообразие, с което тя е спрегната относно третата фокална хиперповърхнина. Общо съвкупността M_3 има девет такива двупараметрични подмногообразия, които в общия случай са нехолономни.

Всички посочени дотук подмногообразия (еднопараметрични и двупараметрични) на M_3 са инвариантни относно подгрупата G_1.

Фокусите на конгруенцията (d) бяха F_1 и F_3, а съответните им развиваеми повърхнини — (a) и (c). Еднопараметричните подсъвкупности (18) и (24) на M_3 също принадлежат на конгруенцията (d). Те пораждат върху фокалните хиперповърхнини (F_1), съответно (F_3), асимптотични линии. Означаваме с D_1 двойното отношение на допирателните към следните четири линии върху (F_1) или (F_3): двете фокални линии, породени от развиваемите еднопараметрични подсъвкупности (a) и (c), коя да е от двете линии, породени от (24), и коя да е от двете линии, породени от (18). Тъй като допирателните към тези четири линии върху (F_1) са A_1A_2, $A_1(x_5A_2+A_4)$, $A_1\left[\left(x_5+\varepsilon_2\sqrt{\frac{x_6^2z_4}{z_6}}\right)A_2+A_4\right]$, $A_1[(x_5+\varepsilon_1\sqrt{x_6x_4})A_2+A_4]$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2=\pm 1$, то

$$D_1=\varepsilon\sqrt{\frac{x_4z_6}{x_6z_4}}, \quad \varepsilon=\pm 1. \tag{33}$$

Аналогично за конгруенцията (e) разглеждаме двойното отношение D_2 на допирателните към следните линии върху (F_1) или (F_2): двете фокални линии, породени от развиваемите еднопараметрични подсъвкупности (a) и (b), коя да е от двете линии, породени от (22), и коя да е от двете линии, породени от (19). След необходимите пресмятания намираме

$$D_2=\varepsilon\sqrt{\frac{x_1y_6}{x_6y_1}}, \quad \varepsilon=\pm 1. \tag{34}$$

И накрая за конгруенцията (f) разглеждаме двойното отношение D_3 на допирателните към следните линии върху (F_2) или (F_3): двете фокални линии, съответствуващи на (b) и (c), и по една от линиите, съответствуващи на (26) и (23). Получаваме

$$D_3=\varepsilon\sqrt{\frac{y_4z_1}{y_1z_4}}, \quad \varepsilon=\pm 1. \tag{35}$$

Непосредствено се проверява, че допирателните равнини във фокуса A_1 към (27) и (28), в A_2 към (29) и (30) и в A_1+A_2 към (31) и (32) са съответно

$$\eta_1=A_1A_2(x_4A_3-x_2A_4), \quad \eta_2=A_1A_2(x_2A_3-x_1A_4);$$
$$\eta_3=A_1A_2(y_6A_4+y_5A_5), \quad \eta_4=A_1A_2(y_5A_4+y_4A_5);$$
$$\eta_5=A_1A_2(z_6A_3-z_3A_5), \quad \eta_6=A_1A_2(z_3A_3-z_1A_5).$$

Разглеждаме двойните отношения

$$(36)\qquad D_4=(\zeta_2\zeta_3\eta_2\eta_1)=\frac{x_1x_4}{x_2^2},$$

$$(37)\qquad D_5=(\zeta_3\zeta_1\eta_4\eta_3)=\frac{y_3y_6}{y_5^2},$$

$$(38)\qquad D_6=(\zeta_2\zeta_1\eta_6\eta_5)=\frac{z_1z_6}{z_3^2},$$

където ζ_1, ζ_2, ζ_3 са допирателните равнини на (a), (b) и (c).

С помощта на еднопараметричните съвкупности (a), (c), (29) (18); (a), (b), (31), (22); (b), (c), (27) и (26) намираме двойните отношения

$$(39)\qquad D_7=\varepsilon\frac{y_6}{y_5}\sqrt{\frac{x_4}{x_6}},\quad \varepsilon=\pm 1,$$

$$(40)\qquad D_8=\varepsilon\frac{z_3}{z_6}\sqrt{\frac{y_6}{y_1}},\quad \varepsilon=\pm 1,$$

$$(41)\qquad D_9=\varepsilon\frac{x_4}{x_2}\sqrt{\frac{z_1}{z_4}}\quad \varepsilon=\pm 1.$$

Разбира се, всички двойни отношения D_i, $i=1, \ldots, 9$, бихме могли да пресметнем или с помощта на допирателните равнини към съответните еднопараметрични подсъвкупности в подходящи точки, или с помощта на допирателните към съответните линии, породени от тези еднопараметрични подсъвкупности върху подходящи фокални хиперповърхнини, или с помощта на точките, които съответствуват на тези еднопараметрични подсъвкупности при изображението в P_2.

От изразите (8) за I_i, $i=1, \ldots, 9$, и равенствата (33)—(41) за двойните отношения D_i, $i=1, \ldots, 9$, намираме следните връзки:

$$(42)\qquad \begin{gathered} I_8I_9=D_1^2,\quad I_1I_6=D_2^2,\quad I_4I_7=D_3^2,\\ \frac{I_1I_3}{I_2^2}=D_4,\quad \frac{I_4I_6}{I_5^2}=D_5,\quad \frac{I_7I_9}{I_8^2}=D_6,\\ I_3\frac{I_6^2}{I_5^2}=D_7^2,\quad I_6\frac{I_8^2}{I_9^2}=D_8^2,\quad I_7\frac{I_3^2}{I_2^2}=D_9^2. \end{gathered}$$

От тях само седем са независими, но въпреки това те дават геометрично тълкуване на инвариантите I_i, $i=1, \ldots, 9$, чрез инвариантни обекти относително подгрупата G_1, която запазва реперите от първи ред на M_3.

§ 3. Геометрични тълкувания на инвариантните форми

За да дадем геометрично тълкуване на формите (15), (16) и (17), ще потърсим прободните точки N_i, $i=1, 2, 3$, на правата A_1A_2 съответно с трите фокални хиперповърхнини ε_i', $i=1, 2, 3$, отговарящи на правата $A_1A_2+d(A_1A_2)$. Тъй като фокалните хиперповърхнини за правата A_1A_2 са

$$\varepsilon_1 = A_1A_2A_3A_4, \quad \varepsilon_2 = A_1A_2A_4A_5, \quad \varepsilon_3 = A_1A_2A_3A_5,$$

то

$$\varepsilon_1' = A_1'A_2'A_3'A_4', \quad \varepsilon_2' = A_1'A_2'A_4'A_5', \quad \varepsilon_3' = A_1'A_2'A_3'A_5',$$

където

$$A_i' = (1+\omega_i^i)A_i + \omega_i^j A_j, \quad i,\ j = 1, \dots, 5,\ i \neq j.$$

Понеже $N_i = A_1A_2 \cap \varepsilon_i'$, то $N_i = A_1 + \lambda_i A_2$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Тогава за $i = 1$ $(A_1'A_2'A_3'A_4'A_1 + \lambda_1 A_2) = 0$, т. е.

$$(43) \qquad \begin{vmatrix} 1+\omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & \omega_1^4 & 0 \\ \omega_2^1 & 1+\omega_2^2 & 0 & \omega_2^4 & \omega_2^5 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & 1+\omega_3^3 & \omega_3^4 & \omega_3^5 \\ \omega_4^1 & \omega_4^2 & \omega_4^3 & 1+\omega_4^4 & \omega_4^5 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

При развитието на детерминантата в (43) пренебрегваме в коефициента пред λ_1 членовете, съдържащи диференциалните форми ω_i^j от втора и по-висока степен, а в свободния член пренебрегваме членовете, съдържащи ω_i^j от трета и по-висока степен. Тогава за главната част на λ_1 получаваме

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_2^5}(\omega_1^2\omega_2^5 + \omega_1^3\omega_3^5 + \omega_1^4\omega_4^5) = \frac{\varphi_1}{\omega_2^5} = \bar{\varphi}_1.$$

Аналогични разглеждания за ε_2' и ε_3' дават

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{\varphi_2}{\omega_1^3} = \bar{\varphi}_2,$$

$$1 - \lambda_3 = \frac{\varphi_3}{\omega_1^4} = \bar{\varphi}_3.$$

Тогава за главната част на двойните отношения

$$D_1 = (A_2A_1A_1 + A_2N_1),$$
$$D_2 = (A_1A_2A_1 + A_2N_2),$$
$$D_3 = (A_2A_1 + A_2A_1N_3)$$

получаваме

$$(44) \qquad \bar{\varphi}_1 = D_1, \quad \bar{\varphi}_2 = D_2, \quad \bar{\varphi}_3 = D_3.$$

От (16), (17) и (44) намираме

$$(45) \qquad \Phi_1 = D_2D_3, \quad \Phi_2 = D_1D_3, \quad \Phi_3 = D_1D_2, \quad \Phi = D_1D_2D_3.$$

С това геометричното тълкуване на абсолютните инвариантни форми (15), (16), (17) от втори ред на съвкупността M_3 е дадено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана. Москва — Ленинград, 1948.
2. Фиников, С. П. Теория конгруэнции. Москва — Ленинград, 1950.
3. Гейдельман, Р. М. Основы теории конгруэнции в P_4. Лит. мат. сб., **3**, № 2, 1963.
4. Гейдельман, Р. М. К теории псевдоконгруэнции и конгруэнции плоскостей в многомерном гиперболическом пространстве. Мат. сб., **36** (78), 2, 1955, 209—232.
5. Карапетян, С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (I). Изв. АН Арм. ССР, Сер. физ.-матем. наук, **15**, № 2, 1962, 25—43.
6. Карапетян, С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (II). Изв. АН Арм. ССР, Сер. физ.-матем. наук, **15**, № 3, 1962, 17—28.
7. Сычева, В. Г. Канонические реперы конгруэнции прямых в четырехмерном проективном пространстве. Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. транс., вып. 190, 1965, 69—89.
8. Сычева, В. Г. О каноническом репере конгруэнции прямых в P_4. Уч. зап. Орехово-Зуевского пед. ин-та, **22**, 3, 1964, 64—72.
9. Сычева, В. Г. О некоторых специальных классах конгруэнции прямых в четырехмерном проективном пространстве P_4. Уч. зап. Орехово-Зуевского пед. ин-та, **22**, **3**, 1964, 73—78.
10. Сычева, В. Г. О конгруэнции прямых в P_4, имеющих соприкасающиеся линейные семейства. Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. транс, 1965, вып. 222, 34—43.
11. Иванова-Каратопраклиева, И. Каноничен репер на трипараметричните съвкупности от прави в четиримерното проективно пространство. Известия на Мат. инст. при БАН, **9**, 1966, 275—293.
12. Иванова-Каратопраклиева И., Някои геометрични тълкувания на диференциалните инварианти от втори ред на трипараметричните съвкупности от прави в P_4. Известия на Мат. инст. на БАН, **10**, 1969, 59—67.
13. Иванова-Каратопраклиева, И. Двупараметрични подмногообразия на трипараметричните съвкупности от прави в P_4. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **62** (1967/68), 123—156.

Постъпила на 9. VI. 1969 г.

ИНВАРИАНТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СОВОКУПНОСТЕЙ ПРЯМЫХ В P_4

Иванка Иванова-Каратопраклиева

(Резюме)

В предлагаемой работе дается геометрическое толкование абсолютных дифференциальных инвариантов [11] и абсолютных инвариантных дифференциальных форм окрестности второго порядка луча p трехпараметрической трехфокусной совокупности прямых M_3 в четырехмерном проективном пространстве P_4. Толкование дается при помощи инвариантных объектов совокупности M_3 относительно подгруппы G_1 (подгруппа G_1 фундаментальной группы G проективного пространства P_4 сохраняет реперы первого порядка совокупности M_3).

В § 1 найдены абсолютные дифференциальные инварианты (8) и абсолютные инвариантные дифференциальные формы (15), второго порядка.

В § 2 дано геометрическое толкование (42) дифференциальных инвариантов (8) при помощи сложных отношения касательных плоскостей инвариантных однопараметрических подсовокупностей совокупности M_3 относительно подгруппы G_1.

В § 3 дано геометрическое толкование (44), (45) форм (15), (16), (17) при помощи трех фокусов луча p и трех точек пересечения луча p с фокальными гиперплоскостями его бесконечно близкого луча.

INVARIANTEN ZWEITER REIHE DER TRIPARAMETRISCHEN GESAMTHEITEN VON GERADEN IM P_4

Ivanka Ivanova-Karatopraklieva

(Zusammenfassung)

Im vorliegenden Beitrag werden die absoluten Differentialinvarianten [11] und die absoluten invariablen Differentialformen, die zum differentialen Umkreis zweiter Reihe der eine triparametrische trifokussale Gesamtheit M_3 von Geraden im vierdimensionalen Projektionsraum P_4 umschreibenden Geraden p gehören, geometrisch gedeutet. Diese Deutung wird mit Hilfe von Objekten der M_3 gegeben, die in Bezug auf die Untergruppe G_1 invariabel sind (die Untergruppe G_1 der fundamentalen Gruppe G des Projektraumes P_4 bewahrt die M_3 Eichungen der ersten Reihe).

In § 1 sind die absoluten differentialen Invarianten (8) und die absoluten invariablen Differentialformen (15), der zweiten Reihe erwiesen.

In § 2 ist die geometrische Deutung (42) der differentialen Invarianten (8) mit Hilfe von Doppelverhältnissen von tangentialen Ebenen in Hinsicht auf zu der Untergruppe G_1 invariable uniparametrale Untergesamtheiten der Gesamtheit M_3 angeführt.

In § 3 ist die geometrische Deutung (44), (45) der Formen (15), (16), (17) mit Hilfe der drei Fokusse der Geraden p und der drei durchschnittenen Punkte der Geraden p mit den fokalen Hyperflächen der ihr unendlich nahen Geraden gegeben.