БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

FORMULES DE CUBATURE DU TYPE OBRECHKOFF AYANT LE DEGRÉ D'EXACTITUDE ÉGAL À QUATRE

D. V. Ionescu

La formule

$$(1)\qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{C_p^1}{C_{p+q}^1}\frac{x_2-x_1}{1!}f(x_2) - \frac{C_p^2}{C_{p+q}^2}\frac{(x_2-x_1)^2}{2!} + \cdots$$

$$+(-1)^{p-1}\frac{C_p^p}{C_{p+q}^p}\frac{(x_2-x_1)^p}{p!}f^{(p-1)}(x_2) + \frac{C_q^1}{C_{p+q}^1}\frac{x_2-x_1}{1!}f(x_1) + \frac{C_q^2}{C_{p+q}^2}\frac{(x_2-x_1)^2}{2!}$$

$$+\cdots+\frac{C_q^q}{C_{p+q}^q}\frac{(x_2-x_1)^q}{q!}f^{(q-1)}(x_1) + (-1)^{p+q}\frac{1}{(p+q)!}\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)^p(x-x_2)^q f^{(p+q)}(x)\,dx$$

est généralement connue sous le nom la formule de quadrature de N. Obrechkoff [1].

Nous avons donné des extentions de cette formule aux intégrales doubles relativement à un rectangle D, ayant pour sommets les points de coordonnées (x_i, y_k), où $i, k = 1, 2$.

Nous avons donné [2] la formule de cubature

$$(2)\qquad \iint_D f dx dy = -\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{24}\Big[(x_2-x_1)(y_2-y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2, y_2)$$

$$+2(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + 2(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) - 12 f(x_2, y_2)\Big]$$

$$-\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{24}\Big[(x_2-x_1)(y_2-y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_1, y_1) - 2(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1)$$

$$-2(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) - 12 f(x_1, y_1)\Big] + R$$

où le reste R est de la forme

$$(3)\qquad R = -\iint_D\left(\varphi_0\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \varphi_1\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y} + \varphi_2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2} + \varphi_3\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3} + \varphi_4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)dxdy$$

avec

$$\varphi_0(x, y)=\frac{1}{24}(x-x_1)^2(x-x_2)^2,$$

$$\varphi_1(x, y)=-\frac{1}{6}(x-x_1)(x-x_2)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{12}(x_2-x_1)(y_2-y_1)(x-x_1)(x-x_2),$$

$$\varphi_2(x, y)=\frac{1}{4}(x-x_1)(x-x_2)(y-y_1)(y-y_2)+\frac{1}{12}(x_2-x_1)$$

(4)
$$\times(y_2-y_1)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)+\frac{1}{48}(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2,$$

$$\varphi_3(x, y)=-\frac{1}{6}(y-y_1)(y-y_2)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{12}(x_2-x_1)(y_2-y_1)(y-y_1)(y-y_2),$$

$$\varphi_4(x, y)=\frac{1}{24}(y-y_1)^2(y-y_2)^2.$$

Nous remarquons que dans la formule (2) le reste R est nul lorsque la fonction f est remplacée par un polynôme quelconque du troisième degré, mais il n'est par nul au moins pour un polynôme du 4-ème degré qui nous fait dire que la formule (3) a le degré d'exactitude égal à trois.

Dans le second membre de la formule de cubature (2) figure la fonction f et ses dérivées $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial^2 f/\partial x\partial y$ sur les sommets opposés du rectangle D, ayant pour coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

Dans un autre travail [3] nous avons donné d'autres formules de cubature ayant le degré d'exactitude égal à 3, avec les valeurs de la fonction f et de ses dérivées partielles par rapport à x et à y, du premier et du second ordre, sur trois sommets du rectangle D.

Lorsque la fonction f est une fonction de x, la formule (2) se réduit à la formule d'Obrechkoff correspondante à $p=q=2$.

D'une manière générale, la formule

(5)
$$\iint_D f dxdy=\sum_{i+k=0}^{3} a_{ik}^{11}\frac{\partial^{i+k}f}{\partial x^i\partial y^k}(x_1, y_1)+\sum_{i+k=0}^{3} a_{ik}^{12}\frac{\partial^{i+k}f}{\partial x^i\partial y^k}(x_1, y_2)$$
$$+\sum_{i+k=0}^{3} a_{ik}^{21}\frac{\partial^{i+k}f}{\partial x^i\partial y^k}(x_2, y_1)+\sum_{i+k=0}^{3} a_{ik}^{22}\frac{\partial^{i+k}f}{\partial x^i\partial y^k}(x_2, y_2)+R$$

sera appelée „formule de cubature du type Obrechkoff, ayant le degré d'exactitude égal à quatre" si les constantes a_{ik}^{11}, a_{ik}^{12}, a_{ik}^{21}, a_{ik}^{22} sont choisis de manière que le reste R soit nul lorsque f est un polynôme quelconque du quatrième degré mais ne soit pas nul, au moins pour un polynôme du cinquième degré.

Dans ce travail nous allons donner certaines formules de cubature du type Obrechkoff, avec les valeurs de la fonction f et de ses dérivées partielles par rapport à x et à y, du premier, du second et du troisième ordre sur trois sommets du rectangle D, et nous mettrons le reste R sous la forme d'une intégrale double comme dans le cas de la formule (2), en supposant que la fonction f soit continue, avec ses dérivées partielles par rapport à x et à y d'ordre 1, 2, 3, 4, 5, sur le rectangle D:

$$D: \qquad x_1 \leqq x \leqq x_2, \quad y_1 \leqq y \leqq y_2.$$

Nous avons donné la méthode pour obtenir des formules du type Obrechkoff dans notre travail [2] de sorte que nous pouvons donner dans ce travail seulement les résultats que nous avons obtenus.

§ 1. PRÉLIMINAIRES

1. Considérons le système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^5\varphi_1}{\partial x^4\partial y}=a_1, \quad \frac{\partial^5\varphi_2}{\partial x^3\partial y^2}=a_2, \quad \frac{\partial^5\varphi_3}{\partial x^2\partial y^3}=a_2, \quad \frac{\partial^5\varphi_4}{\partial x\partial y^4}=a_1 \tag{6}$$

où a_1 et a_2 sont deux paramètres, ainsi que les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}&=0 \quad \text{pour } x=x_1 \text{ et } x=x_2,\\
\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}&=0 \quad \text{pour } x=x_1 \text{ et } x=x_2,\\
\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3\varphi_3}{\partial y^3}&=0 \quad \text{pour } x=x_1 \text{ et } x=x_2,\\
\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial x^3\partial y}+\frac{\partial^4\varphi_2}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi_3}{\partial x\partial y^3}+\frac{\partial^4\varphi_4}{\partial y^4}&=0 \quad \text{pour } x=x_1 \text{ et } x=x_2,
\end{aligned} \tag{7}$$

ainsi que les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_5}{\partial y}&=0 \quad \text{pour } y=y_1 \text{ et } y=y_2,\\
\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\varphi_5}{\partial y^2}&=0 \quad \text{pour } y=y_1 \text{ et } y=y_2,\\
\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\varphi_3}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\varphi_4}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3\varphi_5}{\partial y^3}&=0 \quad \text{pour } y=y_1 \text{ et } y=y_2,\\
\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\varphi_2}{\partial x^3\partial y}+\frac{\partial^4\varphi_3}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi_4}{\partial x\partial y^3}+\frac{\partial^4\varphi_5}{\partial y^4}&=0 \quad \text{pour } y=y_1 \text{ et } y=y_2
\end{aligned} \tag{8}$$

où

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x, y)&=\frac{1}{120}(x-x_1)^4(x-x_2),\\
\varphi_5(x, y)&=\frac{1}{120}(y-y_1)^4(y-y_2)
\end{aligned} \tag{9}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x, y)&=\frac{1}{120}(x-x_1)^3(x-x_2)^2,\\
\varphi_5(x, y)&=\frac{1}{120}(y-y_1)^3(y-y_2)^2.
\end{aligned} \tag{10}$$

Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ est une solution du système d'équations (6) avec les conditions (7), (8) et (9) ou bien avec les conditions (7), (8) et (10) alors nous avons la formule de cubature

$$
\begin{aligned}
(11) \qquad \iint_D f\,dx\,dy = & -A_0^3(x_2, y_2) f(x_2, y_2) + A_0^3(x_1, y_2) f(x_1, y_2) \\
& + A_0^3(x_2, y_1) f(x_2, y_1) - A_0^3(x_1, y_1) f(x_1, y_1) \\
& + A_0^2(x_2, y_2) \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) + A_1^2(x_2, y_2) \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) \\
& - A_0^2(x_1, y_2) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_2) - A_1^2(x_1, y_2) \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2) \\
& - A_0^2(x_2, y_1) \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1) - A_1^2(x_2, y_1) \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_1) \\
& + A_0^2(x_1, y_1) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) + A_1^2(x_1, y_1) \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) \\
& - A_0^1(x_2, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2) - A_1^1(x_2, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) \\
& - A_1^2(x_2, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2) + A_0^1(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_2) \\
& + A_1^1(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_2) + A_2^1(x_1, y_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2) \\
& + A_0^1(x_2, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1) + A_1^1(x_2, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_1) \\
& + A_2^1(x_2, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_1) - A_0^1(x_1, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1, y_1) \\
& - A_1^1(x_1, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) - A_2^1(x_1, y_1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_1) \\
& + A_0^0(x_2, y_2) \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_2, y_2) + A_1^0(x_2, y_2) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_2, y_2) \\
& + A_2^0(x_2, y_2) \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_2, y_2) + A_3^0(x_2, y_2) \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_2, y_2) \\
& - A_0^0(x_1, y_2) \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_1, y_2) - A_1^0(x_1, y_2) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_1, y_2) \\
& - A_2^0(x_1, y_2) \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_1, y_2) - A_3^0(x_1, y_2) \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_1, y_2) \\
& - A_0^0(x_2, y_1) \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_2, y_1) - A_1^0(x_2, y_1) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_2, y_1) \\
& - A_2^0(x_2, y_1) \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_2, y_1) - A_3^0(x_2, y_1) \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_2, y_1)
\end{aligned}
$$

$$+A_0^0(x_1, y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_1, y_1)+A_1^0(x_1, y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_1, y_1)$$

$$+A_2^0(x_1, y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_1, y_1)+A_3^0(x_1, y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_1, y_1)+R$$

où le reste R est donné par la formule

$$(12)\quad R=-\iint_D\left(\varphi_0\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}+\varphi_1\frac{\partial^5 f}{\partial x^4\partial y}+\varphi_2\frac{\partial^5 f}{\partial x^3\partial y^2}+\varphi_3\frac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}+\varphi_4\frac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^4}+\varphi_5\frac{\partial^5 f}{\partial y^5}\right)dxdy.$$

Dans la formule (11), nous avons

$$(13)\quad \begin{aligned} &A_j^0(x, y)=\varphi_{j+1}(x, y), \quad j=0, 1, 2, 3;\\ &A_j^1(x, y)=\frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{j+2}}{\partial y}, \quad j=0, 1, 2;\\ &A_j^2(x, y)=\frac{\partial^2\varphi_{j+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_{j+2}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\varphi_{j+3}}{\partial y^2}, \quad j=0, 1;\\ &A_j^3(x, y)=\frac{\partial^3\varphi_{j+1}}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\varphi_{j+2}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\varphi_{j+3}}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3\varphi_{j+4}}{\partial y^3}, \quad j=0. \end{aligned}$$

§ 2. PREMIÈRE FORMULE DE CUBATURE DU TUPE OBRECHKOFF

2. On démontre que

$$\varphi_1(x, y)=\frac{\alpha_1}{24}(x-x_1)^4(y-y_1)-\frac{\alpha_1}{48}(x-x_1)^4(y_2-y_1)$$
$$-\frac{1+5\alpha_1}{120}(x_2-x_1)^3(x-x_1)(y-y_1),$$

$$\varphi_2(x, y)=\frac{\alpha_2}{12}(x-x_1)^3(y-y_1)^2-\frac{3+5(\alpha_1+2\alpha_2)}{60}(y_2-y_1)(x-x_1)^3(y-y_1)$$
$$+\frac{2+5(\alpha_1+\alpha_2)}{180}(y_2-y_1)^2(x-x_1)^3-\frac{2+5(\alpha_1+\alpha_2)}{60}(x_2-x_1)^2(y-y_1)^2(x-x_1)$$
$$+\frac{1+5\alpha_1}{240}(x_2-x_1)^3(y-y_1)^2,$$

$$(14)\quad \varphi_3(x, y)=\frac{\alpha_2}{12}(x-x_1)^2(y-y_1)^3-\frac{3+5(\alpha_1+2\alpha_2)}{60}(x_2-x_1)(x-x_1)(y-y_1)^3$$
$$+\frac{2+5(\alpha_1+\alpha_2)}{180}(x_2-x_1)^2(y-y_1)^3-\frac{2+5(\alpha_1+\alpha_2)}{60}(y_2-y_1)^2(x-x_1)^2(y-y_1)$$
$$+\frac{1+5\alpha_1}{240}(y_2-y_1)^3(x-x_1)^2,$$

$$\varphi_4(x, y)=\frac{\alpha_1}{24}(x-x_1)(y-y_1)^4-\frac{\alpha_1}{48}(x_2-x_1)(y-y_1)^4$$
$$-\frac{1+5\alpha_1}{120}(y_2-y_1)^3(x-x_1)(y-y_1)$$

est une solution du système d'équations (6) avec les conditions aux limites (7), (8) et (9), les paramètres α_1 et α_2 étant liés par la relation

$$(15)\qquad 1+2a_1+2a_2=0.$$

En appliquant la formule (11) nous avons

$$(16)\qquad \int_D\int f dxdy=\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{5}[3f(x_2,y_2)+f(x_1,y_2)+f(x_2,y_1)]$$

$$-\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{5}\left[(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2,y_2)+(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_2,y_2)\right]$$

$$-\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{5}\left[(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2,y_1)+(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_2)\right]$$

$$+\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{60}\left[2(x_2-x_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2,y_2)\right.$$

$$\left.+3(x_2-x_1)(y_2-y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2,y_2)+2(y_2-y_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2,y_2)\right]$$

$$+\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{30}\left[(x_2-x_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2,y_1)+(y_2-y_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1,y_2)\right]$$

$$-\frac{2+5a_1}{240}(x_2-x_1)(y_2-y_1)\left[(x_2-x_1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_2,y_2)+(y_2-y_1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_2,y_2)\right]$$

$$\frac{1+15a_1}{720}(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2\left[(x_2-x_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_2,y_2)\right.$$

$$\left.+(y_2-y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_2,y_2)\right]-\frac{1+5a_1}{240}(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2\left[(x_2-x_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_1,y_2)\right.$$

$$\left.+(y_2-y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_2,y_1)\right]$$

$$+\frac{a_1}{48}(x_2-x_1)(y_2-y_1)\left[(x_2-x_1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_2,y_1)+(y_2-y_1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_1,y_2)\right]$$

$$+\frac{1}{360}(x_2-x_1)^2(y_2-v_1)^2\left[(x_2-x_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_2,y_1)\right.$$

$$\left.+(y_2-y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_1,y_2)\right]+R$$

où le reste R est donné par la formule (12) avec les fonctions (9) et (14).

La formule (16) est de la forme

$$P+a_1Q=0$$

et comme elle est valable quelque soit a_1 nous avons

$$(17)\qquad P=0,$$

$$(18)\qquad Q=0.$$

La formule (17) est la formule de cubature

$$(19)\qquad \int_D\int f dxdy=\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{5}\left[3f(x_2,y_2)+f(x_1,y_2)+f(x_2,y_1)\right]$$

$$-\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{5}\left[(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2,y_2)+(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_2,y_2)\right]$$

$$-\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{10}\left[(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1)+(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2)\right]$$

$$+\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{30}\left\{(x_2-x_1)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1)\right]\right.$$

$$\left.+(y_2-y_1)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2)\right]\right\}+\frac{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2}{20}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2, y_2)$$

$$-\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{120}\left[(x_2-x_1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_2, y_2)+(y_2-y_1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_2, y_2)\right]$$

$$+\frac{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2}{720}\left[(x_2-x_1)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_2, y_2)-3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_1, y_2)+2\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_2, y_1)\right)\right.$$

$$\left.+(y_2-y_1)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_2, y_2)-3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_2, y_1)+2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_1, y_2)\right)\right]+R$$

où le reste R est donné par la formule

$$(20)\quad R=-\iint_D\left(\varphi_0\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}+\varphi_1\frac{\partial^5 f}{\partial x^4\partial y}+\varphi_2\frac{\partial^5 f}{\partial x^3\partial y^2}+\varphi_3\frac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}+\varphi_4\frac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^4}+\varphi_5\frac{\partial^5 f}{\partial y^5}\right)dxdy$$

avec

$$\varphi_0(x, y)=\frac{1}{120}(x-x_1)^4(x-x_2),$$

$$\varphi_1(x, y)=-\frac{1}{120}(x_2-x_1)^3(x-x_1)(y-y_1),$$

$$\varphi_2(x, y)=-\frac{1}{24}(x-x_1)^3(y-y_1)^2+\frac{1}{30}(y_2-y_1)(x-x_1)^3(y-y_1)$$
$$-\frac{1}{360}(y_2-y_1)^2(x-x_1)^3+\frac{1}{120}(x_2-x_1)^2(y-y_1)^2(x-x_1)$$
$$+\frac{1}{240}(x_2-x_1)^3(y-y_1)^2,$$

$$(21)\quad \varphi_3(x, y)=-\frac{1}{24}(x-x_1)^2(y-y_1)^3+\frac{1}{30}(x_2-x_1)(x-x_1)(y-y_1)^3$$
$$-\frac{1}{360}(x_2-x_1)^2(y-y_1)^3+\frac{1}{120}(y_2-y_1)^2(x-x_1)^2(y-y_1)$$
$$+\frac{1}{240}(y_2-y_1)^3(x-x_1)^2,$$

$$\varphi_4(x, y)=-\frac{1}{120}(y_2-y_1)^3(x-x_1)(y-y_1),$$

$$\varphi_5(x, y)=\frac{1}{120}(y-y_1)^4(y-y_2).$$

La formule (18) conduit à la formule

$$(22)\quad \frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{48}\left[(x_2-x_1)^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_2, y_2)-\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_2, y_1)\right)\right.$$

$$+(y_2-y_1)^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_2, y_2)-\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_1, y_2)\right)\Bigg]$$

$$-\frac{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2}{48}\Bigg[(x_2-x_1)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_2, y_2)-\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_1, y_2)\right)$$

$$(y_2-y_1)\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_2, y_2)-\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_2, y_1)\right)\Bigg]=R_1$$

où le reste R_1 est donné par la formule

$$(23)\quad R_1=\iint_D\left(\varphi_1^*\frac{\partial^5 f}{\partial x^4\partial y}+\varphi_2^*\frac{\partial^5 f}{\partial x^3\partial y^2}+\varphi_3^*\frac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}+\varphi_4^*\frac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^4}\right)dxdy$$

avec

$$(24)\quad \begin{aligned}
\varphi_1^*(x, y)&=\frac{1}{24}(x-x_1)^4(y-y_1)-\frac{1}{48}(x-x_1)^4(y_2-y_1)\\
&\quad \frac{1}{24}(x_2-x_1)^3(x-x_1)(y-y_1),\\
\varphi_2^*(x, y)&=\quad -\frac{1}{12}(x-x_1)^3(y-y_1)^2+\frac{1}{12}(y_2-y_1)(x-x_1)^3(y-y_1)\\
&\quad +\frac{1}{48}(x_2-x_1)^3(y-y_1)^2,\\
\varphi_3^*(x, y)&=-\frac{1}{12}(x-x_1)^2(y-y_1)^3+\frac{1}{12}(x_2-x_1)(x-x_1)(y-y_1)^3\\
&\quad +\frac{1}{48}(y_2-y_1)^3(x-x_1)^2,\\
\varphi_4^*(x, y)&=\frac{1}{24}(x-x_1)(y-y_1)^4-\frac{1}{48}(x_2-x_1)(y-y_1)^4\\
&\quad -\frac{1}{24}(y_2-y_1)^3(x-x_1)(y-y_1).
\end{aligned}$$

Nous reviendrons sur la formule (22) dans un autre travail.

§ 3. SECONDE FORMULE DE CUBATURE DU TYPE OBRECHKOFF

3. On démontre que

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y)&=\frac{a_1}{24}(x-x_1)^4(y-y_1)-\frac{a_1}{48}(y_2-y_1)(x-x_1)^4\\
&\quad -\frac{a_1}{24}(x_2-x_1)^3(x-x_1)(y-y_1),\\
\varphi_2(x, y)&=\frac{a_2}{12}(x-x_1)^3(y-y_1)^2-\frac{1+5(a_1+2a_2)}{60}(y_2-y_1)(x-x_1)^3(y-y_1)\\
&\quad +\frac{-1+5(a_1+a_2)}{180}(y_2-y_1)^2(x-x_1)^3\\
&\quad -\frac{1+10(a_1+a_2)}{120}(x_2-x_1)^2(x-x_1)(y-y_1)^2+\frac{a_1}{48}(x_2-x_1)^3(y-y_1)^2,
\end{aligned}$$

$$(25)\quad \varphi_3(x, y)=\frac{a_2}{12}(x-x_1)^2(y-y_1)^3-\frac{1+10(a_1+a_2)}{120}(y_2-y_1)^2(x-x_1)^2(y-y_1)$$

$$+\frac{-1+5(a_1+a_2)}{180}(x_2-x_1)^2(y-y_1)^3$$

$$-\frac{1+5(a_1+2a_2)}{60}(x_2-x_1)(x-x_1)(y-y_1)^3+\frac{a_1}{48}(y_2-y_1)^3(x-x_1)^2,$$

$$\varphi_4(x, y)=\frac{a_1}{24}(y-y_1)^4(x-x_1)-\frac{a_1}{24}(y_2-y_1)^3(x-x_1)(y-y_1]$$

$$-\frac{a_1}{48}(x_2-x_1)(y-y_1)^4$$

est une solution du système d'équations (6) avec les conditions aux limites (7), (8) et (10), les paramètres a_1 et a_2 étant liés par la relation (15).

En appliquant la formule (11), nous avons la formule

$$(26)\quad \int\int_D f dx dy=\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{5}[f(x_2, y_2)+2f(x_1, y_2)+2f(x_2, y_1]$$

$$+\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{20}\left[(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2)+(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2)\right]$$

$$+\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{20}\left[(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_2)+(y_2-v_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_1)\right]$$

$$-\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{5}\left[(x_2-x_1)\frac{\partial f}{d x}(x_2, y_1)+(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2)\right]$$

$$-\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{20}\left[(x_2-x_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2)+(y_2-y_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2)\right]$$

$$+\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{15}\left[(x_2-x_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1)+(y_2-y_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2)\right.$$

$$-\frac{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2}{40}\left[4\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2, y_2)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_1, y_2)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2, y_1)\right]$$

$$-\frac{a_1}{48}(x_2-x_1)(y_2-y_1)\Big[(x_2-x_1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_2, y_2)$$

$$+(y_2-y_1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_2, y_2)\Big]+\frac{a_1}{48}(x_2-x_1)(y_2-y_1)$$

$$\times\left[(x_2-x_1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_2, y_1)+(y_2-y_1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_1, y_2)\right]$$

$$+\frac{28+15a_1}{720}(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2\Big[(x_2-x_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_2, y_2)$$

$$+(y_2-y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_2, y_2)\Big]$$

$$-\frac{a_1}{48}(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2\Big[(x_2-x_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_1, y_2)$$

$$+(y_2-y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_2, y_1)\Big]$$

$$+\frac{7}{360}(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2\Big[(x_2-x_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_2, y_1)$$

$$+(y_2-y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_1, y_2)\Big]+R$$

où le reste R est donné par la formule (12) avec les fonctions (10) et (25)

La formule (26) est de la forme

$$P'+a_1Q'=0$$

et conduit aux formules

(27) $$P'=0,$$

(28) $$Q'=0.$$

La formule (27) est la formule de cubature

(29) $$\iint\limits_D f dxdy=\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{5}\Big[f(x_2, y_2)+2f(x_1, y_2)+2f(x_3, y_1)$$

$$+\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{20}\Big[(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2)+(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2)\Big]$$

$$+\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{20}\Big[(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_2)+(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_1)\Big]$$

$$-\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{5}\Big[(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_1)+(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_2)\Big]$$

$$-\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{20}\Big[(x_2-x_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_2)+(y_2-y_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_2, y_2)\Big]$$

$$+\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{15}\Big[(x_2-x_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_2, y_1)+(y_2-y_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1, y_2)\Big]$$

$$-\frac{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2}{40}\Big[4\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_2, y_2)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_1, y_2)+\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}(x_3, y_1)\Big]$$

$$+\frac{7}{180}(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2\Big[(x_2-x_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_2, y_2)$$

$$+(y_2-y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_2, y_2)\Big]$$

$$+\frac{7}{360}(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2\Big[(x_2-x_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_2, y_1)$$

$$+(y_2-y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_1, y_2)\Big]+R$$

où le reste R est donné par la formule

(30) $$R=-\iint\limits_D\left(\varphi_0\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}+\varphi_2\frac{\partial^5 f}{\partial x^3\partial y^2}+\varphi_3\frac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}+\varphi_5\frac{\partial^5 f}{\partial y^5}\right)dxdy$$

avec

$$\varphi_0(x, y)=\frac{1}{120}(x-x_1)^3(x-x_2)^2,$$

$$
(31) \quad
\begin{aligned}
\varphi_2(x, y) &= -\frac{1}{24}(x-x_1)^3(y-y_1)^2+\frac{1}{15}(y_2-y_1)(x-x_1)^3(y-y_1) \\
&\quad -\frac{7}{360}(y_2-y_1)^2(x-x_1)^3+\frac{1}{30}(x_2-x_1)^2(x-x_1)(y-y_1)^2, \\
\varphi_3(x, y) &= -\frac{1}{24}(x-x_1)^2(y-y_1)^3+\frac{1}{15}(x_2-x_1)(x-x_1)(y-y_1)^3 \\
&\quad -\frac{7}{360}(x_2-x_1)^2(y-y_1)^3+\frac{1}{30}(y_2-y_1)^2(y-y_1)(x-x_1)^2, \\
\varphi_5(x, y) &= \frac{1}{120}(y-y_1)^3(y-y_2)^2.
\end{aligned}
$$

La formule (28) conduit à la formule (22).

4. Lorsque la fonction $f(x, y)$ ne dépend pas de y, les formules (19) et (29) se réduisent aux formules d'Obrechkoff (1), correspondant à $p=4$, $q=1$ ou à $p=3$, $q=2$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Obreschkoff, N. Neue Quadraturformeln. Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1940, 6—26.
2. Ionescu, D. V. Generalizarea formulei de cubatură a lui N. Obreschkoff la integrale duble. Studii şi Cercetări de Matematică (Cluj), XIII, 1962, 35—86.
3. Ionescu, D. V. Generalizarea formulei de cuadratură a lui N. Obreschkoff la integrale duble. Sesiunea Academiei R. P. R., Filiala Cluj, 11—12 Decembrie 1964.

Reçu le 29. XII. 1964

КУБАТУРНИ ФОРМУЛИ ОТ ТИПА НА ОБРЕШКОВ СЪС СТЕПЕН НА ТОЧНОСТ, РАВНА НА ЧЕТИРИ

Д. В. Йонеску

(Резюме)

Разглежда се квадратурната формула (11), отнасяща се за интеграли от вида $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, където D е правоъгълник, а $f(x, y)$ е петкратно непрекъснато диференцируема в D функция. Възлите на тази квадратурна формула са четирите върха на правоъгълника D, а членовете на формулата зависят от стойностите на $f(x, y)$ и частните ѝ производни до трети ред във възлите. Остатъчният член R се дава с (12). От (12) следва, че формулата (11) е точна за полиноми на две променливи от степен, помалка от 5. За функциите $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$, ..., $\varphi_5(x, y)$, чрез които се изразяват коефициентите и остатъчният член в (11), се предполага, че удовлетворяват равенствата (6) и условията (7), (8), (9) или (7), (8), (10).

По-нататък се търсят квадратурни формули от вида (11), но с помалък брой членове. За тази цел се дефинират функциите $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$,

$\varphi_3(x, y)$, $\varphi_4(x, y)$ чрез равенствата (14). Тези функции заедно с функциите $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_5(x, y)$, дефинирани чрез (9), удовлетворяват равенствата (6), (7) и (8). При този специален избор на функциите $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y), \ldots$, $\varphi_5(x, y)$ от (11) се получава формулата (19), която е с по-малък брой членове от (11).

При друг специален избор на $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_5(x, y)$ се получават квадратурните формули (26) и (29).

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА ОБРЕШКОВА СО СТЕПЕНЬЮ ТОЧНОСТИ, РАВНОЙ ЧЕТЫРЕМ

Д. В. Йонеску

(Резюме)

Рассматривается квадратурная формула (11), относящаяся к интегралам вида $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, где D — прямоугольник, а $f(x, y)$ — пять раз непрерывно дифференцируемая в D функция. Узлами этой квадратурной формулы являются четыре вершины прямоугольника D, а члены формулы зависят от значений $f(x, y)$ и ее частных производных до третьего порядка в узлах. Остаточный член R задается (12). Из (12) следует, что формула (11) точна для многочленов двух переменных степеней не больше 5.

Функции $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_5(x, y)$, через которые выражаются коэффициенты и остаточный член (11), предполагаются удовлетворяющими равенству (6) и условиям (7), (8), (9) или (7), (8), (10).

Далее ищутся квадратурные формулы вида (11), но с меньшим числом членов. Для этой цели определяются функции $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$, $\varphi_4(x, y)$ через равенства (14). Эти функции вместе с функциями $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_5(x, y)$, определяемыми из (9), удовлетворяют равенствам (6), (7) и (8). При таком специальном выборе функций $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_5(x, y)$ из (11) получается формула (19), в которой число членов меньше чем в (11).

При другом специальном выборе $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_5(x, y)$ получаются квадратурные формулы (26) и (29).