БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

SURFACES NON RATIONNELLES DE GENRES ZÉRO

Lucien Godeaux

On sait l'importance, dans la théorie des courbes et surfaces algébriques, des séries canoniques et pluricanoniques. Nous rappelerons brièvement leurs définitions [1].

Sur une courbe algébrique C, une série linéaire d'ordre n et de dimension r est un ensemble de groupes de n points tel que r points de la courbe appartiennent à un seul groupe et que l'on puisse représenter les groupes de la série par les points d'un espace linéaire à r dimensions (condition superflue si $r \geqq 2$). Dans une série linéaire de dimension un, il existe des groupes contenant un point double. L'ensemble de ces points doubles est le jacobien de la série. Dans une série linéaire $|G|$ considérons les groupes jacobiens G_j des différentes séries de dimension un tirées de $|G|$. Ces groupes appartiennent à une série linéaire $|G_j|$, la jacobienne de $|G|$. S'il existe une série $|K|$ telle que les groupes $2G+K$ appartiennent là $|G_j|$, la série des groupes K est linéaire et est la série canonique de a courbe C. Elle est d'ordre $2p-2$ et de dimension $p-1$ et p est le genre de la courbe C.

On peut toujours trouver une courbe plane transformée birationnelle de C ne possédant que des points doubles. Si l'on prend pour $|G|$ la série qui comprend les sections de la courbe par les droites du plan, les sections de la courbe par ses premières polaires, en dehors des points doubles, appartiennent à la série jacobienne et les groupes canoniques sont découpés sur la courbe, supposée d'ordre m, par les courbes d'ordre $m-3$ passant par les points doubles, en dehors de ceux-ci.

Sur une surface algébrique F, un ensemble de courbes C est un système linéaire $|C|$ si par un nombre fini r de points de la surface passe une courbe C et une seule et s'il existe une correspondance biunivoque entre les courbes C et les points d'un espace linéaire à r dimensions (condition superflue si $r \geqq 2$). Les caractères du système $|C|$ sont le degré, nombre de points communs à deux courbes C, le genre des courbes C et la dimension r. Dans un réseau de courbes, il existe des courbes ayant un point double. Le lieu de ces points doubles est la jacobienne du réseau. Les jacobiennes C_j des réseaux tirés du système $|C|$ appartiennent à un système linéaire $|C_j|$, le jacobien de $|C|$. S'il existe des courbes K telles que les courbes $3C+K$ appartiennent au système $|C_j|$, le système $|K|$ est le système canonique de F. On désigne par $p^{(1)}$ le genre des courbes K. Le degré du système canonique est $p^{(1)}-1$. Sa dimension augmentée d'une unité est le genre géométrique p_g de la surface. Le double $|2K|$ est le système bicanonique de F, sa dimension augmentée d'une unité est le bigenre P_2 de F.

On peut toujours trouver une surface F' de l'espace ordinaire birationnellement identique à F, possédant une courbe double D et des points triples à la fois pour la courbe et pour la surface. Prenons pour système $|C$ celui qui comprend les sections planes de F'. Les sections de F' par les surfaces polaires appartiennent au système jacobien. Les courbes canoniques sont découpées par les surfaces adjointes d'ordre $m-4$, m étant l'ordre de F', passant par la courbe double D. Mais ici se présente une anomalie qui ne se présentait pas dans le cas des courbes. Si l'on calcule le nombre de surfaces adjointes linéairement indépendantes on trouve un nombre p_a qui peut être inférieur à p_g. Ce nombre p_a est le genre arithmétique de F'. Dans ce qui va suivre, nous n'aurons à nous occuper que des surfaces pour lesquelles $p_a=p_g=0$.

Le système bicanonique est découpé sur F par les surfaces d'ordre $2(m-4)$, ne comprenant pas F comme partie, passant deux fois par la courbe double D.

Ajoutons que le système $|C_j-2C|$ est appelé l'adjoint à $|C|$. Il découpe sur une courbe C la série canonique de cette courbe.

Nous avons défini le système bicanonique comme le double du système canonique. Il existe cependant des surfaces dépourvues de système canonique mais dont le système bicanonique existe. Ce sont ces surfaces qui font l'objet de cette conférence.*

1. Le problème de déterminer les surfaces non rationnelles privées de courbe canonique est né le jour où Castelnuovo a établi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface algébrique soit rationnelle. Clebsch avait établi que la courbe de genre zéro est rationnelle. Castelnuovo s'était posé la question de savoir si une surface de genres $p_a=p_g=0$ était rationnelle. La réponse est négative. Pour qu'une surface soit rationnelle, il faut que le procédé d'adjonction appliqué à un système linéaire ait un terme; cela exige que le système bicanonique de la surface n'existe pas. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface soit rationnelle sont donc $p_a=P_2=0$, la condition $P_2=0$ entraînant $p_g=0$. Mais il fallait en outre prouver qu'il existe des surfaces non rationnelles ne possédant pas de courbe canonique. C'est ce que firent Castelnuovo et Enriques [5].

Castelnuovo a construit une surface F du septième ordre ayant une droite triple r, une conique double k ne rencontrant pas r, et trois points doubles tacnodaux A, B, C dont les plans tangents à F, $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ passent par la droite r. Les adjointes d'ordre trois à F doivent passer deux fois par r, une fois par k et par A, B, C. De telles surfaces n'existent pas. Les biadjointes sont des surfaces d'ordre six passant quatre fois par r, deux fois par k et touchant F en A, B, C. Elles se composent du plan de la conique k compté deux fois, des plans $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ et d'un plan variable passant par r. Les courbes bicanoniques sont donc des quartiques possédant

* Nous nous bornons ici à donner les définitions sans discuter le cas où par exemple un système linéaire de courbes algébriques sur une surface a des points-base. Nous renvoyons, pour plus de détails, à l'ouvrage de Federigo Enriques, Le superficie algebriche, Bologna, Zanichelli, 1949.

deux points doubles sur k et par suite elliptiques. La surface F a les genres $p_a=p_g=0$, $P_2=2$ et son genre linéaire $p^{(1)}$ est égal à un.

La surface d'Enriques est la surface F du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre et triplement par les sommets, dont l'équation s'écrit

$$f(x_2x_3x_1,\ x_3x_2x_1,\ x_3x_1x_2,\ x_1x_2x_3)+x_1x_2x_3x_4\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0,$$

où f et φ sont des formes du second degré de leurs arguments.

Les adjointes doivent être des quadriques passant par les arêtes du tétraèdre et n'existent pas. Il existe une seule biadjointe, du quatrième ordre, passant doublement par les arêtes du tétraèdre; elle est formée des quatre faces de celui-ci. La courbe bicanonique est d'ordre zéro et la surface a les genres $p_a=p_g=0$, $P_2=1$. Son genre linéaire est $p^{(1)}=1$.

Enriques a démontré plus tard [6] que toute surface présentant ces caractères pouvait se ramener par une transformation birationnelle à la surface F.

On sait que si le système bicanonique est irréductible et non formé de courbes elliptiques, on a $P_2=p_a+p^{(1)}$, donc actuellement $P_2=p^{(1)}$.

Nous rappelerons quelques propriétés de la surface d'Enriques, dont la généralisation nous sera utile dans la suite.

Un système linéaire $|C|$ de courbes C de genre π tracées sur F a le degré $2\pi-2$ et la dimension $\pi-1$. Son adjoint $|C'|$ a les mêmes caractères et les systèmes $|2C|$, $|2C'|$ coïncident en un système de genre $4(\pi-1)+1$. Si par exemple les courbes C sont les sections planes de F de genre quatre, les courbes C' sont les sections de F par les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre. Le système $|2C|=|2C'|$ est découpé par les surfaces du sixième ordre passant doublement par les arêtes du tétraèdre, en dehors de celles-ci. Ses courbes ont le genre 13.

Enriques [7] a montré que la surface F était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface dont les courbes canoniques et pluricanoniques sont d'ordre zéro et caractérisée par les conditions $p_a=P_4=1$. Nous avons donné récemment une démonstration fort simple de ce théorème [21]. Supposons donnés, dans un espace linéaire S_7 à sept dimensions, deux espaces linéaires σ_1, σ_2 à trois dimensions ne se rencontrant pas. Dans σ_1, nous considérons une surface F_1 d'Enriques circonscrite au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les sections planes seront dénotées C_1. En rapportant projectivement les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ aux plans de l'espace σ_2, nous définissons une transformation birationnelle T qui fait correspondre à F_1 une surface d'Enriques F_2 circonscrite à un tétraèdre $A_1'A_2'A_3'A_4'$, dont les sections planes seront dénotées par C_2. Les droites joignant les points homologues dans T des surfaces F_1, F_2 engendrent une variété V_3 à trois dimensions d'ordre 12. Soit d'autre part $\varphi_1=0$ une quadrique de σ_1 passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4. La transformation T lui fait correspondre une quadrique $\varphi_2=0$ de σ_2 passant par les points A_1', A_2', A_3', A_4'. Cela étant, l'hyperquadrique $\varphi_1+\varphi_2=0$ de S_7 est transformée en elle-même par T et son intersection avec V_3 comprend une surface F_0, d'ordre 12, sur laquelle T engendre une involution privée de points unis ayant comme images les surfaces F_1, F_2. Aux courbes C_1, C_2 correspondent sur F_0 des sections hyperplanes. Il est alors aisé de prouver, par l'emploi de la formule de Zeuthen sur les correspondances entre courbes algébriques, que la surface F_0 a les caractères $p_a=P_4=1$.

2. Rappelons maintenant en quoi consiste le diviseur de Severi d'une surface algébrique.

Considérons sur une surface algébrique F des systèmes linéaires distincts $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_\nu|$. Il peut se faire qu'il existe un entier positif λ tel que les systèmes $|\lambda C_1|, |\lambda C_2|, \ldots, |\lambda C_\nu|$ coïncident en un seul système. Eh bien, Severi a démontré [23] que le nombre λ avait un maximum σ qui ne dépend que de la surface et est donc un caractère de celle-ci. Ce nombre σ est le diviseur de Severi de la surface.

Si F est une surface d'Enriques, on a $\sigma=2$ et c'était d'ailleurs au moment où Severi écrivait son mémoire, le seul cas connu où σ était supérieur à l'unité. Le fait que $\sigma=2$ pour la surface d'Enriques provient de ce que la surface est l'image d'une involution privée de points unis appartenant à une surface algébrique. Partant de cette remarque, nous avons construit des surfaces de diviseur quelconque [24]. Nous nous limiterons ici à des surfaces régulières ($p_a=p_g$), ce qui suffit pour notre objet.

Considérons une surface F transformée en soi par une transformation birationnelle T de période p, privée de points unis. Les groupes de p points de F transformés en eux-mêmes par T forment une involution I. Soit F' une image de cette involution, c'est-à-dire une surface dont les points correspondent aux groupes de l'involution I. On peut construire sur F un système linéaire $|C|$ transformé en soi par T et contenant p systèmes linéaires partiels $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_p|$ appartenant à l'involution I. A ces systèmes correspondent sur F' des systèmes linéaires distincts $|C'_1|, |C'_2|, \ldots, |C'_p|$. A une courbe C_0 de $|C|$ qui n'est pas transformée en soi par T correspond sur F' une courbe C'_0 et à cette courbe correspondent sur F p courbes de $|C|$: la courbe C_0 et ses transformées par T et ses puissances. Faisons varier C_0 d'une manière continue dans $|C|$. Si elle tend vers une courbe C_1, ou $C_2, \ldots,$ ou C_p, la courbe C'_0 tend vers une courbe $pC'_1, pC'_2, \ldots,$ ou pC'_p. On a donc

$$|C'|=|pC_1|=|pC_2|=\cdots=|pC_p|$$

car, d'après un théorème d'Enriques, la courbe C' appartient totalement à un système linéaire. Le diviseur σ de F' est donc supérieur à p et en général égal à p.

Il est aisé de construire des surfaces telles que F. Supposons pour plus de simplicité que p soit premier et prenons pour T une homographie cyclique de période p dans un espace linéaire S_{p-1} à $p-1$ dimensions. Il suffit de prendre pour surface F la surface commune à $p-3$ hypersurfaces d'ordre p, linéairement indépendantes, transformées en elles-mêmes par T, qui est supposée ne posséder que p points unis, les hypersurfaces choisies ne passant pas par ces points.

Soit K le système canonique de la surface F. On sait qu'il est transformé en soi par T. Il contient un certain nombre de systèmes linéaires partiels $|K_1|, |K_2|, \ldots, |K_r|$ appartenant à l'involution I. Le système canonique de F', s'il existe, correspond à l'un des systèmes précédents. Nous avons démontré qu'il correspondait précisément à celui qui avait la dimensions minimum [9]. De plus, entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de F', nous avons la relation [25]

$$p_a+1=p(p'_a+1).$$

Si l'on veut que la surface F' soit régulière et privée de courbe canonique, on doit avoir $p'_a=0$ et $p=p_a+1$.

Dans ces conditions on a $\nu=p-1$ et les courbes $K'_1, K'_2, \ldots, K'_{p-1}$ qui correspondent sur F' aux courbes $K_1, K_2, \ldots, K_{p-1}$ sont des courbes isolées, c'est-à-dire que les systèmes $|K_1|, |K_2|, \ldots, |K_{p-1}|$ sont de dimension zéro.

3. La recherche des surfaces de genres $p_a=p_g=0$, $P_2>0$ par ce procédé est assez difficile, car il faut trouver des surfaces transformées en elles-mêmes par des transformations de période p_a+1, ce qui n'est pas facile. Nous indiquerons ici les résultats que nous avons obtenus.

Le premier exemple est fourni par la surface du cinquième ordre transformée en soi par l'homographie de période cinq

$$x'_1:x'_2:x'_3:x'_4=x_1:\varepsilon x_2:\varepsilon^2 x_3:\varepsilon^3 x_4,$$

où ε est une racine primitive d'ordre cinq de l'unité.

Cette homographie a comme points unis les sommets du tétraèdre de référence et la surface F a pour équation

$$\begin{aligned} &a_1x_1^5+a_2x_2^5+a_3x_3^5+a_4x_4^5\\ &+b_1x_2^2x_3x_4^2+b_2x_4^2x_1x_3^2+b_3x_2^2x_4x_1^2+b_4x_1^2x_2x_3^2\\ &+c_1x_1^3x_3x_4+c_2x_2^3x_1x_3+c_3x_3^3x_2x_4+c_4x_4^3x_1x_2=0. \end{aligned}$$

Son système canonique est celui de ses sections planes et les sections par les faces du tétraèdre de référence sont les courbes unies K_1, K_2, K_3, K_4. La surface a les genres $p_a=p_g=4$, $p^{(1)}=6$.

On obtient les équations de la surface F' en posant

$$X_1:X_2:X_3:X_4=x_1^2x_3:x_2^2x_1:x_3^2x_4:x_4^2x_2.$$

On obtient ainsi l'équation

$$\begin{aligned} &a_1X_1^4X_2X_4^2+a_2X_2^4X_4X_3^2+a_3X_3^4X_1X_2^2+a_4X_4^4X_3X_1^2\\ &+X_1X_2X_3X_4[b_1X_2X_3X_4+b_2X_3X_4X_1+b_3X_4X_1X_2+b_4X_1X_2X_3\\ &+c_1X_1^2X_4+c_2X_2^2X_3+c_3X_3^2X_2+c_4X_4^2X_1]=0. \end{aligned}$$

Appelons O_1, O_2, O_3, O_4 les sommets du tétraèdre de référence et r_{ik} la droite O_iO_k.

La droite r_{34} est double pour la surface et en tout point de cette droite les plans tangents sont confondus avec le plan $X_1=0$. Toute section plane de la surface a un tacnode en son point de rencontre avec r_{34}. Nous dirons que cette droite est tacnodale pour la surface; dans le plan $X_1=0$, la surface possède une droite double infiniment voisine de r_{34}. De même les droites r_{13}, r_{24}, r_{12} sont tacnodales pour la surface, les plans tangents étant respectivement $X_2=0$, $X_3=0$, $X_4=0$. La surface a pour droites simples les deux autres arêtes du tétraèdre de référence.

Les surfaces adjointes sont des surfaces cubiques passant par les arêtes doubles en y touchant les plans tangents. De telles surfaces n'existent pas et on a $p_a=p_g=0$. Les biadjointes sont du sixième ordre et se composent des six faces du tétraèdre de référence et des quadriques du faisceau

$$\mu_1X_1X_4+\mu_2X_2X_3=0.$$

Les courbes bicanoniques sont des sextiques gauches de genre quatre.

Quant aux triadjointes, elles se composent des faces du tétraèdre comptées deux fois et des plans de l'espace. La surface F' a les genres $p_a=p_g=0$, $P_2=2$, $P_3=4$, $p^{(1)}=2$.

C'était la première surface de genres $p_a=p_g=0$, $P_2=p^{(1)}=2$ qui ait été construite. Vers la même époque, Campedelli a construit des plans doubles de genres $p_a=p_g=0$, $P_2=1$, 2 ou 3 [4].

4. Le second exemple nous donnera une surface dont la courbe bicanonique est isolée mais d'ordre supérieur à zéro [11].

On sait que la variété de Segre représentant les couples de points d'une droite et d'un plan est une variété V à trois dimensions, d'ordre trois, dont les équations dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions s'écrivent

$$\left\|\begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix}\right\|=0.$$

Les espaces à trois dimensions

$$\lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=0, \quad \lambda_0x_3+\lambda_1x_4+\lambda_2x_5=0$$

coupent V suivant des quadriques et les plans

$$\mu_0x_0+\mu_1x_3=0, \quad \mu_0x_1+\mu_1x_4=0, \quad \mu_0x_3+\mu_1x_5=0$$

appartiennent à la variété.

Une hypersurface W du troisième, ordre coupe V suivant une surface F d'ordre neuf. Le système canonique $|K|$ de cette surface est découpé par les plans de V; il est donc formé de cubiques planes elliptiques. La surface F a les genres $p_a=p_g=2$, $p^{(1)}=1$.

L'homographie T, de période trois,

$$x'_0:x'_1:x'_2:x'_3:x'_4:x'_5=x_0:\varepsilon x_1:\varepsilon^2x_2:\varepsilon x_3:\varepsilon^2x_4:x_5,$$

où ε est une racine cubique de l'unité, transforme la variété V en elle-même. On peut prendre l'hypersurface W de manière qu'elle soit transformée en soi par T et que la surface F ne passe par aucun des points unis de l'homographie. Il suffit par exemple de prendre pour W

$$a_0x_0^3+a_1x_1^3+\cdots+a_5x_5^3=0.$$

L'homographie T engendre sur F une involution d'ordre trois privée de points unis et la surface F' qui représente cette involution a les genres $p_a=p_g=0$.

L'homographie T transforme en soi le faisceau canonique $|K|$ et il y a dans ce faisceau deux cubiques K_1, K_2 transformées en elles-mêmes par T. Ces cubiques sont dans les plans

$$x_0=x_1=x_2=0, \quad x_3=x_4=x_5=0.$$

A ces courbes correspondent sur F' des courbes elliptiques K'_1, K'_2.

Le faisceau $|K|$ est de degré zéro et l'adjoint à la courbe K'_1 est l'une des courbes K'_1, ou K'_2, ou $K'_1+K'_2$. Ce ne peut être ni K'_1, ni $K'_1+K'_2$, car alors F' aurait une courbe canonique K'_1 ou K'_2. L'adjointe à K'_1 est donc K'_2, ce que nous écrirons $(K'_1)_a=K'_2$. On a de même $(K'_2)_a=K'_1$. On en déduit

$$(K'_1+K'_2)_a=3K'_1=3K'_2, \quad (K'_1+K'_2)_{aa}=2(K'_1+K'_2)$$

et par conséquent la courbe $K'_1+K'_2$ est la courbe bicanonique de F'. On a $P_2=1$.

Au faisceau $|K|$ correspond sur F' un faisceau $|K'|$ de courbes elliptiques qui est le système tricanonique de F'.

La surface F' a les caractères $p_a=p_g=0$, $P_2=p^{(1)}=1$, $P_3=2$.

5. Le dernier exemple va nous donner une surface contenant un réseau de courbes bicanoniques irréductibles [13].

Dans un espace linéaire S_6 à six dimensions, la surface intersection de quatre hyperquadriques a comme système canonique le système de ses sections hyperplanes et a les genres $p_a=p_g=7$, $p^{(1)}=17$, $P_2=24$. Considérons la surface F commune aux quatre hyperquadriques

$$a_1x_1x_7+a_2x_2x_6+a_3x_3x_5+a_4x_4^2=0,$$
$$b_1x_1^2+b_2x_5^2+b_3x_3x_7+b_4x_4x_6=0,$$
$$c_1x_2^2+c_1x_6^2+c_3x_1x_3+c_4x_5x_7=0$$
$$d_1x_3^2+d_2x_7^2+d_3x_1x_5+d_4x_2x_4=0.$$

Elle est transformée en soi par l'homographie T de période huit d'équations

$$x'_1:x'_2:\ldots:x'_7=\varepsilon x_1:\varepsilon^2x_2:\ldots:\varepsilon^7x_7,$$

où $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ est une racine primitive d'ordre huit de l'unité. L'homographie T engendre sur F une involution d'ordre huit privée de points unis. La surface F', image de cette involution, a les genres $p_a=p_g=0$.

Les sections de F par les hyperplans de la figure de référence sont les courbes $K_1, K_2, \ldots, K_7$. Il leur correspondent sur F' des courbes $K'_1, K'_2, \ldots, K'_7$, de genre trois d'après la formule de Zeuthen. Le système bicanonique contient les courbes $K'_1+K'_7$, $K'_2+K'_6$, $K'_3+K'_5$, $2K'_4$ et a la dimension deux, donc $P_2=3$.

La surface F' a les caractères $p_a=p_g=0$, $P_2=p^{(1)}=3$, $P_3=7$.

On peut d'ailleurs observer que l'involution d'ordre quatre engendrée sur F par l'homographie T^2 a pour image une surface de genres $p_a=p_g=1$, $P_2=6$, $p^{(1)}=5$ et qu'à l'involution d'ordre huit de F correspond sur cette surface une involution d'ordre deux dont F' est l'image.

6. Dans le cas général, on obtient les résultats suivants [14].

Si une surface algébrique régulière F de genre arithmétique $p_a=2s>2$ contient une involution cyclique d'ordre $p=2s+1$, dépourvue de points unis, la surface image F' de cette involution est dépourvue de courbe canonique mais possède des courbes bicanoniques irréductibles. Pour la surface F', on a $p_a=p_g=0$, $p^{(1)}=P_2=s$.

Le modèle projectif de la surface F dont les sections hyperplanes constituent le système canonique ne peut appartenir à une hyperquadrique.

Si une surface algébrique régulière F de genre arithmétique impair $p_a = 2s-1$ contient une involution cyclique d'ordre pair $p=2s$, privée de points unis, la surface F' image de cette involution est dépourvue de courbe canonique mais possède des courbes bicanoniques irréductibles. La surface F' a les caractères $p_a=p_g=0$, $p^{(1)}=P_2=s-1$.

Le modèle projectif de la surface F dont les sections hyperplanes constituent le système canonique appartient à s hyperquadriques linéairement indépendantes. Chacune de ces hyperquadriques est représentée par une équation qui, lorsque l'on effectue l'homographie génératrice de l'involution, se reproduit multipliée par une puissance paire de ε, ε étant une racine d'ordre p de l'unité, et ces puissances sont différentes pour ces hyperquadriques.

7. En attaquant directement les surfaces de genres $p_a=p_g=0$, on peut obtenir des résultats importants.

Nous commencerons par étudier les surfaces F de genres $p_a=p_g=0$, $p^{(1)}=P_2=1$, contenant une courbe bicanonique effective [15].

La courbe bicanonique C_2 est elliptique, de même que toutes les courbes pluricanoniques de la surface. La courbe tricanonique $C_3=C_2'$ ne peut contenir C_2, puisque $p_g=0$, mais elle peut avoir quelques parties communes avec cette courbe, si celle-ci est réductible. Les courbes six-canoniques $3C_2$ et $2C_3$ sont certainement distinctes et les courbes six-canoniques C_6 forment au moins un faisceau. Les courbes C_6 sont adjointes aux courbes pentacanoniques C_5 et puisque celles-ci sont elliptiques, elles ne peuvent être rencontrées par leurs adjointes. Or, par un point d'une courbe C_5, il passe certainement une courbe C_6, par conséquent les courbes C_5 et C_6 sont une partie commune. Posons $C_5=\gamma+\omega$, $C_6=\delta+\omega$, les courbes γ et δ n'ayant aucune partie commune. En utilisant les propriétés des adjointes aux courbes pluricanoniques, on trouve les relations $C_3=C_2+\delta'-\delta$, $C_3=C_2+\gamma'-\gamma$, δ' et γ' étant les adjointes à δ et γ. On voit alors que la courbe C_2 est nécessairement réductible en deux parties et on a $C_2=\Gamma_1+\Gamma_2$, les courbes Γ_1 et Γ_2 étant elliptiques et les courbes $3\Gamma_1$, $3\Gamma_2$ déterminant un faisceau de courbes elliptiques tricanoniques $|C_3|=|3\Gamma_1|=|3\Gamma_2|$.

On retrouve les résultats obtenus plus haut (N° 4), mais la surface obtenue en cet endroit n'est pas la plus générale. On peut d'ailleurs obtenir une autre surface cas particulier de la surface trouvée ici [12].

Appelons point de Noether d'une surface algébrique F un point uniplanaire auquel est infiniment voisin un point double tacnodal. Un tel point impose une condition aux surfaces adjointes d'ordre $n-4$ et les biadjointes passent par ce point et par le tacnode infiniment voisin. Cela étant, considérons une surface F du cinquième ordre ayant une droite double r et deux points doubles de Noether A_1, A_2 dont les plans tangents passent par r. La surface F est dépourvue de courbe canonique et possède une courbe bicanonique formée des sections de F par les plans A_1r, A_2r. Les cubiques elliptiques situées dans les plans passant par r sont les courbes tricanoniques. On a $p_a=p_g=0$, $P_2=1$, $P_3=2$.

En résumé, une surface de genres $p_a=p_g=0$, $P_2=p^{(1)}=1$ contient un faisceau de courbes elliptiques $|\Gamma|$ possédant deux courbes elliptiques Γ_1, Γ_2 telles que $3\Gamma_1$, $3\Gamma_2$ sont des courbes du faisceau $|\Gamma|$. La courbe $\Gamma_1+\Gamma_2$ est la courbe bicanonique et les courbes Γ sont les courbes tricanoniques.

8. Considérons maintenant une surface F de genres $p_a=p_g=0$ possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles. On a $p^{(1)}=P_2=2$ [16].

Désignons par C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 les courbes bicanoniques, tricanoniques, ..., sixcanoniques. Elles ont les genres respectifs 4, 7, 11, 16 et 22.

Le système $(i+1)$-canonique $|C_{i+1}|$ est l'adjoint au système i-canonique $|C_i|$, mais puisque $p_g=0$, aucune de ses courbes ne peut contenir une courbe C_i. Le système $|C_{i+1}|$ découpe sur une courbe C_i la série canonique, complète puisque F est régulière. La dimension $P_{i+1}-1$ de $|C_{i+1}|$ est égale au genre de C_i diminué d'une unité. On a donc $P_3-1=3$, $P_5-1=6$, $P_6-1=15$.

Le procédé de démonstration consiste à prouver qu'il existe une courbe C_6 qui est à la fois formée de trois courbes C_2 et de deux courbes C_3.

Les courbes C_4 formées de deux courbes C_2 sont en nombre doublement infini, par conséquent il existe des courbes C_4 non formées de deux courbes C_2. Elles forment un système triplement infini que nous désignerons par C_4^+

Dans le système $|C_6|$, il existe des courbes formées d'une courbe C_4^+ et d'une courbe C_2; elles forment un système de dimension au moins égal à cinq. Il existe donc dans $|C_6|$ un système linéaire de dimension au plus égale à 9 dont les courbes ne sont pas formées d'une courbe C_4^+ et d'une courbe C_2. Désignons le par $|C_6^+|$

Dans le système $|C_6^+|$ il existe des courbes formées de trois courbes C_2 et des courbes formées de deux courbes C_3. Elles forment des systèmes de dimensions respectives trois et six. Ces deux systèmes ont par conséquent au moins une courbe commune.

Une analyse des différentes possibilités montre qu'il existe sur F quatre courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 isolées, de genre deux, telles que

$$C_2\equiv\Gamma_1+\Gamma_2\equiv\Gamma_3+\Gamma_4,\quad C_3\equiv 2\Gamma_1+\Gamma_3\equiv 2\Gamma_2+\Gamma_4\equiv 2\Gamma_3+\Gamma_2\equiv 2\Gamma_4+\Gamma_1.$$

Les courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 ont deux à deux un point commun.

Le système tricanonique $|C_3|$, de dimension trois, est complètement déterminé par les courbes données ci-dessus. Il possède deux points-base, les points communs aux courbes Γ_1 et Γ_2, Γ_3 et Γ_4. Il a le degré 9 mais le degré effectif sept. En rapportant projectivement les courbes C_3 aux plans de l'espace, on obtient comme modèle projectif de la surface F la surface du septième ordre rencontrée plus haut (N° 3) qui est donc la surface la plus générale de genres $p_a=p_g=0$, $p^{(1)}=P_2=2$ possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles.

9. Considérons maintenant une surface F de genres $p_a=p_g=0$ contenant un système de courbes bicanoniques irréductibles de dimension $P_2-1\geq 2$ [18, 20].

Nous poserons $p^{(1)}=\pi$. Le procédé de démonstration consiste à prouver qu'une certaine courbe, ici une courbe 8-canonique est à la fois la réunion de deux courbes tétracanoniques C_4 et celle d'une courbe tricanonique C_3 et d'une courbe pentacanonique C_5 qui ne soit pas elle-même formée par la réunion d'une courbe bicanonique et d'une courbe tricanonique.

Dans le système pentacanonique C_5, de dimension $10(\pi-1)$, il existe des courbes formées d'une courbe tricanonique et d'une courbe bicanonique; elles forment un système de dimension $4(\pi-1)$. Il existe donc dans $|C_5|$ un système de dimension $6(\pi-1)-1$ ne comprenant aucune courbe formée d'une courbe tricanonique et d'une courbe bicanonique. Nous le désignerons par C_5^+

Dans le système C_8, il existe des courbes formées de deux courbes tétracanoniques C_4; elles forment un système Σ_1 de dimension $12(\pi-1)$.

Dans le système C_8, il existe des courbes formées d'une courbe C_5^+ et d'une courbe C_3; elles forment un système Σ_2 de dimensions $9(\pi-1)-1$.

Enfin, dans le système C_8, il y a des courbes qui sont formées de deux courbes C_3 et d'une courbe C_2; elles forment un système de dimension $7(\pi-1)$ et par conséquent les courbes C_8 qui ne sont pas formées de cette manière forment un système de dimension $21(\pi-1)-1$ que nous desi-gnerons par C_8^+

Les courbes des systèmes Σ_1, Σ_2 appartiennent au système $|C_8^+|$ et comme on a

$$12(\pi-1)+9(\pi-1)-1=21(\pi-1)-1,$$

Σ_1 et Σ_2 ont au moins une courbe en commun.

Il existe donc une courbe C_8 dégénérée d'une part en deux courbes C_4 et d'autre part en une courbe C_5^+ et en une courbe C_3. Cela exige que l'on ait

$$C_3 \equiv \Gamma_1+\Gamma_2, \quad C_5^+ \equiv X_1+X_2, \quad C_4 \equiv \Gamma_1+X_1 \equiv \Gamma_2+X_2$$

et comme $C_3' = C_4$, on a $X_1=\Gamma_2''$, $X_2=\Gamma_1''$ et

$$C_3 = \Gamma_1+\Gamma_2, \quad |C_4| = |\Gamma_1+\Gamma_2''| = |\Gamma_2+\Gamma_1''|, \quad |C_5| = |\Gamma_1''+\Gamma_2''|$$

L'analyse de ces systèmes montre que l'une des courbes Γ_1, Γ_2 est isolée, de genre π et que l'autre est une adjointe à la première. Appelons Γ la première, la seconde étant alors Γ''. Le système bicanonique est $|C_2|=|2\Gamma|$ bien que la courbe Γ ne soit pas une courbe canonique puisque 2Γ et Γ'' sont distincts.

On a $|C_3|=|\Gamma+\Gamma''|$, $|C_4|=|2\Gamma''|=|4\Gamma|$, d'où $2\Gamma''\equiv 4\Gamma$. On en conclut que la surface F a le diviseur $\sigma=2$.

En résumé, s i u n e s u r f a c e a l g é b r i q u e F d e g e n r e s $p_a=p_g=0$ p o s s è d e u n s y s t è m e b i c a n o n i q u e i r r é d u c t i b l e d e d i m e n - s i o n $P_2-1\geq 2$, i l e x i s t e s u r l a s u r f a c e u n e c o u r b e i s o l é e Γ d e g e n r e P_2, t e l l e q u e l e s s y s t è m e s b i c a n o n i q u e, t r i c a n o n i q u e, t é t r a c a n o n i q u e s o i e n t $|\Gamma|$, $|\Gamma+\Gamma''|$, $|2\Gamma''|$ s a n s q u e Γ s o i t u n e c o u r b e c a n o n i q u e.

On a plus généralement

$$|C_{2i}|=|2i\Gamma| \quad |C_{2i+1}|=|(2i-1)\Gamma+\Gamma''|$$

et il existe à côté de ces systèmes

$$|C_{2i}'|=|2(i-1)\Gamma+\Gamma''|, \quad |C_{2i+1}'|=|(2i+1)\Gamma|$$

et

$$|2C_{2i}|=|2\overline{C}_{2i}|, \quad |2C_{2i+1}|=|2\overline{C}_{2i+1}|.$$

10. La surface F représente une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genre $p_g=1$. Nous avions obtenu ce théorème en utilisant une méthode analogue à celle suivie par Enriques dans le cas de surfaces de bigenre un [7]. Nous l'avons ensuite établi par une méthode plus simple [22].

Observons tout d'abord que le système $|C_4|$ est simple, c'est-à-dire que celles de ses courbes qui passent par un point ne passent pas en conséquence par un autre point. Il en est de même du système $|\overline{C}_4|$. Ces systèmes ont la dimension 6ν, où nous posons pour abréger $\nu=\pi+1$.

Considérons dans un espace linéaire $S_{12\nu+1}$ à $12\nu+1$ dimensions deux espaces linéaires Σ, $\overline{\Sigma}$ à 6ν dimensions ne se rencontrant pas. Rapportons projectivement les courbes C_4 aux hyperplans de Σ et les courbes $\overline{C}_4$ aux hyperplans de $\overline{\Sigma}$. Nous obtenons dans Σ une surface que nous désignerons encore par F et dans $\overline{\Sigma}$ une surface que nous désignerons par $\overline{F}$.

Les droites joignant les points homologues des surfaces F et $\overline{F}$ engendrent une variété à trois dimensions V_3 d'ordre 48ν.

Une hyperquadrique $\varphi=0$ de Σ ne contenant pas F découpe sur cette surface une courbe C_8. A cette courbe correspond sur $\overline{F}$ une courbe $\overline{C}_8$ découpée par une hyperquadrique $\overline{\varphi}=0$ de $\overline{\Sigma}$. L'hyperquadrique de $S_{12\nu+1}$ d'équation $\varphi_2+\overline{\varphi}_2=0$ coupe la variété V_3 suivant la surface lieu des droites s'appuyant en des points homologues sur les deux courbes C_8 et suivant une surface F_0 d'ordre 64ν. Cette surface est transformée en soi par l'homographie biaxiale harmonique H ayant comme axes Σ, $\overline{\Sigma}$. Sur F_0, cette homographie détermine une involution du second ordre privée de points unis dont les surfaces F et $\overline{F}$ sont des images. Aux courbes C_4 et $\overline{C}_4$ correspondent des sections hyperplanes de la surface F_0, sections qui sont des courbes tétracanoniques de cette surface. A la courbe Γ de F correspond sur $\overline{F}$ une courbe que nous désignerons par $\overline{\Gamma}$. Les droites s'appuyant en des points homologues sur les courbes Γ et $\overline{\Gamma}$ engendrent une surface coupant F_0 suivant la courbe canonique de cette surface, qui a les genres $p_a=p_g=1$, $P_2=2\nu$.

11. Nous indiquerons maintenant les surfaces obtenues par M. Burniat par des méthodes essentiellement différentes. Ce géomètre considère des plans quadruples abéliens. On donne ce nom à une surface F transformée en soi par trois transformations birationnelles involutives formant un groupe trirectangle, engendrant une involution du quatrième ordre rationnelle, c'est-à-dire dont l'image est un plan.

Dans une première note [2], il construit des plans quadruples abéliens de genres $p_a=p_g=0$ dont les courbes bicanoniques sont formées au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques. Plus tard [3], [26], il forme des plans quadruples abéliens de genres $p_g=0$, $P_2=3$, 4, 5, 6 ou 7 dont le système tricanonique est irréductible.

12. Il importe de comparer le procédé utilisé au N° 2 pour construire des surfaces de genres $p_a=p_g=0$ avec le théorème établi au N° 9. Une surface de genres $p_a=p_g=0$, $P_2>2$ ne peut être l'image d'une involution cyclique d'ordre p appartenant à une surface de genre arithmétique $p-1$, privée de points unis, que si p est une puissance de 2 (voir deux notes en cours de publication dans le Bulletin de l'Académie royale de Belgique, mai et juin 1967).

BIBLIOGRAPHIE*

1. Burniat. Recherches sur les surfaces de bigenre un. Mémoires de la Société roy. des Sciences de Liège, 1936, pp. 1—100.
2. Burniat. Surfaces de genre géométrique nul et bigenre quelconque. R. A. L., 1° sem. 1954, pp. 459—463.
3. Burniat. Surfaces algébriques régulières de genre géométrique p_g 0, 1, 2, 3 et de genre linéaire 3, 4, . . , $8p_g+7$. Colloque de Géométrie algébrique du C. B. R. M., Bruxelles, 1959, pp. 129—146.
4. Campedelli. Sui piani doppi con curva di diramazione dell'ottavo ordine. R. A. L., 1° sem. 1932, pp. 203—208; Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine. R. A. L., 1 sem. 1932, pp. 358—362; Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine. R. A. L., 1° sem; 1932, pp. 536—542.
5. Castelnuovo. Sulle superficie di genere zero. Memorie della Società Italiana dei XL, 1896, pp. 103—123; Memorie Scelte, Bologna, Zanichelli, 1937, pp. 307—334.
6. Enriques. Sopra le superficie algebriche di bigenere uno. Memorie delle Società italiana dei XL, 1906, pp. 327—352; Memorie Scelte, Bologna Zanichelli, 1959, t. II, pp. 241—272.
7. Enriques. Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere uno. Rendiconto della Accademia delle Scienze di Bologna, 1908, pp. 40—45; Memorie Scelte, t. II, pp. 303—306.
8. Godeaux. Sur une surface algébrique de genres zero et de bigenre deux. R. A. L., 2° sem. 1931, pp. 479—481.
   Godeaux. Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux. B. A. B., 1933, pp. 26—37.
9. Godeaux. Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique. B. A. B., 1932, pp. 672—679.
10. Godeaux. Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls. Actualités scientifiques, Paris, Hermann, N° 123.
11. Godeaux. Sur une surface algébrique non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls et de genre linéaire un. B. S. L., 1934, pp. 184—187.
12. Godeaux. Construction d'une surface du cinquième ordre de genres zéro et de bigenre un. B. A. B., 1947, pp. 492—501.
13. Godeaux. Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro. B. A. B., 1949, pp. 688—693.
14. Godeaux. Les surfaces algébriques de genres nuls à courbes bicanoniques irréductibles. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1958, pp. 1—14.
15. Godeaux. Sulle superficie algebriche di genere zero e bigenere zero. Bollettino dell' Unione Matematica Italiana, 1958, pp. 531—534; Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique nuls possédant une courbe bicanonique effective. B. A. B., 1958, pp. 809—812.
16. Godeaux. Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles. B. A. B., 1958, pp. 738—749, 942—944; Sulle superficie algebriche di generi $p_a=p_g=0$ con un fascio di curve bicanoniche irriducibile. Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, 1958—1959, pp. 52—57.
17. Godeaux. Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques. B. A. B., 1959, pp. 52—68, 188—196.
18. Godeaux. Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique zéro dont le système bicanonique est irréductible. B. A. B., 1959, pp. 362—372; 1960, pp. 47—52, 743—747; 1961, pp. 1118—1127; Sulle superficie algebriche di genere zero con

* Abréviations : B. A. B. — Bulletin de l'Académie roy. de Belgique ; B. S. L. — Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège ; R. A, L. — Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei.

un sistema bicanonico irriducibile. Atti del Congresso di Napoli, 1959, pp. 408—410; Remarques sur les surfaces non rationnelles de genres zéro. B. A. B., 1963, pp. 8—10; Sur les surfaces de genres nuls possédant des courbes bicanoniques irréductibles. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1960, pp. 221—230.
19. Godeaux. Quelques résultats sur les surfaces de genres zéro possédant des courbes bicanoniques irréductibles. Colloque de Géométrie algébrique du C. B. R. M., Bruxelles, 1959, pp. 147—159.
20. Godeaux. Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25—41.
21. Godeaux. Une démonstration nouvelle d'un théorème de F. Enriques. R. A. L., 2° sem. 1966, pp. 297—299.
22. Godeaux. Construction d'une surface algébrique à sections hyperplanes bicanoniques possédant une seule courbe canonique. B. A. B., 1966, pp 1058—1063; Construction de surfaces à sections hyperplanes tricanoniques possédant une seule courbe canonique. B. A. B., 1966, pp. 1200—1205; Sur les surfaces contenant une involution non rationelle de genres arithmétique et géométrique nuls. B. A. B., 1966, pp. 1388 1396.
23. Severi. La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique. Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1908, pp. 449—468.
24. Godeaux. Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité. Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1914, pp. 362—368; Exemples de surfaces de diviseur supérieur à l'unité. Bulletin des Sciences Mathématiques, 1915, pp. 182—185.
25. Godeaux. Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications. Roma, Cremonese, 1963.
26. Burniat. Sur les surfaces de genre $P_{12}>1$. Annali di Matematica, t. LXXI, 1966, pp. 1—21.

Reçu le 19. VIII. 1967.

НЕРАЦИОНАЛНИ ПОВЪРХНИНИ С РОДОВЕ НУЛА

Люсиен Годо

(Резюме)

В работата се разглеждат алгебрични повърхнини в тримерното проективно пространство, за които аритметичният род p_a и геометричният род p_g са равни на нула, но 2-родът (bigenre) $P_2 \neq 0$, така че по един критерий на Кастелнуово повърхнините са нерационални. Дадени са примери за такива повърхнини: в точка 3. повърхнина F' с $P_2 = p^{(1)} = 2$, в точка 4. — с $P_2 = p^{(1)} = 1$, в точка 5. — с $P_2 = p^{(1)} = 3$; $p^{(1)}$ е линейният род на повърхнината. Доказани са и някои теореми за разглежданите повърхнини, свързани със съществуването на биканонични, триканонични, ... системи от криви върху тях. Като пример посочваме: ако една алгебрична повърхнина F с родове $p_a = p_g = 0$ притежава неприводима биканонична система от димениця $P_2 - 1 \geq 2$, то върху повърхнината съществува изолирана крива Γ от род P_2, така че биканоничната, триканоничната, тетраканоничната система са съответно $|\Gamma|$, $|\Gamma + \Gamma'|$, $|2\Gamma'|$, без Γ да е канонична крива. Тук кривата Γ' е адюнгирана на кривата Γ.

НЕРАЦИОНАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ НУЛЕВОГО РОДА

Люсиен Годо

(Резюме)

В работе рассматриваются алгебраические поверхности в трехмерном проективном пространстве, для которых арифметический род p_a и геометрический род p_g равны нулю, но 2-род (bigenre) $P_2 \neq 0$, так что, согласно одному критерию Кастелнуово, поверхности нерациональны. Даются примеры таких поверхностей: в пункте 3 — поверхность F' с $P_2=p^{(1)}=2$, в пункте 4 — с $P_2=p^{(1)}=1$, в пункте 5 — с $P_2=p^{(1)}=3$; $p^{(1)}$ — линейный род поверхности. Доказываются и некоторые теоремы для рассмотренных поверхностей, связанные с существованием биканонических, триканонических, ... систем кривых на них. Как пример укажем: если некоторая алгебраическая поверхность F с родом $p_a=p_g=0$ обладает неприводимой биканонической системой размерности $P_2-1 \geq 2$, то на поверхности существует изолированная кривая Γ рода P_2 такая, что биканоническая, триканоническая, тетраканоническая системы являются соответственно $|\Gamma'|$, $|\Gamma+\Gamma''|$, $|2\Gamma|$, при этом Γ — не каноническая кривая. Здесь кривая Γ'' адюнгирована кривой Γ.