БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

НЯКОИ ВЪПРОСИ, СВЪРЗАНИ СЪС СХОДИМОСТ ОТНОСНО ХАУСДОРФОВА МЕТРИКА

Васил А. Попов

0. В тази работа разглеждаме някои оператори и редици от оператори, за които установяваме непрекъснатост в известен смисъл по отношение на хаусдорфовото разстояние между функции. Дефиницията и основните свойства на хаусдорфовото разстояние между функции ще предполагаме за известни (вж. [1], [2], [3]).

Операторите, които разглеждаме, ще предполагаме дефинирани в $D[a, b]$. $D[a, b]$ е съвкупността от локално-монотонните функции, дефинирани в интервала $[a, b]$ и непрекъснати в точките a и b. При това локално-монотонните функции, притежаващи едни и същи допълнени графики (вж. [2]), ще считаме за тъждествени. Нека напомним, че една функция се нарича локално-монотонна, ако $f(x-0)$ и $f(x+0)$ съществуват и $f(x)$ се намира между тях [5].

С $F_M[a, b]$ ще означаваме съвкупността от затворените точкови множества в равнината, които са изпъкнали по отношение на оста y, проекцията на които върху оста x съвпада с интервала $[a, b]$ и ординатите на точките им са заключени в интервала $[-M, M]$.

1. В [4] Бл. Сендов доказва следната теорема, която обобщава теоремата на П. П. Коровкин за линейни положителни оператори:

Теорема А. Ако $\{L_n\}_1^\infty$ е редица от положителни линейни оператори, изобразяващи $D[a, b]$ в $D[a, b]$ и удовлетворяващи условията на П. П. Коровкин, т. е. $L_n(t^k, x) \rightrightarrows x^k$ за $k=0, 1, 2$ в интервала $[a, b]$, то за всяка функция $f(x) \in D[a, b]$ имаме

$$\lim_{n\to\infty} r(L_n(f, x), f(x))=0, \tag{1}$$

където $r(L_n, f)$ е хаусдорфовото разстояние между функциите L_n и $f(x)$.

Тук ще докажем следната

Теорема 1. Нека $\{L_n\}_1^\infty$ е редица от положителни линейни оператори, изобразяващи $D[a, b]$ в $D[a, b]$ и удовлетворяващи условията на П. П. Коровкин. Ако $\{f_n(x)\}_1^\infty$ е редица от функции от $D[a, b]$, клонящи хаусдорфово към функцията $f(x) \in D[a, b]$, то е изпълнено

$$\lim_{n\to\infty} r(L_n(f_n, x), f(x))=0. \tag{2}$$

Доказателство. Нека означим с f_ε хаусдорфовата ε-околност на допълнената графика $\bar{f}$ на функцията $f(x)$. Ще означаваме с S_{f_ε} и I_{f_ε} съответно горната и долната функция на Бер за f_ε:

$$S_{f_\varepsilon}(x)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{\substack{(x',y)\in f_\varepsilon\\ |x'-x|\leq\delta}} y,\quad If_\varepsilon(x)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{\substack{(x',y)\in f_\varepsilon\\ |x-x|\leq\delta}} y.$$

Функциите $S_{f_\varepsilon}(x)$ и $I_{f_\varepsilon}(x)$ принадлежат на $D[a,b]$ и освен това поради $f(x)\in D[a,b]$ са изпълнени равенствата

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r(S_{f_\varepsilon}(x),\ f(x))=0,\tag{3}$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} r(I_{f_\varepsilon}(x),\ f(x))=0.$$

От дефиницията на S_{f_ε} и I_{f_ε} и от предположението, че $r(f_n, f)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ следва съществуването за всяко $\varepsilon>0$ на n_ε такова, че при $n>n_\varepsilon$ да имаме

$$S_{f_\varepsilon}(x)\geq f_n(x)\geq I_{f_\varepsilon}(x).\tag{4}$$

От (4) поради положителността на операторите L_n получаваме

$$L_n(S_{f_\varepsilon}, x)\geq L_n(f_n, x)\geq L_n(I_{f_\varepsilon}, x).\tag{5}$$

Тъй като L_n удовлетворяват условията на П. П. Коровкин и (5), $L_n(f_n, x)$ са ограничени. Нека една горна граница за модулите им е числото M. От компактността на $F_M[a,b]$ (вж. [1]) следва, че съществува $\bar{g}\in F_M[a,b]$ и подредица $\{f_{n_k}\}$ на $\{f_n\}$ такива, че $r(L_{n_k}(f_{n_k}, x),\bar{g})\underset{n_k\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Нека предположим, че $\bar{f}\neq\bar{g}$. Да означим с $S_{\bar{g}}(x)$ и $I_{\bar{g}}(x)$ съответно горната и долната функция на Бер за $\bar{g}$. Тъй като граничният преход относно хаусдорфово разстояние запазва неравенствата, от (5), преминавайки в граничен преход относно хаусдорфово разстояние, получаваме за всяко ε неравенствата

$$S_{f_\varepsilon}(x)\geq S_{\bar{g}}(x)\geq I_{\bar{g}}(x)\geq I_{f_\varepsilon}(x),\tag{6}$$

които заедно с (3) и $f(x)\in D[a,b]$ водят до противоречие с предположението, че $\bar{f}\neq\bar{g}$. С това теоремата е доказана.

Следствие. При условията на теорема 1 за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова n_ε, че при $k, n>n_\varepsilon$ имаме

$$r(L_k(f_n, x),\ f(x))<\varepsilon.$$

Наистина, ако допуснем противното, стигаме до противоречие с теорема 1.

Като приложение ще разгледаме следния пример.

Известно е, че ако $f(t)$ е интегруема периодична функция, дефинирана в интервала $-\pi\leq t\leq\pi$, формулата на Поасон

$$(7) \qquad F(\varrho, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) P_\varrho(t-u)\, du,$$

където

$$P_\varrho(t) = \frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho \cos t + \varrho^2},$$

разширява $f(t)$ до хармонична вътре в единичния кръг функция $F(\varrho, t)$ (ϱ и t се разглеждат като полярни координати на произволна точка от единичния кръг).

Ако $f(t)$ е локално-монатонна функция на единичната окръжност, множеството от граничните стойности на хармоничната функция $F(\varrho, t)$ съвпада с допълнената графика на $f(t)$.

Ще считаме, че $F(\varrho, t)$ е дефинирана при $\varrho < 1$ чрез (7), а при $\varrho = 1$ чрез $F(1, t) = f(t)$.

Теорема 2. Нека $f(t)$ е локално-монотонна функция $N \{ f_n(t) \}_1^\infty$ е редица от интегруеми функции, дефинирани върху единичната окръжност. Ако хаусдорфовото разстояние $r(f(t), f_n(t)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, в затворения единичен кръг е изпълнено

$$\lim_{n\to\infty} r(F_n(\varrho, t),\ F(\varrho, t)) = 0,$$

където

$$F_n(\varrho, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(u) P_\varrho(t-u)\, du.$$

Забележка. Хаусдорфовото разстояние $r(F_n(\varrho, t), F(\varrho, t))$ се разбира като хаусдорфово разстояние между функции на две променливи (вж. [6]).

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Операторите на Поасон

$$L_\varrho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_\varrho(t-u)(\cdot)\, du$$

при $\varrho \to 1$ удовлетворяват условията на П. П. Коровкин и следователно при $n > n_1^\varepsilon$ ще имаме

$$(8) \qquad r\left(F\left(1-\frac{1}{n}, t\right),\ f(t)\right) < \varepsilon.$$

Пак поради това и тъй като $r(f_n, f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, по следствието от теорема 1 при $k, n > n_2^\varepsilon$ ще имаме

$$(9) \qquad r\left(F_k\left(1-\frac{1}{n}, t\right),\ f(t)\right) < \varepsilon.$$

Нека положим $n_0 = \max\{n_1^\varepsilon, n_2^\varepsilon\}$ и $\varepsilon' = \min\left\{\frac{1}{n_0}, \varepsilon\right\}$.

От (8) и (9) следва, че във венеца $1-\varepsilon' \leq \varrho \leq 1$ при $n > n_0$ хаусдорфовото разстояние между функциите $F_n(\varrho, t)$ и $F(\varrho, t)$ е не по-голямо от 2ε. Но в кръга $\varrho \leq 1-\varepsilon'$ имаме дори равномерна сходимост на функциите $F_n(\varrho, t)$ към $F(\varrho, t)$:

$$\max |F_n(\varrho, t)-F(\varrho, t)| \leq \max_{\substack{\varrho \leq 1-\varepsilon' \\ -\pi \leq t \leq \pi}} |P_\varrho(t)| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(u)-f(u)|\, du \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

тъй като от $r(f_n, f) \to 0$ следва $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n - f| du \to 0$ (вж. [7]).

С това теорема 2 е доказана.

Нека отбележим, че теорема 2 остава вярна и за хармонични функции, дефинирани в по-общи области от единичния кръг, но няма да се спираме на това.

В случая, когато L_n са оператори от вида

$$L_n(\cdot) = \int_{-\pi}^{\pi} K(t+u)(\cdot)\, du,$$

теорема 1 може да се уточни, като се даде съответна оценка. В [5] се дава оценка за хаусдорфовото разстояние между функцията $f(x) \in B_{2\pi}$, т. е. 2π-периодична и $\max_x |f(x)| \leq B$, и функцията

$$\varphi_f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K(t)\, dt,$$

където ядрото $K(t)$ се предполага положително и симетрично. Тук ще формулираме аналогична теорема за хаусдорфовото разстояние $r(f, \varphi_g)$, ако ни е известно хаусдорфовото разстояние $r(f, g)$ и модулът на немонотонност (вж. [5]) на една от двете функции.

Т е о р е м а 3. Нека $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат на $B_{2\pi}$ и $f(x)$ има модул на немонотонност $\mu(\delta)$. Ако хаусдорфовото разстояние между $f(x)$ и $g(x)$ е по-малко от r, за всяко $\delta > 2r$ е изпълнено

$$r(f, \varphi_g) \leq \max\left\{\delta, \frac{A}{2}[\mu(8\delta)+2r] + B(A-1) + 4B\int_{\delta}^{\pi} K(t)\, dt\right\},$$

където

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} K(t)\, dt.$$

Доказателството на теорема 3 е напълно аналогично на доказателството на съответната теорема от [5], като се използва вместо лема 7 от [5] следната

Л е м а 1. Нека хаусдорфовото разстояние между функците $f(x)$ и $g(x)$ е по-малко от r и $f(x)$ има модул на немонотонност $\mu(\delta)$. Тогава или в интервала $[x_0+r, x_0+\delta-r]$, или в интервала $(x_0-r, x_0-\delta+r]$ е изпълнено неравенството

$$f(x_0)-\mu(2\delta)\leq g(x)+r$$

и или в интервала $[x_0+r, x_0+\delta-r]$, или в интервала $[x_0-r, x_0-\delta+r]$ е изпълнено неравенството

$$f(x_0)+\mu(2\delta)\geq g(x)-r.$$

Ако $\{K_n(t)\}_1^\infty$ са симетрични сингулярни положителни ядра, при $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=1$ от теорема 3 следва следната оценка:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, r(f, \varphi_{n_g})\leq \frac{\mu(8r)}{2}+2r. \tag{10}$$

От (10) следва теорема 1 за такива ядра.

Нека отбележим, че ядрата $K_n(t)$ могат да бъдат ядрата на Фейер, Джексон, Валле — Пусен, Поасон.

2. Ако $\{f_n(x)\}_1^\infty$ е редица от функции, която клони относно хаусдорфово разстояние към функцията $f(x)$, от това не следва, че въобще функциите $f_n(x)+g(x)$ клонят хаусдорфово към функцията $f(x)+g(x)$ за каква да е функция $g(x)$. Но ако $g(x)$ е непрекъсната, то това е изпълнено. Ще докажем следната

Теорема 4. Нека $\{f_n\}_1^\infty$ е редица от функции, клонящи хаусдорфово към функцията $f(x)$, и $\{g_n\}_1^\infty$ е редица от функции, клонящи равномерно към непрекъснатата функция $g(x)$. Тогава

$$\lim_{n\to\infty} r(f_n+g_n,\ f+g)=0.$$

Доказателство. Съгласно дефиницията за хаусдорфово разстояние да разгледаме

$$\max\{|x-y|,\ |f_n(x)+g_n(x)-f(y)-g(y)|\}.$$

Имаме

$$\max\{|x-y|,\ |f_n(x)+g_n(x)-f(y)-g(y)|\} \tag{11}$$

$$\leq\max\{|x-y|,\ |f_n(x)-f(y)|\}+|g_n(x)-g(x)|+|g(x)-g(y)|.$$

Нека $g(x)$ има модул на непрекъснатост $\omega(\delta)$. От условията на теоремата следва, че при n достатъчно голямо ще имаме

$$r(f_n, f)<\varepsilon$$

и

$$\max_x |g_n(x)-g(x)|<\varepsilon$$

за всяко дадено $\varepsilon>0$. Оттук, от (11) и дефиницията за хаусдорфово разстояние получаваме

$$r(f_n+g_n,\ f+g)\leq 2\varepsilon+\omega(\varepsilon),$$

с което теоремата е доказана.

Като приложение ще разгледаме интегралното уравнение на Фредхолм от II род

$$\lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt + \varphi(x) = f(x). \tag{12}$$

Предполагаме, че ядрото $K(x, t)$ е непрекъсната функция в крайната област $a \leq t \leq b$, $a \leq x \leq b$ и че λ не е собствена стойност. Функцията $f(x)$ предполагаме ограничена и почти навсякъде непрекъсната.

Да разгледаме също така интегралните уравнения

$$\lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi_n(t)\,dt + \varphi_n(x) = f_n(x) \tag{13}$$

със свободни членове $f_n(x)$.

Ще докажем следната

Теорема 5. Нека хаусдорфовото разстояние $r(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогава за решенията на уравненията (12) и (13) е изпълнено

$$\lim_{n\to\infty} r\,(\varphi_n(x), \varphi(x)) = 0.$$

Доказателство. Решенията на уравненията (12) и (13) се дават чрез

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t;\ \lambda)\,f(t)\,dt, \tag{14}$$

$$\varphi_n(x) = f_n(x) + \lambda \int_a^b R(x, t;\ \lambda)\,f_n(t)\,dt, \tag{15}$$

където $R(x, t;\ \lambda)$ е резолвентата на ядрото $K(x, t)$. Да отбележим, че $R(x, t;\ \lambda)$ е непрекъсната функция в областта $a \leqq t \leqq b$, $a \leqq x \leqq b$.

Имаме

$$\left|\lambda \int_a^b R(x, t;\ \lambda)[f_n(t) - f(t)]\,dt\right| \leqq |\lambda| \max|R| \int_a^b |f_n - f|\,dt.$$

Но $\int_a^b |f_n - f|\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ поради това, че $f(t)$ е почти навсякъде непрекъсната и $r(f_n, f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (вж. [7]).

Прилагайки към (14) и (15) теорема 4, получаваме

$$\lim_{n\to\infty} r(\varphi_n, \varphi) = 0,$$

с което теоремата е доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл., Б. Пенков. ε-ентропия и ε-капацитет на пространството от непрекъснатите функции. Известия на Математ. инст. БАН, **6**, 1962, 27—50.
2. Сендов, Бл. Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип. Год. на Соф. унив., Физ-мат. фак., **55**, кн. 1, 1962, 1—39.
3. Сендов, Бл. Върху най-доброто приближение относно хаусдорфово разстояние. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **59**, 1966, 85—103.
4. Сендов, Бл. О теорема П. П. Коровкина для сходимости последовательностей линейных положительных операторов. Докл. АН СССР, **177**, 1967, 518—520.
5. Сендов, Бл. Върху някои линейни методи за апроксимиране на периодични функции относно хаусдорфово разстояние. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **58**, 1965, 107—140.
6. Popov, V. A. Approximation de fonctions d'un grand nombre de variables indépendantes au moyen de polynômes dans la métrique de Hausdorff. C. R. Acad. Bulg. Sci., **19**, 1966, 561—564.
7. Сендов, Бл., В. А. Попов. О некоторых свойствах хаусдорффовой метрики. Mathematica (Cluj), **8**, 1966, 163—172.
8. Коровкин, П. П. Линейные операторы и теория приближений. Москва, Физматгиз, 1959.

Постъпила на 22. IV. 1968 г.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ СО СХОДИМОСТЬЮ ОТНОСИТЕЛЬНО ХАУСДОРФОВОЙ МЕТРИКИ

Васил А. Попов

(Резюме)

В работе рассматриваем некоторые операторы и последовательности операторов, для которых устанавливаем непрерывность в известном смысле относительно хаусдорфова расстояния между функциями (см. [1], [2], [3]).

Рассматриваемые операторы будем предполагать определенными на множестве $D[a, b]$ всех локально монотонных функций, определенных в интервале $[a, b]$ и непрерывных в точках a и b. Напомним, что функция называется локально монотонной, если $f(x-0)$ и $f(x+0)$ существуют, и значение $f(x)$ находится между ними [5].

Теорема 1. Пусть $\{L_n\}_1^\infty$ — последовательность положительных линейных операторов, отображающих $D[a, b]$ в $D[a, b]$ и удовлетворяющих условиям Коровкина [8]. Если $\{f_n(x)\}_1^\infty$ — последовательность функций $f_n(x) \in D[a, b]$, сходящаяся в смысле Хаусдорфа к функции $f(x) \in D[a, b]$, то для хаусдорфова расстояния $r(L_n(f_n), f)$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} r(L_n(f_n, x), f(x)) = 0.$$

Теорема 1 обобщает теорему Бл. Сендова [4]. Как следствие получается

Теорема 2. Пусть $f(t)$ — локально монотонная функция, определенная на единичной окружности, и $\{f_n(t)\}_1^\infty$ — последовательность интегрируемых функций, определенных на единичной окружности.

Если хаусдорфово расстояние $r(f_n, f) \to 0$ для $n \to \infty$, то в замкнутом единичном круге выполнено

$$\lim_{n\to\infty} r(F_n(\varrho, t), \; F(\varrho, t)) = 0.$$

Обозначения:

$$F(\varrho, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) P_\varrho(t-u)\, du,$$

$$F_n(\varrho, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(u) P_\varrho(t-u)\, du, \; P_\varrho(t) = \frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos t+\varrho^2}.$$

Далее дается оценка хаусдорфова расстояния между функцией $f(x)$ и функцией $\varphi_g(x)$, определяемой как $\varphi_g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(t+u) g(u)\, du$ через хаусдорфово расстояние между функциями $f(x)$ и $g(x)$ и модуль немонотонности $f(x)$ (см. также [5]).

Теорема 4. Пусть $\{f_n\}_1^\infty$ — последовательность функций, стремящихся в хаусдорфовом смысле к функции $f(x)$, и $\{g_n\}_1^\infty$ — последовательность функций, стремящихся равномерно к непрерывной функции $g(x)$. Тогда хаусдорфово расстояние $r(f_n+g_n, f+g) \to 0$ при $n \to \infty$.

Как следствие доказывается

Теорема 5. Пусть хаусдорфово расстояние $r(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда для решений уравнений

$$\lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt + \varphi(x) = f(x),$$

$$\lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt + \varphi_n(x) = f_n(x)$$

выполнено $r(\varphi_n, \varphi) \to 0$ для $n \to \infty$.

Функцию $f(x)$ предполагаем ограниченной и почти всюду непрерывной, ядро $K(x, t)$ — непрерывно, a и b — конечны.

SOME PROBLEMS CONNECTED WITH CONVERGENCE IN HAUSDORFF METRIC

Vasil A. Popov

(Summary)

In this paper we consider some operators and sequences of operators, for which we establish continuity in certain sense with respect to the Hausdorff's distance between functions ([1], [2], [3]).

The operators considered are assumed to be defined in the space $D[a, b]$ of all locally-monotone functions over the interval $[a, b]$, and continuous in the points a and b. Let us remind that a function $f(x)$ is called locally-monotone if $f(x-0)$ and $f(x+0)$ exist and the value $f(x)$ lies between these two numbers [5].

Theorem 1. Let $\{L_n\}_1^\infty$ be a sequence of positive linear operators, mapping $D[a, b]$ into $D[a, b]$ and satisfying the condition of Korovkin's theorem [8]. If $\{f_n(x)\}_1^\infty$ is a sequence of functions, $f_n(x) \in D[a, b]$, tending in the sense of Hausdorff metric to the function $f(x) \in D[a, b]$, then for the Hausdorff distance $r(L_n(f_n, x), f(x))$ we have

$$\lim_{n\to\infty} r(L_n(f_n, x), f(x))=0.$$

Theorem 1 generalizes a theorem of Bl. Sendov [4]. As a corollary is given the following theorem for Hausdorff convergence of sequence of harmonic functions:

Theorem 2. Let $f(t)$ be a locally-monotone function defined on the unit circle and $\{f_n(t)\}_1^\infty$ be a sequence of integrable functions defined on the unit circle. If the Hausdorff distance $r(f_n, f) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ then in the closed unit circle we have

$$\lim_{n\to\infty} r(F_n(\varrho, t), F(\varrho, t))=0.$$

Notations:

$$F(\varrho, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)P_\varrho(t-u)\,du,$$

$$F_n(\varrho, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(u)P_\varrho(t-u)\,du,$$

$$P_\varrho(t)=\frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos t+\varrho^2}.$$

By means of Hausdorff distance between f and g and the modulus of non-monotonity of f is given an estimation for the Hausdorff distance $r(f, \varphi_g)$ between the function f and the function φ_g defined by

$$\varphi_g(x)=\int_{-\pi}^{\pi} K(t+u)g(u)\,du$$

(cf. [5]).

Theorem 4. Let $\{f_n(x)\}_1^\infty$ be a sequence of functions tending in the sense of Hausdorff metric to the function $f(x)$ and $\{g_n\}_1^\infty$ be a sequence of functions tending uniformly to the continuous function $g(x)$. Then the Hausdorff distance $r(f_n+g_n, f+g) \to 0$ for $n \to\infty$.

As a corollary is proved

Theorem 5. Let the Hausdorff distance $r(f_n, f) \to 0$ for $n \to \infty$. Then for the solutions of the equations

$$\lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt + \varphi(x) = f(x),$$

$$\lambda \int_a^b K(x,t) \varphi_n(t)\, dt + \varphi_n(x) = f_n(x),$$

we have $r(\varphi_n, \varphi) \to \infty$ for $n \to \infty$.

The function $f(x)$ is supposed bounded and almost everywhere continuous, the nucleus $K(x, t)$ — continuous, a and b — finite.