БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

SUR DEUX THÉORÈMES DE HELMHOLTZ

Istvan Körmendi

H. v. Helmholtz a trouvé qu'en cherchant les conditions de la stationnarité de l'intégrale $\int L dt = \int (\sum p_i \dot{q}_i - H) dt$ (L est la fonction de Lagrange, H la fonction de Hamilton d'un système dynamique holonome) on peut faire varier outre les variables $q_1, \ldots, q_n$ aussi les quantités de mouvement $p_1, \ldots, p_n$ indépendemment les unes des autres, et c'est ainsi qu'il a généralisé le principe de Hamilton. H. Poincaré a fait d'usage de ce théorème. Helmholtz a trouvé aussi un théorème parallèle au susmentionné. Nous avons montré quelques généralisations et applications de ce dernier. Dans ce qui suit nous nous proposons de démontrer que les deux théorèmes sont équivalents. En les appliquant simultanément nous obtenons les équations de mouvement de Routh — Helmholtz.

Une transformation de contact, de plus proche une transformation d'Ampère établit entre le temps t, les coordonnées généralisées $q_1, \ldots, q_n$, les vitesses généralisées $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ et la fonction de Lagrange L d'un système dynamique holonome d'une part, entre le temps t, les coordonnées $q_1, \ldots, q_n$, les quantités de mouvement $p_1, \ldots, p_n$ et la fonction de Hamilton H du système d'autre part une relation réciproque.

Les variables $t, q_1, \ldots, q_n$ se transforment identiquement, ce sont des variables dites variables passives. Les formules de transformation — en écartant celles qui expriment la transformation identique de $t, q_1, \ldots, q_n$ — sont les suivantes:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L, \tag{2}$$

et réciproquement

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H, \tag{4}$$

de même

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Toutes ces formules sont des conséquences de la transformation d'Ampère et sont indépendantes de la circonstance si $q_1, \ldots, q_n$ satisfont aux équations de Lagrange, resp. $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ satisfont aux équations canoniques de Hamilton ou non.

Les deux théorèmes de Helmholtz dont nous nous occupons sont les suivants:

a) Les équations de mouvement de Lagrange découlent du principe de Hamilton:

$$\begin{gathered} \delta \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)\, dt = 0, \\ \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{6}$$

Les variations δq_i sont indépendantes. Etant données les variations des coordonnées les variations des vitesses $\delta \dot{q}_1, \ldots, \delta \dot{q}_n$ sont déjà déterminées.

Helmholtz [1] s'est aperçu que si l'on modifie la fonction de Lagrange de la façon suivante:

$$L^* = L(t, q_1, \ldots, q_n, \theta_1, \ldots, \theta_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \theta_i} (\dot{q}_i - \theta_i) \tag{7}$$

et si l'on postule que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L^* dt = 0 \tag{8}$$

en y faisant varier les coordonnées $q_1, \ldots, q_n$ et les quantités $\theta_1, \ldots, \theta_n$ indépendemment les unes des autres on obtient le système d'équations

$$\dot{q}_i - \theta_i = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

à la seule condition que

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_k}\right) \neq 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Dans ce cas les équations sont équivalentes aux suivantes:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

En ce qui concerne les modifications ultérieures de ce théorème et ses applications au cas d'un système dont une ou plusieurs coordonnées sont cycliques resp. le système est conservatif — le temps t est cyclique — voir notre mémoire [2].

β) C'est aussi à Helmholtz que l'on doit le théorème suivant. Si l'on fait varier dans l'intégrale

(12) $$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)\right\}dt = 0$$

les $q_1, \ldots, q_n$ et $p_1, \ldots, p_n$ toutes ces quantités indépendemment les unes des autres on obtient les équations canoniques [3]

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

C'est le théorème dont H. Poincaré a tiré des conséquences notables [4].

Dans ce qui suit nous démontrons que le théorème cité sous point β) est une conséquence du théorème cité sous point α). Modifions pour cela la fonction

(13) $$L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_i} - H\left(t_1, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}n}\right)$$

selon le théorème sous point α). La fonction de Lagrange modifiée sera

(14) $$L^* = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{\partial L(t, q_1, \ldots, q_n, \theta_1, \ldots, \theta_n)}{\partial \theta_i} - H\left(t, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial L}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \theta_n}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i - \theta_i)\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k \frac{\partial L}{\partial \theta_k} - H\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \theta_i \frac{\partial L}{\partial \theta_i} - H + \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i - \theta_i)\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i} + \sum_{k=1}^{n} \theta_k \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_k \partial \theta_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_k \partial \theta_i}\right).$$

Si nous écrivons en vertu de (3)

(15) $$\theta_k = \left[\frac{\partial H(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)}{\partial p_k}\right]_{p_1 = \frac{\partial L}{\partial \theta_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial L}{\partial \theta_n}}$$

nous obtenons

(16) $$L^* = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L(t, q_1, \ldots, q_n, \theta_1, \ldots, \theta_n)}{\partial \theta_i} - H\left(t, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial L}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \theta_n}\right).$$

On aura selon le principe de Hamilton et en vertu du théorème sous point α)

(17) $$\delta\int_{t_1}^{t_2} L^* dt = 0,$$

c'est-à-dire

(17') $$\delta\int_{t_1}^{t_2} L^* dt = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i}\delta\dot{q}_i + \dot{q}_i\,\delta\frac{\partial L}{\partial \theta_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial L}{\partial \theta_i}}\delta\frac{\partial L}{\partial \theta_i}\right)\right\}dt = 0.$$

Après une intégration par parties on obtient

$$(17'') \qquad \delta\int_{t_1}^{t_2} L^* dt = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial\theta_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\dot q_i - \frac{\partial H}{\partial\frac{\partial L}{\partial\theta_i}}\right)\delta\frac{\partial L}{\partial\theta_i}\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\theta_i} + \frac{\partial H}{\partial q_j}\right)\delta q_i\right\} dt = 0.$$

On peut supprimer les termes $\left[\frac{\partial L}{\partial\theta_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2}$ parce que $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, $i = 1$, 2, .., n. Ecrivons la variation de $\partial L/\partial\theta_i$ in extenso

$$(18) \qquad \delta\frac{\partial L}{\partial\theta_i} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_k\partial\theta_i}\delta q_k + \frac{\partial^2 L}{\partial\theta_k\partial\theta_i}\delta\theta_k\right), \quad i = 1, 2, \quad , n.$$

Les variations $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$, $\delta\theta_1, \ldots, \delta\theta_n$ sont indépendantes les unes des autres. Inversement si $\det(\partial^2 L/\partial\theta_k\partial\theta_i) \neq 0$ et cela nous supposons on peut prescrire arbitrairement les variations $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$, $\delta\frac{\partial L}{\partial\theta_1}, \ldots, \delta\frac{\partial L}{\partial\theta_n}$. Par conséquent on a

$$(19) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L(t, q_1, \ldots, q_n, \theta_1, \ldots, \theta_n)}{\partial\theta_i} + \frac{\partial H\left(t, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial L}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial\theta_n}\right)}{\partial q_i} = 0,$$

et $$i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$(20) \qquad \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H\left(t, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial L}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial\theta_n}\right)}{\partial\frac{\partial L}{\partial\theta_i}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

En appliquant les symboles

$$\frac{\partial L(t, q_1, \ldots, q_n, \theta_1, \ldots, \theta_n)}{\partial\theta_i} = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

on a les équations

$$(19') \qquad \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$(20') \qquad \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)}{\partial p_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

et nous constatons que nous avons fait varier les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $\partial L/\partial\theta_1 = p_1, \ldots, \partial L/\partial\theta_n$ arbitrairement. C. Q. F. D.

On peut démontrer aisément que réciproquement le théorème sous point β) découle du théorème sous point α). Pour cela on se sert de la relation

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i\dot q_i - H(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)\right\} dt = 0$$

et fait varier les quantités $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ arbitrairement. En traversant les opérations faites auparavant mais en sens inverse on parvient au théorème sous point a).

G é n é r a l i s a t i o n. On peut généraliser si l'on veut dire unifier, amalgamer les deux théorèmes. Considérons en effet une transformation d'Ampère dans laquelle outre les variables $t, q_1, \ldots, q_n$ sont aussi les vitesses $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$ $(m<n)$ des variables passives.

Cette transformation fait correspondre à la fonction de Lagrange la fonction de Routh — Helmholtz R:

$$(21) \qquad R(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, p_{m+1}, \ldots, p_n)$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \sum_{k=m+1}^{n} \dot{q}_k p_k - L.$$

Si on résout le système

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = m+1, \ldots, n,$$

par rapport à

$$\dot{q}_k = g_k(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m, p_{m+1}, \ldots, p_n), \; k = m+1, \ldots, n,$$

et substitue à (21), on aura la fonction de Routh — Helmholtz dans sa forme définitive. On trouve ainsi pour la fonction de Lagrange

$$(21') \qquad L = \sum_{k=m+1}^{n} p_k \dot{q}_k - R(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, p_{m+1}, \ldots, p_n).$$

Modifions cette fonction selon le théorème sous point a):

$$(22) \quad L^* = \sum_{k=m+1}^{n} p_k \dot{q}_k - \Big[R(t, q_1, \ldots, q_m, q_{m+1}, \ldots, q_n, \theta_1, \ldots, \theta_m, p_{m+1}, \ldots, p_n) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial \theta_i}(\dot{q}_i - \theta_i) \Big].$$

Le principe de Hamilton prescrit

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L^* dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L^* dt = 0.$$

On a en développant cette expression:

$$(23') \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \sum_{k=m+1}^{n} p_k \dot{q}_k - R(t, q_1, \ldots, q_m, q_{m+1}, \ldots, q_n, \theta_1, \ldots, \theta_m, p_{m+1}, \ldots, p_n) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial \theta_i}(\dot{q}_i - \theta_i) \Big\} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Bigg\{ \sum_{k=m+1}^{n} (\dot{q}_k \delta p_k + p_k \delta \dot{q}_k) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial q_k} \delta q_k - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial \theta_k} \delta \theta_k$$

$$- \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial p_k} \delta p_k - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial R}{\partial \theta_k} (\delta \dot{q}_k - \delta \theta_k)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i - \theta_i) \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 R}{\partial q_k \partial \theta_i} \delta q_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 R}{\partial \theta_k \partial \theta_i} \delta \theta_k + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial^2 R}{\partial p_k \partial \theta_i} \delta p_k \right] \Bigg\} dt = 0.$$

Les variations $\delta q_1, \ldots, \delta q_m$ sont arbitraires, c'est ainsi qu'on obtient après une intégration par parties

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \theta_k} - \frac{\partial R}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i - \theta_i) \frac{\partial^2 R}{\partial q_k \partial \theta_i} = 0, \; k = 1, \ldots, m. \tag{24}$$

Les variations $\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_n$ sont arbitraires, il découle de cela après une intégration par parties:

$$\frac{\partial R}{\partial q_k} + \frac{d p_k}{dt} = 0, \; k = m+1, \ldots, n. \tag{25}$$

Si les variations $\delta\theta_1, \ldots, \delta\theta_m$ sont arbitraires, on a les équations

$$\sum \frac{\partial^2 R}{\partial \theta_k \partial \theta_i} (\dot{q}_i - \theta_i) = 0, \; k = 1, 2, \ldots, m. \tag{26}$$

Ces équations sont équivalentes aux

$$\dot{q}_k - \theta_k = 0, \; k = 1, 2, \ldots, m, \tag{26'}$$

à la condition que

$$\det \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \theta_k \partial \theta_i} \right) \neq 0, \; i, \; k = 1, 2, \ldots, m,$$

et cela nous supposons.

Les variations $\delta p_{m+1}, \ldots, \delta p_n$ sont aussi indépendantes, on aura les équations

$$\frac{\partial R}{\partial p_k} - \frac{d q_k}{dt} = 0, \; k = m+1, \quad , n. \tag{27}$$

Les équations (24), (26'), (25), (27) constituent les équations de mouvement de Routh — Helmholtz.

LITTÉRATURE

1. Helmholtz, H. v. Journal f. Mathematik, C. p. 151 et sqq.; Whittaker, E. T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. 4th ed., New York, Dover, p. 247.
2. Körmendi, I. Sur la réduction d'un système dynamique holonome. Bull. de la Classe de Sci. de l'Acad. R. de Belgique, LI, 1965, 1187—1199.

3. Levi-Civitá, T. U. Amaldi. Lezioni di meccanica razionale. 2e éd., Bologne, N. Zanicheli, 1950. t. II/2, 545—547.
4. Poincaré, H. Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste. Paris, Gauthier-Villars, 1899, t. III, Ch. XXIX.

Reçu le 31. I. 1969

ВЪРХУ ДВЕ ТЕОРЕМИ НА ХЕЛМХОЛЦ

Ищван Кьорменди

(Резюме)

Като се използва една форма, представяща модификация на принципа на Хамилтон и дължаща се на Хелмхолц, в едно предишно разглеждане бе дадено доказателство на теоремата на Уитекър. На Хелмхолц се дължи и една друга модификация на принципа на Хамилтон. Тези форми Леви-Чивита и Амалди наричат „обобщения на принципа на Хамилтон". В настоящата работа се доказва, че твърденията на Хелмхолц, изразяващи псе принципа на Хамилтон, са еквивалентни.

Като непосредствено приложение на направеното изследване са получени уравненията на движение на Раус — Хелмхолц.

О ДВУХ ТЕОРЕМАХ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Иштван Кёрменди

(Резюме)

Использовав одну форму, представляющую модификацию принципа Гамильтона и принадлежащую Гельмгольцу, в одной предыдущей работе автор дал доказательство теоремы Уиттекера. Такие формы Леви-Чивита и Амалди называют „обобщениями принципа Гамильтона". В настоящей работе доказывается, что утверждения Гельмгольца, выражающие принцип Гамильтона, эквивалентны.

Как непосредственное приложение проведенных исследований получаются уравнения движения Рауса — Гельмгольца.