БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES

ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ

BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

Том (Tome) XII

ВЪРХУ ЕДИН ВЪПРОС ОТ ЛОКАЛИЗАЦИЯ НА НУЛИТЕ НА ДАДЕН ПОЛИНОМ

Христо Н. Караниколов

Нека е даден полиномът

$$f(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m,$$

чиито коефициенти са най-произволни реални или комплексни числа ($a_0a_m \neq 0$).

Ползвайки се съществено от едно познато неравенство на Харди [1], ние ще установим няколко теореми за разположението на нулите на полинома $f(z)$.

Теорема 1. Нека означим с A най-голямата от сумите

$$\left|\sum_{n=1}^{p}a_n\right|,\ p=1, 2,\ldots, m.$$

Тогава, ако е изпълнено условието

$$|a_0|+A(1-2m)>0, \tag{1}$$

уравнението

$$f(z)=0 \tag{2}$$

не ще притежава корени, разположени върху единичната окръжност $|z|=1$.

Доказателство. Нека z_1 е един кой да е корен на уравнението (2). Имаме

$$|a_0|\,|z_1|^m=\left|\sum_{n=1}^{m}a_nz_1^{m-n}\right|.$$

Оттук и от въпросното неравенство на Харди [1] следва непосредствено

$$|a_0|\,|z_1|^m\leq A\left[\sum_{n=1}^{m-1}|z_1^{m-(n+1)}-z_1^{m-n}|+1\right],$$

или

$$|a_0|\,|z_1|^m\leq A\left[|1-z_1|\sum_{n=1}^{m-1}|z_1|^{m-n-1}+1\right],$$

т. е.

(3) $$|a_0|\varrho^m \leq A[(1+\varrho)(1+\varrho+\dots+\varrho^{m-2})+1],$$

гдето сме означили за краткост

(4) $$|z_1|=\varrho.$$

Ако приемем, че коренът z_1 лежи на единичната окръжност ($\varrho=1$), трябва да имаме (съгласно (3))

$$|a_0|\leq A[2(m-1)+1],$$

или

(5) $$|a_0|+A(1-2m)\leq 0.$$

Но (5) противоречи на даденото по условие неравенство (1); следователно коренът z_1 не лежи върху единичната окръжност. С това теорема 1 е доказана.

Теорема 2. Всеки корен z_1 на уравнението (2), който лежи вън от единичната окръжност $|z_1|=\varrho>1$, удовлетворява a fortiori условието

(6) $$\varphi(\varrho)\leq 0,$$

а всеки корен z_2 на същото уравнение, който се намира вътре в единичната окръжност $|z_2|=\varrho<1$, удовлетворява a fortiori условието

(7) $$\varphi(\varrho)\geq 0,$$

гдето

(8) $$\varphi(\varrho)=|a_0|\varrho^{m+1}-(A+|a_0|)\varrho^m-A\varrho^{m-1}+2A.$$

Доказателство. Изхождаме пак от неравенството (3) и взимайки пред вид, че имаме по условие $|z_1|=\varrho>1$, умножаваме (3) с разликата $\varrho-1$; така получаваме

$$|a_0|\varrho^m(\varrho-1)\leq A[(1+\varrho)(\varrho^{m-1}-1)+\varrho-1],$$

или, като прехвърлим всички членове в лявата страна, добиваме условието (6).

За да докажем втората част на теоремата (т. е. (7)), този път считаме, че имаме (по условие) $|z_2|=\varrho<1$ и умножаваме (3) с разликата $1-\varrho$. Така намираме

$$|a_0|\varrho^m(1-\varrho)\leq A[(1+\varrho)(1-\varrho^{m-1})+1-\varrho],$$

или, като пренесем всички членове вляво, достигаме до условието (7).

Лема 1. Уравнението

(9) $$\varphi(x)=0$$

освен положителния си корен $x_1=1$ има още един положителен корен (който може да е по-голям, равен или по-малък от 1) и други положителни корени то не притежава.

Доказателство. Ще приложим добре известната теорема на Декарт за връзката между броя на положителните корени на едно (полиномиално) уравнение и броя на вариациите на знаците на коефициентите му. В нашия случай броят на вариациите на знаците е две. Според въпросната теорема броят на положителните корени на (9) е два или нула. Но нула той не може да бъде, защото непосредствената проверка показва, че (9) има за положителен корен числото $x_1=1$. Оттук заключаваме, че (9) има всичко два положителни корена: $x_1=1$ и $x_2 \gtreqless 1$.

Лема 2. Ако е изпълнено условието (1), то положителният корен x_2 на уравнението (9) е a fortiori по-малък от единица, т. е.

$$0<x_2<1, \tag{10}$$

а ако е изпълнено обратното неравенство $|a_0|+A(1-2m)<0$, коренът x_2 ще бъде по-голям от единица.

Доказателство. Нека ε е една безкрайна малка величина. Леки изчисления ни водят до равенството

$$\varphi(1+\varepsilon)=[|a_0|+A(1-2m)]\varepsilon+O(\varepsilon^2), \tag{11}$$

от което и от (1) следва, че

$$\operatorname{sgn}\varphi(1+\varepsilon)=\operatorname{sgn}\varepsilon.$$

Оттук, като приемем, че ε клони чрез отрицателни стойности към нула, намираме

$$\varphi(1+\varepsilon)<0, \quad \varepsilon<0. \tag{12}$$

От друга страна, имаме

$$\varphi(0)=2A>0. \tag{13}$$

Съгласно теоремата на субституциите (или теорема на Коши) от (12) и (13) следва, че в интервала $(0, 1+\varepsilon)$ уравнението (9) има нечетен брой корени, т. е. един корен $x_2<1+\varepsilon<1$.

По аналогичен начин се доказва и втората част на лемата.

Теорема 3. Ако е изпълнено условието (1), корени на уравнението (2) се намират вътре в единичната окръжност $(|z|=1)$.

Доказателство. Преди всичко никой от корените на (2) не лежи върху единичната окръжност (точно това е твърдението на теорема 1). От лема 2 пък заключаваме, че положителният корен $x_2(\neq 1)$ на уравнението (9) е по-малък от единица.

Нека сега да запишем (9) във вида

$$\psi(x)(x-x_1)(x-x_2)=0,$$

или

$$\psi(x)(x-1)(x-x_2)=0, \tag{14}$$

гдето

$$\varphi(x)\equiv\psi(x)(x-1)(x-x_2), \; 0<x_2<1,$$

и $\psi(x)$ е полином, за който очевидно имаме

$$\psi(x)>0 \quad \forall\, x>0. \tag{15}$$

Тогава от (14) и (15) следва, че за да бъде изпълнено условието (6), необходимо и достатъчно е да имаме $x_2\leqq\varrho\leqq 1$. С други думи, условието (6) не ще бъде изпълнено за никое число ϱ, което е по-голямо от единица. А това заедно с теорема 2 показва, че уравнението (2) не може да притежава и такива корени, които се намират вън от единичната окръжност. С това теорема 3 е доказана.

Теорема 4. Ако условието (1) е изпълнено, корените на уравнението (2) не само че се намират вътре в единичната окръжност (както твърди теорема 3), но нещо повече — те се намират вътре в по-тесния кръг

$$(16) \qquad < \sqrt[m]{\frac{A}{|a_0|}(2m-1)}\,.$$

Доказателство. Съгласно теорема 3, щом като е изпълнено условието (1), за модула ϱ на кой да е корен на уравнението (2) ще имаме

$$\varrho < 1.$$

Оттук и от (3) следва непосредствено неравенството

$$|a_0|\,\varrho^m < A[2(m-1)+1],$$

от което пък направо извеждаме желаното неравенство (16) ($|z| = \varrho$).

От (1) се вижда директно, че подкоренната величина на корена в дясната част на (16) е по-малка от единица. С това се оправдава твърдението на теорема 4, че кръгът (16) е по-тесен от единичния кръг.

Теорема 5. Ако е изпълнено неравенството

$$(17) \qquad |a_0| + A(1-2m) < 0,$$

всички корени на уравнението (2) се намират вътре в кръга $|z| < x_2$, или по окръжността

$$(18) \qquad |z| = x_2,$$

т. е. намират се в областта

$$(19) \qquad |z| \leq x_2.$$

Доказателство. От (17) и от лема 2 следва, че коренът x_2 е по-голям от единица. Тогава, ако уравнението (2) има някой корен z', модулът (ϱ') на който е по-голям от единица, то съгласно теорема 2 ще трябва да е изпълнено условието (6), т. е. $\varphi(\varrho') \leq 0$. Но от (14) и (15) се вижда, че последното може да бъде изпълнено само ако имаме

$$(20) \qquad 1 \leq \varrho' \leq x_2.$$

Неравенствата (20) пък показват, че корените на (2), чийто модул е по-голям от единица, се намират в областта (19). Разбира се, там ще се намират още повече и корените на (2), чийто модул е не по-голям от 1. Така че в областта (19) се намират всичките корени на (2).

Забележка. По-нататък ние бихме могли, следвайки същия път на работа, да изградим аналогични теореми (на доказаните дотук) в частния случай, при който ще имаме

$$(21) \qquad |a_0| + A(1-2m) = 0,$$

т. е. в частния случай, при който нито условието (1), нито условието (17) са налице. В този случай уравнението (11) приема вида

$$\varphi(1+\varepsilon) = O(\varepsilon^2),$$

т. е.

$$(22) \qquad \varphi(1+\varepsilon) = B\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

гдето B е един алгебричен израз, който лесно се изчислява и на който ние тук не ще се спираме. Ако се случи и той да е равен на нула ($B=0$), тогава уравнението (22) ще добие вида $\varphi(1+\varepsilon)=C\varepsilon^3+O(\varepsilon^4)$, и т. н. и — при изграждане на теоремите за локализация на нулите на (2) — ще трябва да се съобразяваме с последното равенство вместо с (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер, Э. Т., Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. I, изд. 2. Москва, 1963, с. 30.

Постъпила на 14. II. 1969 г.

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ ОДНОГО МНОГОЧЛЕНА

Христо Н. Караниколов

(Резюме)

Здесь доказаны пять теорем о локализации нулей многочлена

$$f(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m,\ (a_0a_m\neq 0),$$

$a_0, a_1, \ldots, a_m$ — любые реальные или комплексные числа. Вот, например, третья из них:

Если выполнено условие (1), то все корни уравнения $f(z)=0$ находятся внутри единичного круга ($|z|=1$).

ON A QUESTION CONCERNING LOCALIZATION OF THE ZEROS OF A GIVEN POLYNOMIAL

Hristo N. Karanikolov

(Summary)

In the paper five theorems are proved concerning localization of the zeros of the polynomial

$$f(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m\ (a_0a_m\neq 0),$$

with arbitrary real or complex coefficients. Here is, for instance, the third theorem:

If the condition (1) is fulfilled, then all the roots of the equation $f(z)=0$ are in the unity circle ($|z|=1$).