БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

ПРИЛОЖЕНИЕ НА РЕДУЦИРАНИТЕ УРАВНЕНИЯ НА НИЛЗЕН ЗА НЕХОЛОНОМНИ СИСТЕМИ ВЪРХУ ПРОБЛЕМА НА А. Ю. ИШЛИНСКИ

Благовест Ив. Долапчиев

Както се знае, под „системи на Чаплигин“ се разбират такива нехолономни механични системи, при които е възможно отделянето на динамическите уравнения на движението им от неинтегруемите уравнения на връзките; също така това са нехолономни материални системи, неконсервативни и с нехомогенни линейни кинематически връзки при условие, че в изразите за обобщените сили и в коефициентите пред обобщените скорости на нехолономните връзки не фигурират обобщените координати q_ϱ, $\varrho=l+1,\ l+2,\dots,\ l+r=k$.

Проблемът на Ишлински гласи [1]:

„Върху една хоризонтална равнина се търкалят, без да се хлъзгат, два грапави хомогенни цилиндъра с еднакви радиуси a и с ъгъл между образуващите им, равен на α. Върху тях се търкаля трети грапав цилиндър, също хомогенен, но с радиус на кръговото му сечение, равен на R. Да се намерят уравненията на движение на системата.“

Горният пример, както ще видим, представя една нехолономна механична система, която не е система на Чаплигин, следователно за нея не биха се приложили познатите уравнения на Чаплигин. Тук ще покажем че с успех могат да се приложат най-простите „обобщени уравнения на Лагранж“ [2] (при $n=1$), съответно редуцирани за нехолономни системи [3].

Да разясним по-подробно съставянето на уравненията на нехолономните връзки.

В хоризонталната равнина, прекарана през центъра на тежестта G на горния цилиндър, избираме две правоъгълни координатни системи Ox_1y_1 и Ox_2y_2 с произволно общо начало O. Оста Ox_1 на едната система си мислим успоредна на образувателните на първия цилиндър, а оста Ox_2 на втората — успоредна на образувателните на втория цилиндър. Съгласно приетото параметрите, от които зависи във всеки момент положението на разглежданата механична система, са:

1) координатите ξ и η на G относно сравнителната система Ox_1y_1;

2) ъгълът θ, заключен между оста Ox_1 и направлението на образувателните на третия цилиндър, в случая между Ox_1 и Go;

3) ъглите φ_1 и φ_2 на завъртване на първите два цилиндъра около осите им;

4) ъгълът φ на завъртване на третия цилиндър около оста му.

За да намерим уравненията на нехолономните връзки на системата, трябва да намерим скоростите на точките на допиране на горния цилиндър с първите два цилиндъра и да изразим условието за търкалянето му без хлъзгане върху последните.

Ако означим тези скорости съответно с $\bar{v}_1$ и v_2, а с $\bar{v}_G$ означим скоростта на масовия център G на горния цилиндър, написваме познатите векторни равенства

$$(1) \qquad \bar{v}_1 = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{r}_1,$$

$$(2) \qquad \bar{v}_2 = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times \bar{r}_2,$$

където $\bar{\omega}$ е моменталната ъглова скорост на горния цилиндър, а $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ са радиус-векторите $\overline{GT}_1$ и $\overline{GT}_2$ при точки на допиране T_1 и T_2 на този цилиндър с първите два.

Спрямо сравнителната система $Ox_1y_1z_1$ очевидно имаме

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\bar{v}_G = \dot{\xi}\,\bar{i} + \eta\bar{j} + 0\bar{k}, \quad \omega = \dot{\varphi}\cos\theta\, i + \varphi\sin\theta\,\bar{j} + \dot{\theta}\, k, \\ &\bar{v}_1 = 0\,\bar{i} + 2a\varphi_1\,\bar{j} + 0\bar{k}, \quad \bar{v}_2 = -2a\,\dot{\varphi}_2 \sin a\,\bar{i} + 2a\varphi_2\cos a\,\bar{j} + 0\,\bar{k}. \end{aligned}$$

За да проектираме геометричните равенства (1) и (2) върху осите Ox_1 и Oy_1, необходимо е да намерим проекциите ξ_1, η_1 и ξ_2, η_2 върху тях на радиус-векторите $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$. Като означим с $a\varphi_1$ и $a\varphi_2$ съответно разстоянията от Ox_1 и Ox_2 на допирните образувателни на първия, респективно на втория цилиндър, ще имаме

$$(4) \qquad -\xi_1 = (\eta - a\varphi_1)\operatorname{ctg}\theta, \quad -\eta_1 = \eta - a\varphi_1, \quad \zeta_1 = -R.$$

От друга страна, като означим с η' ординатата на G относно сравнителната система Ox_2y_2, лесно намираме

$$(5) \qquad a\varphi_2 - \eta' = GT_2 \sin(\theta - a).$$

Но очевидно имаме

$$(6) \qquad \xi_2 = GT_2 \cos\theta, \quad \eta_2 = GT_2 \sin\theta,$$

откъдето

$$(7) \qquad \xi_2 = \frac{a\varphi_2 - \eta'}{\sin(\theta - a)}\cos\theta, \quad \eta_2 = \frac{a\varphi_2 - \eta'}{\sin(\theta - a)}\sin\theta.$$

Най-после, втората трансформационна формула за координатните системи Ox_1v_1 и Ox_2y_2, а именно

$$(8) \qquad \eta' = -\xi\sin a + \eta\cos a,$$

ни води до следните координати (7):

(9) $$\xi_2=(a\varphi_2+\xi\sin\alpha-\eta\cos\alpha)\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)},\qquad \eta_2=(a\varphi_2+\xi\sin\alpha-\eta\cos\alpha)\frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha)},\qquad \zeta_2=-R.$$

С това за аналитичните връзки на (1) и (2) намираме

(10) $$v_{1x}=0=\dot\xi+\dot\varphi\sin\theta(-R)-\dot\theta(a\varphi_1-\eta),$$
$$v_{1y}=2a\dot\varphi_1=\dot\eta+\dot\theta(a\varphi_1-\eta)\operatorname{ctg}\theta-\dot\varphi\cos\theta(-R);$$

(11) $$v_{2x}=-2a\dot\varphi_2\sin\alpha=\dot\xi+\dot\varphi\sin\theta(-R)-\dot\theta(a\varphi_2+\xi\sin\alpha-\eta\cos\alpha)\frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha)},$$
$$v_{2y}=2a\dot\varphi_2\cos\alpha=\dot\eta+\dot\theta(a\varphi_2+\xi\sin\alpha-\eta\cos\alpha)\frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha)}-\dot\varphi\cos\theta(-R).$$

И тъй, търсените връзки между шестте параметъра ξ, η, φ, θ, φ_1, φ_2 са четирите неинтегруеми диференциални уравнения

(12) $$\dot\xi-R\dot\varphi\sin\theta-\dot\theta(a\varphi_1-\eta)=0,$$

(13) $$\dot\eta+R\dot\varphi\cos\theta+\dot\theta(a\varphi_1-\eta)\operatorname{ctg}\theta-2a\dot\varphi_1=0,$$

(14) $$\dot\xi\sin(\theta-\alpha)-R\dot\varphi\sin\theta\sin(\theta-\alpha)+2a\dot\varphi_2\sin\alpha\sin(\theta-\alpha)$$
$$-\dot\theta(a\varphi_2+\xi\sin\alpha-\eta\cos\alpha)\sin\theta=0,$$

(15) $$\dot\eta\sin(\theta-\alpha)+R\dot\varphi\cos\theta\sin(\theta-\alpha)-2a\dot\varphi_2\cos\alpha\sin(\theta-\alpha)$$
$$+\dot\theta(a\varphi_2+\xi\sin\alpha-\eta\cos\alpha)\cos\theta=0.$$

Те са линейни относно $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\varphi_1$, $\dot\varphi_2$, вследствие на което за независими обобщени скорости остават $\dot\varphi$ и $\dot\theta$.

Да положим за краткост

(16) $$\theta-\alpha=\tau,\quad a\varphi_1-\eta=u,$$

(17) $$a\varphi_2+\xi\sin\alpha-\eta\cos\alpha=w.$$

Непосредствено написваме

(18) $$\dot\xi=R\sin\theta\dot\varphi+u\,\dot\theta.$$

За да определим $\dot\eta$ от (14) и (15), елиминираме $\dot\varphi_2$; имаме

$$\begin{cases}2a\sin\alpha\sin\tau\dot\varphi_2=-\dot\xi\sin\tau+R\sin\theta\sin\tau\dot\varphi+w\sin\theta\dot\theta,\\ 2a\cos\alpha\sin\tau\dot\varphi_2=\dot\eta\sin\tau+R\cos\theta\sin\tau\dot\varphi+w\cos\theta\dot\theta,\end{cases}$$

върху които прилагаме очевидни комбинации, вземайки под внимание първото полагане в (16) и разделяйки със $\sin\tau$; получаваме

$$-(\dot\xi\cos\alpha+\dot\eta\sin\alpha)+R\sin\tau\,\dot\varphi+w\dot\theta=0.$$

Прочее, вследствие (18) намираме

$$(19) \qquad \dot\eta = -R\cos\theta\,\dot\varphi + \frac{w-u\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\dot\theta.$$

От (13) и (19) следва

$$(20) \qquad \dot\varphi_1 = \frac{1}{2a}\left(w - u\,\frac{\sin\tau}{\sin\theta}\right)\frac{\dot\theta}{\sin\alpha} = \frac{1}{2a}\,\frac{w\sin\theta - u\sin\tau}{\sin\alpha}\,\frac{\dot\theta}{\sin\theta},$$

а както от (14), така и от (15) получаваме

$$(21) \qquad \dot\varphi_2 = \frac{1}{2a}\left(w\,\frac{\sin\theta}{\sin\tau} - u\right)\frac{\dot\theta}{\sin\alpha} = \frac{1}{2a}\,\frac{w\sin\theta - u\sin\tau}{\sin\alpha}\,\frac{\dot\theta}{\sin\tau}.$$

Уравненията (18), (19), (20), (21) са линейните нехолономни връзки. Те са хомогенни по отношение на обобщените скорости, но коефициентите пред тях зависят от зависимите обобщени координати, следователно разглежданата механична система е нечаплигинова.

За кинетичната енергия на тази система имаме

$$(22) \qquad 2T = M(\dot\xi^2 + \dot\eta^2) + A\dot\theta^2 + C\dot\varphi^2 + C_1\dot\varphi_1^2 + C_2\dot\varphi_2^2,$$

гдето M е масата на горния цилиндър, A е инерчният му момент относно оста му $Gz_1' \parallel Oz$, C е инерчният му момент относно ротационната му ос Go, а C_1 и C_2 са инерчните моменти на първите два цилиндъра относно техните ротационни оси.

За да използваме „редуцираните уравнения на Нилзен"

$$(23) \qquad \frac{\partial K_1^*}{\partial \ddot q_\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots, l,$$

гдето

$$(24) \qquad K_1 = \dot T - 2\dot T_0 - \sum_{\varkappa=1}^{k} Q_\varkappa \dot q_\varkappa,$$

пресмятаме

$$(25) \qquad \dot T = M(\dot\xi\ddot\xi + \dot\eta\ddot\eta) + A\dot\theta\ddot\theta + C\dot\varphi\ddot\varphi + C_1\dot\varphi_1\ddot\varphi_1 + C_2\dot\varphi_2\ddot\varphi_2,$$

откъдето

$$(26) \qquad T_0 = \text{const}, \quad \dot T_0 = 0.$$

Тъй като и виртуалната работа на теглата е равна на нула, имаме

$$(27) \qquad R_1 = \dot T - 2\dot T_0 = \dot T, \quad K_1 = R_1 - \sum_{\varkappa=1}^{k} Q_\varkappa \dot q_\varkappa = R_1 = \dot T.$$

Предстои да се определят частните производни на функцията K_1^*, държейки сметка за това, че в K_1, т. е. в $\dot T$, обобщените скорости $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\varphi_1$, $\dot\varphi_2$ са функции на $\dot\varphi$ и $\dot\theta$ по законите

$$(28) \qquad \dot\xi = \dot\xi(\dot\varphi, \dot\theta), \quad \dot\eta = \dot\eta(\dot\varphi, \dot\theta), \quad \dot\varphi_1 = \dot\varphi_1(\dot\theta), \quad \dot\varphi_2 = \dot\varphi_2(\dot\theta).$$

Прочее, за уравненията на движение на разглежданата нехолономна механична система ще имаме

$$\frac{\partial K_1^*}{\partial \dot{\varphi}} = M\left(\ddot{\xi}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\varphi}} + \ddot{\eta}\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\varphi}}\right) + C\ddot{\varphi} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial K_1^*}{\partial \dot{\theta}} = M\left(\ddot{\xi}\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\theta}} + \ddot{\eta}\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\theta}}\right) + A\ddot{\theta} + C_1\frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \dot{\theta}}\ddot{\varphi}_1 + C_2\frac{\partial \dot{\varphi}_2}{\partial \dot{\theta}}\ddot{\varphi}_2 = 0 \tag{30}$$

с релациите

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\varphi}} = R\sin\theta, \quad \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\theta}} = -R\cos\theta, \tag{31}$$

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{\theta}} = u, \qquad \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{w - u\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2a}\left(w - \frac{\sin\tau}{\sin\theta}u\right)\frac{1}{\sin\alpha}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial \dot{\varphi}_2}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\sin\theta}{\sin\tau}w - u\right)\frac{1}{\sin\alpha} \tag{34}$$

За уравнението (29) въз основа на (31) намираме

$$M(\ddot{\xi}\sin\theta - \ddot{\eta}\cos\theta)R + C\ddot{\varphi} = 0, \tag{35}$$

или

$$\ddot{\xi}\sin\theta - \ddot{\eta}\cos\theta + C'\ddot{\varphi} = 0, \quad C' = \frac{C}{MR}\cdot \tag{36}$$

За уравнението (30) въз основа на (32), (33) и (34) получаваме

$$\begin{aligned} M\left(\ddot{\xi}u + \ddot{\eta}\frac{\omega - u\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + A\ddot{\theta} + \frac{C_1}{2a}\ddot{\varphi}_1\left(w - \frac{\sin\tau}{\sin\theta}u\right)\frac{1}{\sin\alpha} \\ + \frac{C_2}{2a}\ddot{\varphi}_2\left(\frac{\sin\theta}{\sin\tau}w - u\right)\frac{1}{\sin\alpha} = 0, \end{aligned} \tag{37}$$

или

$$u(\ddot{\xi}\sin\alpha - \ddot{\eta}\cos\alpha) + w\ddot{\eta} + A'\ddot{\theta}\sin\alpha + C_1'\left(w - \frac{\sin\tau}{\sin\theta}\right)\ddot{\varphi}_1 + C_2'\left(\frac{\sin\theta}{\sin\tau}w - u\right)\ddot{\varphi}_2 = 0, \tag{38}$$

гдето

$$A' = \frac{A}{M}, \quad C_1' = \frac{C_1}{2aM}, \quad C_2' = \frac{C_2}{2aM}\cdot \tag{39}$$

В [1] решението на този проблем е дадено с уравненията на Раус чрез четирите неопределени множителя на Лагранж λ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, във вида (при нашите полагания (16) и (17))

$$M\ddot{\xi} = \lambda_1 + \lambda_3\sin\tau, \tag{40}$$

$$M\ddot{\eta} = \lambda_2 + \lambda_4\sin\tau. \tag{41}$$

$$C_1\varphi_1 = -2a\lambda_2, \tag{42}$$

$$C_2\varphi_2 = 2a(\lambda_3 \sin\alpha - \lambda_4 \cos\alpha)\sin\tau = 0. \tag{43}$$

$$A\ddot{\theta} + \lambda_1 u - \lambda_2 u_1 \operatorname{tg}\theta + \lambda_3 w \sin\theta - \lambda_4 w \cos\theta = 0, \tag{44}$$

$$C\ddot{\varphi} - R\lambda_1 \sin\theta - R\lambda_2 \cos\theta + R\lambda_3 \sin\theta \sin\tau - R\lambda u \cos\theta \sin\tau. \tag{45}$$

От първите четири уравнения (40)—(43) определяме четирите множителя λ_i, които внасяме в последните две уравнения (44) и (45); трябва да получим нашите решения (36) и (38). Най-напред намираме

$$\lambda_2 = -\frac{C_1}{2a}\varphi_1, \tag{46}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{\sin\tau}\left(M\ddot{\eta} - \frac{C_1}{2a}\varphi_1\right), \tag{47}$$

$$\lambda_3 = \frac{C_2}{2a}\frac{\varphi_2}{\sin\alpha\sin\tau} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\tau}\left(M\ddot{\eta} + \frac{C_1}{2a}\varphi_1\right), \tag{48}$$

$$\lambda_1 = M\ddot{\xi} - \frac{C_2}{2a}\frac{\varphi_2}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(M\ddot{\eta} + \frac{C_1}{2a}\varphi_1\right). \tag{49}$$

За първото уравнение (44) получаваме

$$\begin{aligned} A\ddot{\theta} + Mu\ddot{\xi} - \frac{C_2}{2a}\frac{u}{\sin\alpha}\varphi_2 - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(M\ddot{\eta} + \frac{C_1}{2a}\varphi_1\right)u + \frac{C_1}{2a}u\operatorname{ctg}\theta\,\varphi_1 \\ + \frac{C_2}{2a}w\frac{\sin\theta}{\sin\alpha\sin\tau}\varphi_2 + w\frac{\sin\theta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\tau}\left(M\ddot{\eta} + \frac{C_1}{2a}\varphi_1\right) \\ - w\frac{\cos\theta}{\sin\tau}\left(M\ddot{\eta} + \frac{C_1}{2a}\varphi_1\right) = 0, \end{aligned} \tag{50}$$

или

$$\begin{aligned} A\sin\alpha\ddot{\theta} + M(\sin\alpha\ddot{\xi} - \cos\alpha\ddot{\eta})u - M\ddot{\eta}w\left(\cos\theta - \frac{\sin\theta\cos\alpha}{\sin\tau}\right)\frac{\sin\alpha}{\sin\tau} \\ - \frac{C_1}{2a}\left[\left(\cos\theta - \frac{\sin\theta\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)w\frac{\sin\alpha}{\sin\tau} + (\operatorname{ctg}\theta\sin\alpha - \cos\alpha)u\right]\varphi_1 \\ - \frac{C_2}{2a}\left(u - w\frac{\sin\theta}{\sin\tau}\right) = 0, \end{aligned} \tag{51}$$

т. е.

$$\begin{aligned} A\sin\alpha\ddot{\theta} + M(\sin\alpha\ddot{\xi} - \cos\alpha\ddot{\eta})u + Mw\ddot{\eta} + \frac{C_1}{2a}\left(w - \frac{\sin\tau}{\sin\theta}u\right)\varphi_1 \\ + \frac{C_2}{2a}\left(\frac{\sin\theta}{\sin\tau}w - u\right)\varphi_2 = 0. \end{aligned} \tag{52}$$

За второто уравнение (45) получаваме

$$C\ddot{\varphi} + MR\sin\theta\,\ddot{\xi} - \frac{C_2}{2a}R\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\varphi_2 - R\frac{\cos\alpha\sin\theta}{\sin\alpha}\left(M\ddot{\eta} + \frac{C_1}{2a}\varphi_1\right) \tag{53}$$

$$-\frac{C_1}{2a}R\cos\theta\,\varphi_1+\frac{C_2}{2a}R\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\varphi_2+R\frac{\cos\alpha\sin\theta}{\sin\alpha}\left(M\ddot{\eta}+\frac{C_1}{2a}\varphi_1\right)$$

$$R\cos\theta\left(M\eta+\frac{C_2}{2a}\varphi_1\right)=0,$$

или

$$\frac{C}{MR}\varphi+\sin\theta\,\ddot{\xi}\;\;\cos\theta\,\eta=0. \qquad (54)$$

Уравненията (54) и (53) съвпадат с намерените по нашия метод (с „редуцираните уравнения на Нилзен“) уравнения (36) и (38).

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк, Ю. И. и Н. А. Фуфаев. Динамика неголономных систем. Москва, 1967, с. 103—104.
2. Долапчиев, Бл. Върху Апел-Ценовите форми на уравненията на движение на холономните и нехолономните механични системи и техните обобщения и критерии за приложения. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **60**, 1967, 229—241.
3. Долапчиев, Бл. Об уравнениях Нильсена-Ценова и их применении к неголономным системам с нелинейными связями. ДАН СССР, **171**, 1966, 820—822.
4. Долапчиев, Бл. Сведение уравнений Нильсена для неголономных механических систем к уравнениям Чаплыгина. Прикл. матем. и механ., **33**, № 5, 1969.

Постъпила на 5. VII. 1969 г.

ПРИМЕНЕНИЕ РЕДУЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ НИЛЬСЕНА ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ К ПРИМЕРУ А. Ю. ИШЛИНСКОГО

Благовест И. Долапчиев

(*Резюме*)

Пример Ишлинского представляет нечаплигиновскую механическую систему. Для него применена универсальная форма Нильсена и найдены уравнения движения. Имея в виду этот факт, очевидно сведение уравнения Нильсена к обобщенным уравнениям Чаплыгина [4].

ANWENDUNG DER REDUZIERTEN GLEICHUNGEN VON NIELSEN ZUR AUFSTELLUNG DER BEWEGUNGSLEICHUNGEN IM BEISPIELE VON A. Ü. ISCHLINSKI

Blagovest I. Dolapčiev

(Zusamenfassung)

Das Problem von Ischlinski stellt ein nichttschaplyginisches mechanisches System dar. Für dieses System sind die reduzierten Gleichungen von Nielsen für nichtholonome materielle Systeme verwendet. In [1] ist das Problem mit der Methode von Routh gelöst.