БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

Рачо Денчев

В настоящей работе обобщаются некоторые результаты работы [1].

Будем пользоваться следующими обозначениями:

E_n — вещественное n-мерное евклидовое пространство с точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$;

Ω — область в E_n с границей $\partial\Omega$;

$C_0^\infty(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне некоторых компактных множеств, содержащихся в Ω (для каждой функции свое множество);

$H_s(\Omega)$ — соболевское пространство функций на Ω, имеющих суммируемые с квадратом производные порядка s, с соответствующей метрикой [2];

$\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по метрике $H_s(\Omega)$. Как известно [3], $\overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ совпадает с совокупностью тех функций u из $H_s(\Omega)$, для которых на $\partial\Omega$ аннулируются производные $\partial^k u/\partial\nu^k$, $k=0, \ldots s-1$, где ν нормаль к $\partial\Omega$.

Пусть A и B формально самосопряженные дифференциальные выражения в E_n порядка $2m$ с постоянными вещественными коэффициентами, B — эллиптическое и не содержит младших членов. Предположим, что задача

$$(1) \qquad Bu=f, \quad u|_{\partial\Omega}= \quad =\frac{\partial^{m-1}u}{\partial\nu^{m-1}}\Big|_{\partial\Omega}=0$$

имеет единственное решение (в смысле Соболева [2]) при любом $f\in L_2(\Omega)$. Обозначим через B_{-1} оператор, ставящий в соответствие каждому $f\in L_2(\Omega)$ соответствующее решение задачи (1).

Будем изучать спектр оператора

$$T\colon\ H_{2m}(\Omega)\ni u\to B_{-1}Au.$$

Докажем следующее утверждение:

Теорема. Если Ω эллипсоид, то существует полная в $\overset{\circ}{H}_m(\Omega)$ система собственных функций оператора T, являющихся полиномами.

Доказательство. Пусть $\partial\Omega$ имеет уравнение $\omega(x)=0$, где $\omega(x)$ полином второй степени. Знак $\omega(x)$ выбираем так, чтобы внутри Ω было $\omega(x)>0$. Обозначим через Π_r пространство полиномов n переменных степени не превышающей r. Пусть N его размерность. Введем в Π_r скалярное произведение

$$\langle p, q\rangle = \int_\Omega p(x)q(x)\omega^m(x)dx, \quad p, q \in \Pi_r.$$

Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — операторы в Π_r, определяемые следующим образом:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \hat{A}&: \Pi_r \ni p \to A(\omega^m p) \in \Pi_r, \\ \hat{B}&: \Pi_r \ni p \to B(\omega^m p) \in \Pi_r. \end{aligned}$$

Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ симметричны. Действительно

$$\langle \hat{A}p, q\rangle \quad \int_\Omega A(\omega^m p)q\omega^m dx.$$

Интегрируя по частям, учитывая, что A самосопряженное выражение и что интегралы по $\partial\Omega$ обращаются в нуль, так как на границе $\omega(x)=0$, получим

$$\langle \hat{A}p, q\rangle = \int_\Omega \omega^m pA(q\omega^m)dx = \langle p, \hat{A}q\rangle.$$

Аналогично для оператора $\hat{B}$.

Оператор $\hat{B}$ положителен. Это следует из оценки

$$\text{(3)} \qquad \langle \hat{B}p, p\rangle = \int_\Omega B(\omega^m p)p\omega^m dx = (B(\omega^m p), \omega^m p) \geq C \, \| \omega^m p \|_m^2, \quad C>0,$$

где $\| \quad \|_m$ — норма в пространстве H_m. Докажем (3) (см. [3], гл. III, § 1). Пусть

$$B = \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha D^\alpha,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Так как B эллиптическое выражение, то можно предположить [3], что

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha \xi^\alpha > \varepsilon \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right)^m \geq \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} (\xi^\alpha)^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in E_n.$$

Установим сначала неравенство (3), когда в нем вместо $\omega^m p$ подставим функцию $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Обозначая через $\tilde{f}$ образ Фурье функции f и пользуясь равенством Парсеваля, получаем

$$\text{(4)} \qquad (Bu, u) = (\widetilde{Bu}, \tilde{u}) = \int_{E_n} (-1)^m \Big(\sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha \xi^\alpha \Big) |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\geq \varepsilon \int\limits_{E_n} \Big(\sum_{|\alpha|=m} (\xi^\alpha)^2 \Big) |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi = \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{E_n} |\xi^\alpha \widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{E_n} |(\widetilde{D^\alpha u})(\xi)|^2 d\xi = \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u \|_0^2 \geq C \| u \|_m^2.$$

Вернемся теперь к полиному $\omega^m p$. Так как $\omega^m p \in \overset{\circ}{H}_m$, то можно построить последовательность $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$, такая что $u_k \to \omega^m p$ в H_m. Так как все производные до порядка $m-1$ включительно функций u_k и $\omega^m p$ аннулируются на $\partial\Omega$, то интегрируя по частям, получаем

$$(Bu_k,\ u_k) = \sum_{|\alpha|,\ |\beta| \leq m} (f_{\alpha\beta} D^\alpha u_k,\ D^\beta u_k)$$

$$\to \sum_{|\alpha|,\ |\beta| \leq m} (f_{\alpha,\beta} D^\alpha(\omega^m p),\ D^\beta(\omega^m p)) = (B(\omega^m p),\ \omega^m p).$$

Здесь $f_{\alpha,\beta}$ — некоторые постоянные коэффициенты. Очевидно также, что

$$\| u_k \|_m \to \| \omega^m p \|_m.$$

Так как оценка (4) имеет место для u_k, то она справедлива и для $\omega^m p$. Таким образом неравенство (3) доказано.

Итак в конечномерном евклидовом пространстве Π_r действуют симметричные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$, при этом оператор $\hat{B}$ положителен. Применяя известную из линейной алгебры [4] теорему о приведении двух квадратичных форм к общему каноническому базису, получаем, что существуют N чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ и N линейно независимых полиномов $\pi_1, \ldots, \pi_N$, удовлетворяющих равенству

(5) $$\hat{A}\pi_j - \lambda_j \hat{B}\pi_j = 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

При этом π_j можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения

(6) $$\langle \hat{B}\pi_i,\ \pi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i,\ j = 1, \ldots, N.$$

Полиномы $\sigma_j = \omega^m \pi_j$ будут собственными функциями оператора T. Действительно подставляя $\hat{A}$ и $\hat{B}$ из (2) в (5), получаем

(7) $$A\sigma_j - \lambda_j B\sigma_j = 0.$$

Так как σ_j удовлетворяют краевым условиям задачи (1), то

$$B_{-1} B\sigma_j = \sigma_j.$$

Теперь применяя оператор B_{-1} к равенству (7), получаем

$$T\sigma_j - \lambda_j \sigma_j = 0.$$

Соотношения (6) дают*

(8) $$(B\sigma_i,\ \sigma_j) = \delta_{ij}.$$

---

* Соотношения (8) можно рассматривать как ортонормированность σ_j в „B-метрике".

Обозначим через Ξ_r множество собственных функций оператора T в пространстве H_r. Легко видеть, что если $r_1 < r_2$, то $H_{r_1} \subset H_{r_2}$ и операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ для пространства H_{r_2} совпадают на H_{r_1} с соответствующими операторами для H_{r_1}. Следовательно $\Xi_{r_1} \subset \Xi_{r_2}$.
Пусть

$$\Xi = \bigcup_{r=1}^{\infty} \Xi_r$$

Покажем, что Ξ полная система в $\overset{\circ}{H}_m$. Множество полиномов вида $\omega^m p$, где p — полином степени не выше r, образует линейное пространство размерности N и так как полиномы σ_i являются N линейно независимыми векторами этого пространства, то любой полином вида $\omega^m p$ можно представить линейной комбинацией полиномов из Ξ. Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Функцию u можно аппроксимировать равномерно вместе с любыми производными порядка меньше m полиномами вида $\omega^m p$ с любой точностью. Действительно $u/\omega^m \in C_0^\infty(\Omega)$ и значит существует полином p такой, что

$$|D^\alpha\left(\frac{u}{\omega^m} - p\right)| < \varepsilon, \quad \alpha \quad m-1. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что из (9) следует

$$D^\alpha(u - \omega^m p)| < C\varepsilon, \quad x \in \Omega,$$

где C некоторая константа, зависящая от ω. Достаточно доказать, что из

$$\frac{u}{\quad} - p < \varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\omega^m} - p\right) < \varepsilon \tag{10}$$

следует

$$u - \omega^m p| < C\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(u - \omega^m p)| < C\varepsilon.$$

Действительно, если $M = \max\limits_{x \in \Omega} \omega^m$, то очевидно

$$|u - \omega^m p| < M\varepsilon.$$

Дальше имеем

$$\varepsilon > \left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\omega^m} - p\right)\right| = \frac{1}{\omega} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(u - \omega^m p) - \left(\frac{u}{\omega^m} - p\right)\frac{\partial \omega^m}{\partial x_j}\ \Big| . \tag{11}$$

Если $M_j = \max\limits_{x \in \Omega} \left|\frac{\partial w^m}{\partial x_j}\right|$, то из (10) и (11) следует

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u - \omega^m p)| < (M + M_j)\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что $u \in C_0^\infty(\Omega)$ можно аппроксимировать с любой точностью полиномами вида $\omega^m p$ в метрике H_m. Так как $\overset{\circ}{H}_m(\Omega)$ является замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ по метрике H_m, то значит любую функцию из H_m можно аппроксимировать в метрике H_m полиномами $\omega^m p$, т. е. линейными комбинациями полиномов из Ξ. Это означает, что система Ξ полна в $\overset{\circ}{H}_m$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денчев, Р. ДАН СССР, **126**, 1959, № 2, 259.
2. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленинградского университета, Ленинград, 1950.
3. Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Изд. „Наукова думка", Киев, 1965.
4. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц. Издательство „Наука", Москва, 1967.

Поступила 11. X. 1969 г.

ВЪРХУ ЕДИН КЛАС ОТ ОПЕРАТОРИ С ДИСКРЕТЕН СПЕКТЪР

Рачо Денчев

(Резюме)

Нека Ω е област в n-мерното евклидово пространство с частично гладка граница $\partial\Omega$: A и B са формално самоспрегнати еднородни диференциални изрази в E_n от ред $2m$ с постоянни коефициенти. Да предложим, че задачата

$$Bu=f, \quad u/_{\partial\Omega}=\cdots=\frac{\partial^{m-1}u}{\partial_\nu^{m-1}}/_{\partial\Omega}=0 \tag{1}$$

има единствено решение при всяко $f\in L_2(\Omega)$. Да означим с B_{-1} оператор, който съпоставя на всяко $f\in L_2(\Omega)$ съответното решение на задача (1).

Доказва се, че спектъра на оператора

$$T:\ u\to B_{-1}Au$$

е дискретен, ако Ω е елипсоид.

ON A CLASS OF OPERATORS WITH POINT SPECTRUM

Račo Denčev

(Summary)

Let Ω be a region in the n-dimensional Euclidean space E_n with piecewise smooth boundary $\partial\Omega$; A and B are formally self-adjoint homogeneous differential expressions in E_n of order $2m$ with constant coefficients. Let us assume that the problem

$$Bu=f, \quad u/_{\partial\Omega}=\cdots=\frac{\partial^{m-1}u}{\partial_\nu^{m-1}}/_{\partial\Omega}=0 \tag{1}$$

has a unique solution for any $f\in L_2(\Omega)$. We denote by B_{-1} such an operator that $B_{-1}f$ is the solution of (1) for every $f\in L_2(\Omega)$. It is proved that the operator T: $u\to B_{-1}Au$ has a point spectrum, if Ω is an ellipsoid.