БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

О ЧИСЛЕ ОТКАЗОВ СИСТЕМЫ ИЗ n НАГРУЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Боян Димитров

В работе рассматривается система из n независимых параллельно связанных элементов. Каждый из элементов работает и восстанавливается случайное время, не влияя на времена работы и восстановления остальных элементов. Система работает, если по крайней мере один из ее элементов работает. В начальный момент система начинает работать с новыми элементами. Найдены выражения для числа отказов системы за время T от начала ее работы и за промежуток длины T в стационарном режиме работы. Получены формулы для одного промежутка простоя и для одного интервала работы системы в стационарном режиме работы рассматриваемой системы.

Можно привести ряд примеров подобных систем. Элементы могут быть электрические централы, подключенные к одному общему далекопроводу; разные цеха одного комбината; отдельные станки в одном цехе; телефонные узлы в телефонной станции; линии одной дороги на перекрестках, где работе элемента соответствует занятость линии одной автомашины и простой элемента — это свободное от машин; разные сооружения в системе обороны и т. п.

Пусть имеется система из n элементов, которая работает, если работает хоть бы один из ее элементов. Каждый из элементов работает и восстанавливается независимо от других. Времена работы и восстановления i-го элемента распределены по законам $F_i(x)$ и $G_i(x)$ соответственно, $i=1, 2, \dots, n$. Считаем, что система начинает работать в момент $t_0=0$ и все ее элементы новые. Ставится задача найти число отказов системы за промежуток времени $[0, T]$.

Верна следующая

Теорема 1. Среднее число отказов $\mu(T)$ системы за время T от начала ее включения дается выражением

$$\mu(T)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^T r_i(t)dH_i(t), \tag{1}$$

где

$$H_i(t)=F_i(t)+\sum_{k=1}^{\infty}F_i * (F_i \quad G_i)^{(k)}(t)$$

и $r_i(t)$ вероятность, что к моменту t от начала все элементы системы, кроме i-ого, не работают. Известно, что функции $r_i(t)$ получаются из равенства

$$r_i(t)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[1-K_\text{г}^{(j)}(t)],$$

где $K_\text{г}^{(j)}(t)$ коэффициент готовности j-ого элемента.

Доказательство. Пусть $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \ldots$ и $\eta_1^{(i)}, \eta_2^{(i)}, \ldots$ последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с распределениями $F_i(x)$ и $G_i(x)$ соответственно. Последовательности $\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\eta_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ тоже предполагаем независимыми между собою. Тогда величины

$$S_1^{(i)}=\xi_1^{(i)},\quad S_{k+1}^{(i)}=S_k^{(i)}+[\eta_k^{(i)}+\xi_{k+1}^{(i)}],\quad k=1, 2, \ldots$$

представляют моменты отказа i-ого элемента, $i=1, 2, \ldots, n$.

Обозначим через $B_k^{(i)}(T)$ событие

$$B_k^{(i)}(T)=\{S_k^{(i)}\leq T\}\cap\left\{\begin{matrix}\text{в момент } S_k^{(i)} \text{ все элементы,}\\ \text{кроме } i\text{-го, не работают}\end{matrix}\right\}$$

и пусть $I_{B_k^{(i)}(T)}$ его индикатор. Тогда число отказов системы, получившиеся за счет отказов i-ого элемента, будет

$$(2)\qquad \nu_i(T)=\sum_{k=1}^{\infty}I_{B_k^{(i)}(T)},$$

а общее число отказов системы в интервале $[0, T]$ дастся суммой

$$\nu(T)=\sum_{i=1}^{n}\nu_i(T).$$

Итак, для среднего числа отказов системы на указанном интервале находим

$$(3)\qquad \mu(T)=E\nu(T)=\sum_{i=1}^{n}E\nu_i(T).$$

С помощи (2) вычислим $E\nu_i(T)$:

$$E\nu_i(T)=\sum_{k=1}^{\infty}P\{B_k^{(i)}(T)\}=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T r_i(t)dF_i * (F_i * G_i)^{(k-1)}(t)=\int_0^T r_i(t)dH_i(t).$$

Подставив эти значения в (3), мы получим (1).

Если все элементы однотипные, тогда формула (1) принимает очень простой вид

$$\mu(T)=n\int_0^T[1-K_\text{г}^{(1)}(t)]^{n-1}dH_1(t).$$

Несмотря на ее компактный вид, формула (1) не очень удобна для приложений. Даже в случае, когда все распределения $F_i(x)$ и $G_i(x)$ экспоненциальные с параметрами λ_i и μ_i соответственно, результат не совсем простой. Легко подсчитать, что теперь

$$(4) \qquad H_i(t)=\frac{\lambda_i\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\,t+\frac{\lambda_i^2}{(\lambda_i+\mu_i)^2}\left[1-e^{-(\lambda_i+\mu_i)t}\right].$$

Еще известно ([1], стр. (127), что

$$K_{\text{г}}^{(j)}(t)=\frac{\mu_j+\lambda_j e^{-(\lambda_j+\mu_j)t}}{\lambda_j+\mu_j}$$

откуда находим

$$(5) \qquad r_i(t)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{\lambda_j}{\lambda_j+\mu_j}\left[1-e^{-(\lambda_j+\mu_j)t}\right].$$

Если поставим $H_i(t)$ и $r_i(t)$ из (4) и (5) в (1), мы найдем точное выражение для $\mu(T)$, довольно сложное. Поэтому можно довольствовать асимптотическим выражением

$$(6) \qquad \mu(T)=\left\{\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\lambda_j+\mu_j}\right\}\sum_{i=1}^{n}{}'\,\mu_i T+O(1),$$

где символом $O(1)$ обозначено выражение, в которое входят суммы констант, зависящих от λ_i и μ_i, и члены вида $C_1e^{-C_2T}$, где C_1 и $C_2>0$ тоже функции λ_i и μ_i, $i=1, 2, \ldots, n$.

Мы приведем полный результат для случая, когда система состоится из однотипных элементов с экспоненциальными временами работы и восстановления, соответственно с параметрами λ и μ. Имеем

$$(6') \qquad \mu(T)=\frac{n\lambda^2\mu}{(\lambda+\mu)^2}T-\frac{n\lambda^2}{(\lambda+\mu)^3}\left(\mu+\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{n\lambda^2}{(\lambda+\mu)^3}\,e^{-(\lambda+\mu)T}\left[\lambda+\mu-\frac{\lambda}{2}\,e^{-(\lambda+\mu)T}\right].$$

Предположим теперь, что мы отчитываем начало наблюдений над системой не с начала ее работы, а задолго после этого, когда система уже находится в стационарном режиме работы. Тогда время ζ_i от начала наблюдений до первого отказа i-ого элемента имеет закон распределения ([2], стр. 75)

$$(7) \qquad \Phi_i(x)=\frac{1}{a_i+b_i}\int_0^x[1-F_i * G_i(u)]du,$$

где

$$a_i=\int_0^\infty[1-F_i(x)]dx, \quad b_i=\int_0^\infty[1-G_i(x)]dx$$

предполагаем конечными. Как известно ([1], стр. 124) для коэффициентов готовности $K_{\text{г}}^{(i)}$ элементов имеются выражения

$$K_{\Gamma}^{(i)}=\frac{a_i}{a_i+b_i} \qquad i=1,\ldots,n, \tag{8}$$

при любом t — момент времени стационарного режима работы элемента. Имеет место

Теорема 2. Среднее число отказов системы за время T ее функционирования в стационарном режиме получается по формуле

$$\mu(T)=\left\{\prod_{j=1}^{n}\frac{b_j}{a_j+b_j}\right\}(b_1^{-1}+\cdots+b_n^{-1})T. \tag{9}$$

Доказательство. Здесь полностью можно повторить доказательство теоремы 1. Надо положить $S_1^{(i)}=\zeta_i$ и дальше, повторив все без изменения, доходим до формулы (1), где уже

$$H_i(t)=\Phi_i(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_i \quad (F_i * G_i)^{(k)}(t).$$

Применяя преобразование Лапласа—Стильтьеса к обеим сторонам этого равенства, получаем

$$h_i(s)=\frac{\varphi_i(s)}{1-f_i(s)g_i(s)}, \tag{10}$$

где

$$h_i(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dH_i(t), \quad \varphi_i(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}d\Phi_i(t),$$

$$f_i(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dF_i(t), \quad g_i(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dG_i(t).$$

Из (7) для $\varphi_i(s)$ получим

$$\varphi_i(s)=\frac{1}{a_i+b_i}\frac{1}{s}[1-f_i(s)g_i(s)],$$

которое вместе с (10) дает

$$h_i(s)=\frac{1}{a_i+b_i}\frac{1}{s}$$

Теперь обратное преобразование Лапласа—Стильтьеса дает, что

$$H_i(t)=\frac{t}{a_i+b_i} \tag{11}$$

Далее для $r_i(t)$ при помощи (8) находим

$$r_i(t)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{b_j}{a_j+b_j} \tag{12}$$

Надо еще подставить выражения (11) и (12) в (1), чтобы убедиться в справедливости (9).

Из теоремы 2 выведем два следствия.

Пусть $y_0^{(n)}, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots$ — последовательные длины промежутков простоя рассматриваемой системы в стационарном режиме ее работы. За исключением $y_0^{(n)}$ все они одинаково распределены и пусть

$$Ey_k^{(n)} = b^{(n)}.$$

Справедливо

Следствие 1. Для среднего простоя $b^{(n)}$ системы в стационарном режиме работы имеет место равенство

$$b^{(n)} = \{b_1^{-1} + \cdots + b_n^{-1}\}^{-1} \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $Y^{(n)}(T)$ означает простой системы за время T в стационарном режиме. Очевидны неравенства

$$y_0^{(n)} + y_1^{(n)} + \cdots + y_{\nu(T)-1}^{(n)} \le Y^{(n)}(T) \le y_0^{(n)} + y_1^{(n)} + \cdots + y_{\nu(T)}^{(n)}.$$

Беря математические ожидания и используя тот факт, что $y_i^{(n)}$, $i > \nu(T)$, независимые от $\nu(T)$, видим, что при больших T верно соотношение

$$EY^{(n)}(T) \sim \mu(T) b^{(n)}. \tag{14}$$

С другой стороны, средняя доля простоя системы за единицу времени, как известно, ([1], стр. 125) равняется

$$\prod_{j=1}^{n} [1 - K_{\Gamma}^{(j)}] = \prod_{j=1}^{n} \frac{b_j}{a_j + b_j},$$

откуда для среднего простоя $Y^{(n)}(T)$ получим

$$Y^{(n)}(T) = \prod_{j=1}^{n} \frac{b_j}{a_j + b_j} T \tag{15}$$

Результат (15) вместе с (14) дает

$$\mu(T) \sim \frac{1}{b^{(n)}} \prod_{j=1}^{n} \frac{b_j}{a_j + b_j} T. \tag{16}$$

Теперь соотношения (9) и (16) и однозначность асимптотического представления ([3] гл. 1) приводят нас к выводу (13).

Совершенно аналогично получается

Следствие 2. Средняя продолжительность $a^{(n)}$ одного промежутка работы системы из n нагруженных элементов в стационарном режиме дается формулой

$$a^{(n)} = \frac{(a_1 + b_1) \ldots (a_n + b_n) - b_1 \ldots b_n}{b_1 \ldots b_n (b_1^{-1} + \cdots + b_n^{-1})}$$

Результат (13) получен в [4] для случая разнотипных элементов, однако с экспоненциальными временами работы. Если все элементы однотипные, (13) дает результат, получен А. Д. Соловьевым [5],

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко, Б. В., Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. Математические методы в теории надежности. Москва, 1965.
2. Кокс, Д. Р., В. Л. Смит. Теория восстановления. Москва, 1967.
3. Брейн, Н. Г де. Асимптотические методы в анализе. Москва, 1961.
4. Обретенов, А. Б. Димитров, М. Узунов. Исследование надежности системы посредством стохастических процессов. Известия Мат. инст., **11**, БАН, 1969, 159—180.
5. Соловьев, А. Д. Надежность систем с восстановлением. В сб.: Кибернетика на службу коммунизму, т. 2. Москва, 1964, 189—193.

Поступила 28. VIII. 1969 г.

ВЪРХУ БРОЯ НА ОТКАЗИТЕ НА СИСТЕМА ОТ n НАТОВАРЕНИ ЕЛЕМЕНТА

Боян Димитров

(Резюме)

n елемента работят и се възстановяват независимо един от друг, но заедно образуват една обща система. Системата е отказала, когато са отказали всички елементи. В работата са намерени изрази за броя на отказите на системата за време T от началото на нейната работа и за интервал с дължина T от стационарния режим на работа на системата. Като следствия са получени средните дължини на един престой и на един интервал на работа на системата в стационарен режим, изразени посредством средните дължини на интервалите на работа и престой (ремонт) на участвуващите елементи.

ON THE NUMBER OF FAILURES OF A SYSTEM OF n LOADED ELEMENTS

Boyan Dimitrov

(Summary)

n elements operate and are restored independently from one another forming together a general system. The system has failed when all elements have failed too. In the present paper we have found expressions for the number of failures of the system for a period of time T from the beginning of its operation, and for an interval with a duration T from the stationary regime of operation of the system. As consequences are obtained the average durations of one repair and of one interval of the system operation in a stationary regime, which are expressed by the average durations of the intervals of operations and repair of the participating elements.