БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIII

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

В. Р. Носов

В работах [1], [2] была поставлена задача изучения следующей системы уравнений с отклоняющимся аргументом:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)+C(t)x(t+\tau)+f(t) \tag{1}$$

или более общей системы вида

$$\dot{x}(t) \int_a^b [d_s p(t, s)]\, x(t+s)+f(t). \tag{2}$$

Здесь $x(t)$, $f(t)$ — n-мерные вектор-столбцы, $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — $n\times n$-матрицы, элементы которых являются непрерывными функциями времени, $\tau\neq 0$ — произвольная постоянная. $p(t, s)$ — $n\times n$-матрица, элементы которой имеют ограниченное равномерно по $t\in[0, \infty]$ изменение по s на отрезке $[a, b]$.

Системы вида (1) или (2) принадлежат к запаздывающему, опережающе-запаздывающему или же к опережающе-опережающему типу уравнений с отклоняющимся аргументом [3], [4].

К системам вида (1) приводит, например, следующая вариационная задача [3], [4]: найти минимум функционала

$$J(x)=\int_a^{b+\tau} \{[x^*(t)+x^*(t-\tau)]\, P(t)\, [x(t)+x(t-\tau)]+\dot{x}^*(t)Q(t)\dot{x}(t)\}\, dt$$

при условии, что

$$x(t)\equiv 0,\ t\in[a-\tau, a],\ t\in[b, b+\tau],$$

$$\int_a^b x^*(t)x(t)\, dt=1.$$

Здесь и в дальнейшем $x^*(t)$ означает вектор-строку.

К частным случаям систем вида (1) приводит также рассмотрение некоторых задач оптимального управления в системах с запаздыванием [1], [5].

В настоящее время известно несколько частных результатов [1], [5], относящихся к системам вида (1), (2). Не выяснен еще вопрос о постановках основных задач для систем такого вида и не установлены соответствующие теоремы существования.

В настоящей работе будут рассмотрены следующие задачи для систем (1) и (2).

Задача на полуоси: найти вектор-функцию $x(t)$, непрерывную на $[-\tau, \infty)$, непрерывно дифференцируемую, удовлетворяющую системе (1) и совпадающую с заданной функцией $\varphi(t)$ на отрезке $[-\tau, 0]$.

Задача на всей оси: найти вектор-функцию $x(t)$, непрерывную при $-\infty<t<\infty$, непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую системе (1) всюду, кроме точки $t=0$ и принимающую заданное значение x_0 при $t=0$.

Ниже мы устанавливаем фредгольмовость сформулированных выше задач, а также некоторые условия существования единственного решения для этих задач. При этом нам приходится накладывать некоторые ограничения на рост решения на бесконечности.

1. Рассмотрим для системы (1) задачу на полуоси:

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)+C(t)x(t+\tau)+f(t),\ 0<t<\infty,\\ x(t)=0,\ -\tau\leq t\leq 0.\end{gathered}\tag{3}$$

Задача с ненулевым краевым условием может быть легко сведена к задаче вида (3).

Обозначим чрез D линейное пространство вектор-функций $x(t)$, определенных на полуоси $-\tau\leq t<\infty$, интегрируемых с квадратом на каждом конечном интервале и таких, что $x(t)\equiv 0$ при $-\tau\leq t\leq 0$. Введем топологию в пространство D с помощью следующей счетной системы скалярных произведений

$$(x, y)_n=\int_0^n x^*(t)\,y(t)\,dt,\quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

и полунорм

$$\|x(t)\|_n=\left(\int_0^n x^*(t)x(t)\,dt\right)^{1/2},\quad n=1, 2, 3, \ldots\tag{4}$$

Пространство D является счетно-гильбертовым пространством, полным относительно введенной топологии и метризуемым.

Обозначим через K пространство, сопряженное к D. Это пространство состоит из интегрируемых с квадратом финитных на бесконечности вектор-строк $y^*(t)$.

Иначе говоря, для всякой функции $y^*(t)\in K$ найдется такое a_y, что $y^*(t)\equiv 0$ при $t>a_y$.

Произвольный линейный функционал $l(x)$ над пространством D имеет вид

$$l(x)=\int_0^\infty y^*(t)x(t)\,dt,\tag{5}$$

где $y^*(t)\in K$.

Все эти результаты частично доказаны в [6], частично доказываются аналогично соответствующим результатам из [6].

Определение 1. Функцию $x(t)$, непрерывную на полуоси $[-\tau, \infty)$, обладающую производной $\dot{x}(t) \in D$, удовлетворяющую почти всюду системе (1) и равную нулю при $t \leq 0$, назовем решением задачи (3).

Рассмотрим наряду с задачей (3) сопряженную задачу: найти непрерывные функции $y^*(t) \in K$ такие, что $\dot{y}^*(t) \in K$ и удовлетворяющие почти всюду системе

$$\dot{y}^*(t) + y^*(t)\, A(t) + y^*(t+\tau)\, B(t+\tau) + y^*(t-\tau)\, C(t-\tau) = 0. \tag{6}$$

Определение 2. Будем говорить, что для задач (3) и (6) справедлива альтернатива Фредгольма, если:

1) либо однородные задачи (3) и (6) имеют только нулевые решения, и тогда задача (3) имеет решение для любой $f \in D$;

2) либо однородная задача (3) имеет p линейно-независимых решений и тогда задача (6) также имеет p линейно-независимых решений $y_i^*(t)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, при этом решение неоднородной задачи (3) существует тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty y_i^*(t) f(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{7}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть все элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ непрерывны на отрезке $[0, \infty)$ и $f(t) \in D$. Тогда для задач (3) и (6) справедлива альтернатива Фредгольма. Если же и вектор $f(t)$ непрерывен для $t \in [0, \infty)$, то тогда любое решение задачи (3) будет непрерывно дифференцируемо на полуоси $(0, \infty)$.

Доказательство. Введем функцию

$$z(t) = \dot{x}(t); \quad z(t) \equiv 0, \quad t \leq 0;$$

$$x(t) = \int_0^t z(s)\, ds; \quad x(t) \equiv 0, \quad t \leq 0. \tag{8}$$

Тогда легко видеть, что, если $x(t)$ есть решение задачи (3), то $z(t) \in D$ является решением уравнения

$$z(t) = A(t) \int_0^t z(s)\, ds + B(t) \int_0^{t-\tau} z(s)\, ds + C(t) \int_0^{t+\tau} z(s)\, ds + f(t). \tag{9}$$

Верно и обратное. Если $z(t) \in D$ есть решение (9), то $x(t)$, построенное по формуле (8), будет решением задачи (3).

Определим теперь в пространстве D оператор T следующим образом

$$Tz(t) = A(t) \int_0^t z(s)\, ds + B(t) \int_0^{t-\tau} z(s)\, ds + C(t) \int_0^{t+\tau} z(s)\, ds. \tag{10}$$

Тогда уравнение (9) можно рассматривать как операторное уравнение в пространстве D вида

$$z(t)=Tz(t)+f(t). \tag{11}$$

Оператор T является вполне непрерывным оператором в пространстве D. Он переводит всякое ограниченное в D множество (т. е. множество, ограниченное по всем полунормам (4)) в компактное в D множество (т. е. во множество, компактное по всем полунормам вида (4)). В самом деле, пусть N—целое число такое, что $\tau\leq N<\tau+1$. Тогда из критерия М. Рисса [6] легко следует, что всякое множество, ограниченное по $(n+N)$-ной полунорме (4), переводится оператором T во множество, компактное по n-ой полунорме.

Найдем теперь вид сопряженного оператора T^*, действующего в пространстве K^*. Поскольку произвольный линейный функционал над пространством D имеет вид (5), то оператор T^* определяется из равенства

$$\int\limits_0^\infty y^*(t)\,Tz(t)\,dt=\int\limits_0^\infty T^*y^*(t)z(t)\,dt,\quad y(t)\in K.$$

Будем в дальнейшем для удобства считать, что матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ равны нулю при $t\leq 0$.

Тогда, меняя порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_0^\infty y^*(t)\left\{A(t)\int\limits_0^t z(s)\,ds+B(t)\int\limits_0^{t-\tau} z(s)\,ds+C(t)\int\limits_0^{t+\tau} z(s)\,ds\right\}dt$$

$$\int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_s^\infty [\,y^*(t)A(t)+y^*(t+\tau)B(t+\tau)+y^*(t-\tau)C(t-\tau)]\,dt\right\}z(s)\,ds.$$

Это равенство справедливо, поскольку

$$\int\limits_0^\infty y^*(t)B(t)\int\limits_0^{t-\tau} z(s)\,ds\quad \int\limits_{-\tau}^\infty y^*(\xi+\tau)B(\xi+\tau)\int\limits_0^\xi z(s)\,ds$$

$$=\int\limits_{-\tau}^\infty\left\{\int\limits_s^\infty y^*(\xi+\tau)B(\xi+\tau)\,d\xi\right\}z(s)ds=\int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_s^\infty y^*(\xi+\tau)B(\xi+\tau)\,d\xi\right\}z(s)\,ds$$

и

$$\int\limits_0^\infty y^*(t)C(t)\int\limits_0^{t+\tau} z(s)\,ds=\int\limits_\tau^\infty y^*(\xi-\tau)\,C(\xi-\tau)\int\limits_0^\xi z(s)\,ds$$

$$=\int\limits_0^\infty y^*(\xi-\tau)\,C(\xi-\tau)\int\limits_0^\xi z(s)\,ds=\int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_s^\infty y^*(\xi-\tau)\,C(\xi-\tau)\,d\xi\right\}z(s)\,ds.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $C(t)\equiv 0$ и $z(t)\equiv 0$ при $t<0$. Значит оператор T^* имеет вид

$$T^* y^*(t)=\int_s^\infty \{y^*(t)\,A(t)+y^*(t+\tau)\,B(t+\tau)+y^*(t-\tau)\,C(t-\tau)\}\,dt.$$

Легко видеть, что всякое решение $y^*(t)\in K$ уравнения

$$y^*(t)=T^*y^*(t) \tag{12}$$

будет одновременно являться решением сопряженной к задаче (3) задачи (6) и обратно.

В силу теоремы Лере [7] для уравнений (11) и (12) с вполне непрерывным оператором в линейном метрическом пространстве D будет справедлива альтернатива Фредгольма. Поэтому уравнение (11) будет иметь решение $z(t)$ как только

$$\int_0^\infty y_i^*(t)f(t)\,dt=0, \quad i=1,2,\ldots,p, \tag{13}$$

где $y_i^*(t)\in K$ — произвольное решение (12) или, что то же самое, произвольное решение сопряженной задачи (6).

Но тогда $x(t)$, построенное по $z(t)$ формулой (8), будет решением задачи (3). Если же коэффициенты системы (1) и функция $f(t)$ непрерывны, то из уравнения (1) вытекает, что всякое его решение будет иметь непрерывную производную.

Теорема 1 доказана.

Сделаем несколько замечаний относительно доказанной теоремы.

Замечание 1. В работе Халаная [1] для системы (1) предлагается рассматривать следующую задачу: найти функцию $x(t)$, удовлетворяющую системе (1) при $-\infty<t<-\tau$, $\tau<t<\infty$ и принимающую заданное значение при $-\tau\leq t\leq\tau$. Легко видеть, что эта задача эквивалентна двум задачам на полуоси вида (3).

Замечание 2. В случае, когда система (1) есть система запаздывающего типа, сопряженная система является системой с опережением. Поскольку единственным финитным решением системы с опережением является тривиальное решение, то из теоремы 1 вытекает, что задача (3) для системы с запаздыванием всегда имеет решение. Это совпадает с хорошо известной теоремой существования для систем с запаздыванием.

Замечание 3. Пусть L некоторое подпространство пространства D, $f(t)\in L$, оператор (10) отображает L в себя, всякое решение $x(t)\in L$ определяет по формуле (8) функцию $z(t)\in L$ и, обратно, всякая функция $z(t)\in L$ дает по формуле (8) функцию $x(t)$ также из пространства L. Тогда в пространстве L также будет справедлива альтернатива Фредгольма, но при этом решение сопряженной системы надо брать из пространства L^*.

2. Рассмотрим теперь для системы (1) задачу на всей прямой вида

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)+C(t)\,x(t+\tau)+f(t),\ t\neq 0,\\ x(0)=0.\end{gathered} \tag{14}$$

Обозначим чрез D_1 линейное пространство вектор-функций $z(t)$, определенных на всей оси $-\infty < t < +\infty$ и интегрируемых с квадратом на каждом конечном интервале со следующей системой полунорм:

$$\|z(t)\|_n = \left(\int_{-n}^{n} z^*(t)\, z(t)\, dt\right)^{1/2} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Пространством, сопряженным к пространству D_1, является пространство K_1 интегрируемых с квадратом финитных на всей оси функций. Пространства D_1 и K_1 аналогичны по своим свойствам пространствам D и K.

Определение 3. Функцию $x(t) \in D_1$, непрерывную при $-\infty < t < +\infty$, производная которой $\dot{x}(t) \in D_1$, удовлетворяющую системе (1) почти всюду и равную нулю при $t = 0$, назовем решением задачи (14).

Сопряженной задачей к задаче (14) будет являться следующая задача: найти непрерывное на всей оси решение $y^*(t)$ системы (6) такое, что $y^*(t) \in K_1$ и $\dot{y}^*(t) \in K_1$.

Будем говорить в смысле определения 2 о выполнении альтернативы Фредгольма для задачи (14) и сопряженной с ней задачи.

Аналогично теореме 1 доказывается следующая

Теорема 2. Пусть все элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ непрерывны при $-\infty < t < \infty$ и $f(t) \in D_1$. Тогда для задач (14) и сопряженной с ней справедлива альтернатива Фредгольма. Если же и вектор $f(t)$ непрерывен для $-\infty < t < +\infty$, то любое решение задачи (14) будет непрерывно дифференцируемо для $-\infty < t < +\infty$.

3. Изучим теперь систему (2). Для этой системы также можно поставить задачу на полуоси и на всей оси. Мы рассмотрим только задачу на полуоси:

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = \int_a^b [d_s p(t, s)]\, x(t+s) + f(t), \\ x(t) = 0, \quad -a \le t \le 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Задача на всей оси рассматривается аналогично; сопряженной к (16) является следующая задача: найти финитное на бесконечности решение системы

$$\frac{d}{dt}\left[y^*(t) + \int_a^b y^*(t-s)\, p(t-s, s)\, ds\right] + y^*(t-b)\, p(t-b, b) = 0. \tag{17}$$

Решение задачи (16) будем понимать в смысле определения 1, а под решением сопряженной задачи (17) мы будем понимать функцию $y^*(t) \in K$ такую, что функция

$$Y(t) = y^*(t) + \int_a^b y^*(t-s)\, p(t-s, s)\, ds \in K$$

и имеет почти всюду производную, удовлетворяющую системе (17).

Будем говорить в смысле определения 2 о справедливости альтернативы Фредгольма для задач (16) и (17).

Теорема 3. Пусть оператор

$$Ux = \int_a^b [d_s p(t, s)]\, x(t+s), \quad 0 \leq t < \infty$$

отображает непрерывные на отрезке $[-a, \infty)$ функции в функции из пространства D. Пусть

$$p(t, a) = 0, \tag{18}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^T \int_a^b p_{ij}^2(t, \xi - t)\, d\xi\, dt < \infty \tag{19}$$

при всяком $0 < T < \infty$. Пусть $f(t) \in D$ и $-\infty < a \leq b < +\infty$.

Тогда для задач (16) и (17) справедлива альтернатива Фредгольма. Если же оператор Ux отображает непрерывные на отрезке $[-a, \infty)$ функции в функции, непрерывные на отрезке $[0, \infty)$, и функция $f(t)$ непрерывна, тогда любое решение задачи (16) будет непрерывно дифференцируемо на полуоси $(0, \infty)$.

Доказательство. Введем функцию $z(t)$, связанную с $x(t)$ соотношением (8). Тогда решение задачи (16) эквивалентно решению в пространстве D следующего операторного уравнения:

$$z(t) = \int_a^b [d_s p(t, s)] \int_0^{t+s} z(\xi)\, d\xi + f(t). \tag{20}$$

Интеграл в (20) проинтегрируем по частям. Имеем

$$\int_a^b [d_s p(t, s)] \int_0^{t+s} z(\xi)\, d\xi = p(t, s) \int_0^{t+s} z(\xi)\, d\xi \Bigg|_a^b - \int_a^b p(t, s)\, z(t+s)\, ds$$

$$= p(t, b) \int_0^{t+b} z(\xi)\, d\xi - \int_a^b p(t, s)\, z(t+s)\, ds.$$

Введем оператор B по формуле

$$Bz(t) = p(t, b) \int_0^{t+b} z(\xi)\, d\xi - \int_a^b p(t, s)\, z(t+s)\, ds. \tag{21}$$

Оператор B как сумма одномерного оператора и интегрального оператора с локально квадратично суммируемым ядром является вполне непрерывным в пространстве D. При этом уравнение (20) можно записать в виде

$$z(t) = Bz(t) + f(t). \tag{22}$$

Непосредственно проверяется, что оператор B^* имеет вид

$$B^* y = \int_t^{\infty} y^*(s-b)\, p(s-b, b)\, ds - \int_a^b y^*(t-s)\, p(t-s, s)\, ds.$$

Далее, всякое решение из пространства K уравнения

$$(23)\qquad y^{*} = B^{*}y$$

является одновременно решением из того же пространства системы (17), в чем легко убедиться дифференцированием. Для уравнений (22) и (23), а значит и для задач (16) и (17) справедлива альтернатива Фредгольма.

Теорема доказана.

4. Установим теперь некоторые простые условия на коэффициенты системы (1), обеспечивающие существование единственного решения задачи (3).

Рассмотрим скалярное уравнение вида

$$(24)\qquad \begin{gathered} \dot{x}(t) \; a(t)\,x(t)+b(t)\,x(t-\tau)+c(t)\,x(t+\tau)+f(t), \\ x(t)=0, \quad -\tau\leq t\leq 0. \end{gathered}$$

Обозначим через D_0^{ε} подпространство пространства D, состоящее из функций $x(t)$ таких, что для некоторого $\varepsilon>0$ и всех целых k

$$t^k x(t)\exp(-\varepsilon t)\to 0,\ t\to\infty,\ k=0, 1,\dots$$

Теорема 4. Пусть функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — непрерывны на полуоси $[0, \infty)$. Пусть существуют такие постоянные M, p и ε, что выполнены условия

$$(25)\qquad |a(t)|+|b(t)|+|c(t)|\leq Mt^p,$$

$$(26)\qquad a(t)-\varepsilon>|b(t)|\exp(-\varepsilon\tau)+|c(t)|\exp(\varepsilon\tau).$$

Пусть функция $f(t)$ непрерывна и $f(t)\in D_0^{\varepsilon}$. Тогда задача (24) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $x(t)\in D_0^{\varepsilon}$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что для задачи (24) в пространстве D_0^{ε} справедлива альтернатива Фредгольма. В самом деле, если $x(t)\in D_0^{\varepsilon}$ есть решение задачи (24), то из уравнения вытекает, что $\dot{x}(t)$ $z(t)\in D_0^{\varepsilon}$. Далее

$$|x(t)|=\left|\int_0^t z(s)\,ds\right|\leq t\cdot\max_{0\leq\xi\leq t}|z(\xi)|,$$

$$|Az(t)|=\left|a(t)\int_0^t z(s)\,ds+b(t)\int_0^{t-\tau} z(s)\,ds+c(t)\int_0^{t+\tau} z(s)\,ds\right|$$

$$\leq Mt^p\{2t\max_{0\leq s\leq t}|z(s)|+\max_{0\leq s\leq t+\tau}|z(s)|\cdot(t+\tau)\}.$$

Отсюда следует, что, если $z(t)\in D_0^{\varepsilon}$, то и $x(t)\in D_0^{\varepsilon}$ и $Az(t)\in D_0^{\varepsilon}$. В силу замечания 3 к теореме 1 для задачи (24) в пространстве D_0^{ε} будет справедлива альтернатива Фредгольма. Поэтому для доказательства существования решения задачи (24) в пространстве D_0^{ε} достаточно доказать единственность решения в этом пространстве.

Пусть $x(t)\in D_0^{\varepsilon}$ есть решение задачи (24) при $f(t)\equiv 0$. Докажем, что $x(t)\equiv 0$.

Введем функцию

$$v(t)=x(t)\exp(-\varepsilon t).$$

Она является решением следующей задачи:

$$\dot{v}(t)=(a(t)-\varepsilon)\,v(t)+b(t)\exp(-\varepsilon\tau)\,v(t-\tau)+c(t)\exp(\varepsilon\tau)\,v(t+\tau), \tag{27}$$
$$v(t)=0,\ -\tau\le t\le 0,\ v(t)\to 0,\ t\to\infty.$$

Решения задачи (27) не могут иметь на полуоси $[0, \infty)$ точек абсолютного положительного максимума или абсолютного отрицательного минимума. В самом деле, в точке максимума $\dot{v}(t)=0$ и в силу условия (26) уравнение (27) нарушается. В силу граничных условий мы получаем отсюда, что $v(t)\equiv 0$. Значит и $x(t)\equiv 0$. Этим теорема доказана полностью.

Замечание 1. Аналогичная теорема справедлива и для скалярной задачи вида

$$\dot{x}(t)=\int_a^b x(t+s)\,d_s p(t, s)+f(t), \tag{28}$$
$$x(t)=0,\ -a\leqq t\leqq 0.$$

Пусть ядро $p(t, s)$ имеет в нуле скачок величины $a(t)$ и выполняются следующие условия:

$$\int_a^b |\,d_s p(t, s)\,|\leqq Mt^n,$$

$$a(t)-\varepsilon>\int_a^{-0}\exp(-\varepsilon s)\,|\,d_s p(t, s)\,|+\int_{+0}^{\infty}\exp(-\varepsilon s)\,|\,d_s p(t, s)\,|.$$

Тогда задача (28) имеет единственное решение $x(t)\in D_0^{\varepsilon}$.

Замечание 2. В случае постоянных коэффициентов $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ условие (26) означает отсутствие мнимых корней у квазиполинома, соответствующего уравнению (24). Это совпадает с предположением Халаная [1] о существовании решения задачи (24) в случае отсутствия мнимых корней у соответствующего квазиполинома.

Рассмотрим теперь общую задачу вида (3). Обозначим через D_2^{ε} подпространство пространства D, состоящее из функций $x(t)$ таких, что для некоторого $\varepsilon>0$ функции

$$t^k x^*(t)\,x(t)\exp(-2\varepsilon t),\ k=0, 1, 2, \ldots,$$

являются интегрируемыми с квадратом на полуоси $[0, \infty)$ и стремятся к нулю при $t\to\infty$.

Под нормой матрицы мы будем понимать корень квадратный из суммы квадратов ее элементов.

Теорема 5. Пусть элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ являются непрерывными функциями t, ограниченными при $0\leqq t<\infty$. Пусть матрица $A(t)$ симметрична и положительно определена, то есть существует постоянная $\alpha>0$ такая, что

$$x^*(t)\,A(t)\,x(t)\geqq \alpha x^*(t)\,x(t). \tag{29}$$

Пусть существует такая постоянная $\varepsilon > 0$, что

(30) $$a-\varepsilon > \sup_{0\le t<\infty} \| B(t)\exp(-\varepsilon\tau) \| + \sup_{0\le t<\infty} \| C(t)\exp(\varepsilon\tau) \| .$$

Пусть $f(t) \in D_2^\varepsilon$. Тогда задача (3) имеет единственное решение $x(t) \in D_2^\varepsilon$.

Доказательство. Как и в теореме 4 нетрудно убедиться в том, что в пространстве D_2^ε будет выполнена альтернатива Фредгольма. Поэтому для доказательства существования решения $x(t) \in D_2^\varepsilon$ нам достаточно установить единственность решения задачи (3) в классе D_2^ε. Пусть $x(t) \in D_2^\varepsilon$ — решение задачи (3) при $f(t) \equiv 0$. Покажем, что $x(t) \equiv 0$. Введем вектор

$$v(t) = x(t)\exp(-\varepsilon t).$$

Тогда $v(t)$ есть решение задачи

(31) $$\dot{v}(t) = (A(t)-\varepsilon)\, v(t) + B(t)\exp(-\varepsilon\tau)\, v(t-\tau) + C(t)\exp(\varepsilon\tau)\, v(t+\tau),$$
$$v(t) \equiv 0,\ t \in [-\tau, 0],\ v(t) \to 0,\ t \to \infty,\ v(t) \in L_2[0, \infty).$$

Умножим уравнение в (31) на $v^*(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до ∞. Учитывая тогда граничные условия для $v(t)$, получим, что

$$\int_0^\infty v^*(t)\,[A(t)-\varepsilon]\, v(t)\, dt \quad - \int_0^\infty v^*(t)\,[B(t)\exp(-\varepsilon\tau)]\, v(t-\tau)\, dt$$
$$- \int_0^\infty v^*(t)\,[C(t)\exp(\varepsilon\tau)]\, v(t+\tau)\, dt.$$

Отсюда, учитывая (29), получим, что

(32) $$(a-\varepsilon)\int_0^\infty v^*(t)\, v(t)\, dt \le \{ \sup_{0\le t<\infty} \| B(t)\exp(-\varepsilon\tau) \|$$
$$+ \sup_{0\le t<\infty} \| C(t)\exp(\varepsilon\tau) \| \} \int_0^\infty v^*(t)\, v(t) dt.$$

В силу условия (30) неравенство (32) возможно только, если

(33) $$\int_0^\infty v^*(t)\, v(t)\, dt = 0.$$

Из (33) в силу непрерывности $v(t)$ следует, что $v(t) \equiv 0$. Но тогда $x(t) \equiv v(t)\exp(\varepsilon t)$ также тождественно равен нулю. Единственность решения задачи (3) в классе D_2^ε установлена.

Этим теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Halanay, A. Systèmes à retardements. Résultats et problèmes. Tagungsbericht der III Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, Berlin, 1965.
2. Мышкис, А. Д., Л. Э. Эльсгольц. Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Усп. мат. наук, **22** (1967), вып. 2, 21—57.
3. Эльсгольц, Л. Э. Качественные методы в математическом анализе. М., 1955.
4. Каменский, Г. А. Вариационные задачи с отклоняющимся аргументом. Пятая научная конференция Фак. физ.-мат. наук, Унив. Дружбы народов. М., 1969.

Носов, В. Р. Об одной задаче, возникающей в теории оптимального регулирования с последствием. Прикл. матем. и механ., **30** (1966), вып. 2, 399—403.

6. Канторович, Л. В., Г. П. Ахилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.
7. Робертсон, А., В. Робертсон. Топологические векторные пространства. М., 1967.

Поступило 29. X. 1969 г.

ВЪРХУ ЕДИН КЛАС ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯВАЩ СЕ АРГУМЕНТ

В. Р. Носов

(Резюме)

За система с отклоняващ се аргумент от вида

$$\dot{x}(t) \quad A(t)\,x(t)+B(t)\,x(t-\tau)+C(t)\,x(t+\tau) \tag{1}$$

се разглеждат задачите върху полуоста и върху цялата ос. Установява се фредхолмовостта на тези задачи и се намира видът на спрегнатата задача. Въз основа на тези резултати се намират няколко прости достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на задачата (1).

Разглеждат се също и по-общи системи на функционално-диференциални уравнения, аналогични на системата (1).

ON A CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEVIATING ARGUMENT

V. R. Nossov

(Summary)

For the following system with deviating argument

$$x(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,x(t-\tau)+C(t)\,x(t+\tau)+f(t) \tag{1}$$

the problems on the half axis and on the whole axis are studied. The alternative of Fredholm for these problems and the class of the adjoint problems have been established. On the basis of these results some sufficient conditions for existence and uniqueness of the solutions of the systems (1) are given. More general systems of functional-differential equations similar to the systems (1) are considered also.