БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIII

ВЪРХУ ЗАВИСИМОСТТА МЕЖДУ ВАРИАЦИЯТА И МОДУЛА НА НЕМОНОТОННОСТ НА ФУНКЦИИТЕ

Борислав Боянов

Ако функцията $f(x)$ е ограничена в $[a, b]$, то неин модул на немонотонност съгласно [1] ще наричаме функцията

$$\mu(f;\, t)=\sup_{|x_1-x_2|\leq t}\ \{\sup_{x_1\leq x\leq x_2}\ [|f(x_1)-f(x)|+|f(x_2)-f(x)|]-|f(x_1)-f(x_2)|\},$$

определена за неотрицателни стойности на $t\leq b-a$.

Нека $\varphi(t)$ е произволна ненамаляваща и непрекъсната в $[0, b-a]$ функция. Да означим с $M(\varphi;\, a, b)$ класа от всички функции, чийто модул на немонотонност не надминава $\varphi(t)$, т. е.

$$M(\varphi;\, a, b)=(f(x)/\mu(f;\, t)\leq\varphi(t)). \tag{1}$$

Известно е, че ако $\omega(t)$ е модулът на непрекъснатост на една функция $f(x)$, от неравенството

$$\omega(t)\leq Kt,\ K>0,$$

следва, че $f(x)$ има ограничена вариация. Какво можем да кажем за вариацията на f, ако модулът на немонотонност $\mu(f;\, t)$ удовлетворява горното неравенство? На този въпрос дава отговор следната

Теорема. Ако редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2}$$

е сходящ, всяка функция от $M(\varphi;\, 0, 1)$ има ограничена вариация. Ако редът (2) е разходящ, може да се намери в $M(\varphi;\, 0, 1)$ функция с неограничена вариация.

Този резултат е непосредствено следствие от следните три леми:

Лема 1. Ако редът

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) \tag{3}$$

е сходящ, всяка функция от $M(\varphi;\, 0, 1)$ има ограничена вариация.

Доказателство. Допускаме, че съществува функция с неограничена вариация $f(x)\in M(\varphi;\, 0, 1)$. Тогава за всяко $C>0$ можем да намерим система от N различни точки $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$, принадлежащи на $[0, 1]$, за които

$$\sum_{i=1}^{N-1} |f(x_i) - f(x_{i+1})| > C.$$

Да означим с n най-малкото цяло положително число, за което $2^n + 1 > N$. Построяваме система от делящи точки $0 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{2^{n+1}} = 1$, така че да съдържа точките x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, и точките

$$y_k = k\frac{1}{2^n}, \ k = 0, 1, \ldots, 2^n.$$

Очевидно е, че са изпълнени неравенствата

$$|\xi_i - \xi_{i+1}| \leqq \frac{1}{2^n}, \ i = 0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1,$$

$$\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} |f(\xi_i) - f(\xi_{i+1})| > C.$$

От определението на $\mu(f; t)$ и от това, че $f(x) \in M(\varphi; 0, 1)$, извеждаме неравенствата

$$|f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)| + |f(\xi_{i-1}) - f(\xi_i)| \leqq |f(\xi_{i+1}) - f(\xi_{i-1})| + \varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right),$$
$$i = 2k - 1, \ k = 1, 2, \ldots, 2^n.$$

Оттук

$$\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} |f(\xi_i) - f(\xi_{i+1})| \leqq \sum_{i=0}^{2^n-1} |f(\xi_{2i}) - f(\xi_{2i+2})| + 2^n\varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Повтаряйки тия разсъждения още n пъти, ще получим

$$\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} |f(\xi_i) - f(\xi_{i+1})| \leqq \sum_{i=0}^{n} 2^i\varphi\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right) = 2\sum_{i=0}^{n} 2^{i-1}\varphi\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right).$$

Редът (3) по предположение е сходящ. Нека означим сумата му с S. Заключаваме, че $C < 2S$ за всяко $C > 0$. Достигнахме до абсурд. Лемата е доказана.

Лема 2. Ако редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n\varphi\left(\frac{1}{3^n}\right) \tag{4}$$

е разходящ, то в $M(\varphi; 0, 1)$ може да се намери функция с неограничена вариация.

Доказателство. Ние ще построим една такава функция като граница на равномерно сходяща редица от функции $\{f_m\}_1^\infty$. Членовете на тая редица определяме по индукция, полагайки

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
&f_1(x)=\begin{cases} 0 & \text{за } \frac{1}{3}\leqq x\leqq\frac{2}{3}, \\ 1 & \text{за } 0\leqq x<\frac{1}{3} \text{ или } \frac{2}{3}<x\leqq 1, \end{cases} \\
&f_m(x)=\begin{cases} f_{m-1}(x) & \text{за } x\in A, \\ f_{m-1}(x)-(-1)^k\varphi\left(\frac{1}{3^m}\right) & \text{за } x\in A_k,\ k=0, 1, \dots, 3^{m-1}-1, \end{cases}
\end{aligned}
$$

където

$$
A_k=\left[\frac{3k+1}{3^m}\quad\frac{3k+2}{3^m}\right],\quad A=[0, 1]\setminus\bigcup_k A_k.
$$

Функцията $f_1(x)$ принадлежи на класа $M(\varphi;\ 0, 1)$. Наистина

$$
\mu(f_1;\ t)=\begin{cases} 0 & \text{за } t<\frac{1}{3}, \\ \varphi\left(\frac{1}{3}\right) & \text{за } t\geqq\frac{1}{3} \end{cases}
$$

Лесно се изчислява и вариацията на $f_1(x)$:

$$
V_0^1 f_1=2\cdot\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{3}\right)=\varphi\left(\frac{1}{3}\right).
$$

f_m е една стъпаловидна функция. За да намерим графиката на f_{m+1}, постъпваме така. Разделяме всяко стъпало на f_m на три равни части и средната затворена част издигаме, съответно спускаме на разстояние $\varphi(1/3^{m+1}$. Вариацията на f_{m+1} се увеличава с $3^m\varphi(1/3^{m+1})$ по отношение на вариацията на f_m. Имаме

$$
V_0^1 f_{m+1}=V_0^1 f_m+3^m\varphi\left(\frac{1}{3^{m+1}}\right).
$$

Оттук

$$
V_0^1 f_{m+1}=\sum_{n=1}^{m+1} 3^{n-1}\varphi\left(\frac{1}{3^n}\right).
$$

Лесно се вижда, че

$$
\mu(f_{m+1},\ t)=\begin{cases} 0 & \text{за } t<\frac{1}{3^{m+1}}, \\ \varphi\left(\frac{1}{3^{m+1}}\right) & \text{за } \frac{1}{3^{m+1}}\leqq t<\frac{1}{3^m}, \\ \mu(f_m;\ t) & \text{за } \frac{1}{3^m}\leqq t. \end{cases}
$$

Тъй като $\mu(f_1;t)\leqq\varphi(t)$, от горната зависимост веднага следва, че

$$
(6) \qquad \mu(f_m;\ t)\leqq\varphi(t),\quad m=2, 3, \dots,
$$

Редицата $\{f_m\}_1^\infty$ е равномерно сходяща. Нека $f(x)$ е нейната граница. Неравенството (6) се запазва и след граничен преход;

$$\mu(f;\, t) \quad \varphi(t).$$

От друга страна, тъй като $V^1 f_m < V_0^1 f$ за всяко цяло положително m, а $V_0^1 f_m$ е парциална сума на един разходящ ред, следва, че $f(x)$ има неограничена вариация. С това лемата е доказана.

При доказателството на формулираната в началото теорема ще ни бъде необходима и следната добре известна лема, която приемаме тук без доказателство.

Лема 3. Нека $\varphi(t)$ е ненамаляваща и непрекъсната в $[0, 1]$ функция. Ако редът (2) е сходящ, тогава е сходящ и всеки ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} K^n \varphi\left(\frac{1}{K^n}\right), \quad K = 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Ако (2) е разходящ, тогава е разходящ и всеки ред (7).

Доказателство на теоремата. Нека редът (2) е сходящ. От лема 3 следва, че и редът (3) е сходящ. Прилагаме лема 1.

Нека редът (2) е разходящ. От лема 3 следва, че и редът (4) е разходящ. Прилагаме лема 2.

Следствие 1. Ако $\varphi(t) = Kt$, $K > 0$, то може да се намери функция с неограничена вариация, принадлежаща на $M(\varphi;\, 0, 1)$.

Това следва от доказаната теорема и от разходимостта на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Непосредствено следствие от нашата теорема е и следният известен резултат:

Следствие 2. Ако $\varphi(t) = Kt^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, $K > 0$, то всяка функция $f(x) \in M(\varphi;\, 0, 1)$ има ограничена вариация.

Наистина редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = K \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha}$$

е сходящ.

Нещата се развиват напълно аналогично, ако разглеждаме произволен затворен интервал $[a, b]$.

Ст. Троянски беше така добър да ми обърне внимание, че конструкцията, описана в лема 2, може да се използва за построяване дори на непрекъсната функция с исканите свойства. Необходимо е само незначително изменение.

Авторът счита за свой приятен дълг да благодари на Бл. Сендов и В. Попов за оказаната помощ.

ЛИТЕРАТУРА

Сендов, Бл. О теоремах П. П. Коровкина для сходимости последовательностей линейных положительных операторов. Доклады АН СССР, **177**, 1967, № 3, 518—520.

Постъпила на 15. XII. 1969 г.

О ЗАВИСИМОСТИ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИИ ОТ ЕЕ МОДУЛЯ НЕМОНОТОННОСТИ

Борислав Боянов

(Резюме)

Каждая монотонная неубывающая функция $\varphi(t)$ определяет множество

$$M(\varphi\,;\,a,\,b). \tag{1}$$

Вариация функции $f \in M(\varphi;\,a,\,b)$ зависит от скорости роста функции $\varphi(t)$. Доказана следующая

Теорема. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2}$$

то каждая функция $f \in M(\varphi;\,0,\,1)$ имеет ограниченную вариацию. Если (2) расходится, то в $M(\varphi\,;\,0,\,1)$ существует функция неограниченной вариации.

ON THE CONNECTION BETWEEN THE VARIATION AND MODULUS OF NON-MONOTONICITY OF A FUNCTION

Borislav Boyanov

(Summary)

Every monotone non-decreasing function $\varphi(t)$ defines a set

$$M(\varphi;\,a,\,b). \tag{1}$$

The variation of the function $f \in M(\varphi;\,a,\,b)$ depends upon the rate of growth of the function $\varphi(t)$. The following theorem is proved:

Theorem. If the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2}$$

converges, then every function $f \in M(\varphi;\,0,\,1)$ has a bounded variation. If (2) is a divergent series, then there exists a function from $M(\varphi;\,0,\,1)$ with unbounded variation.