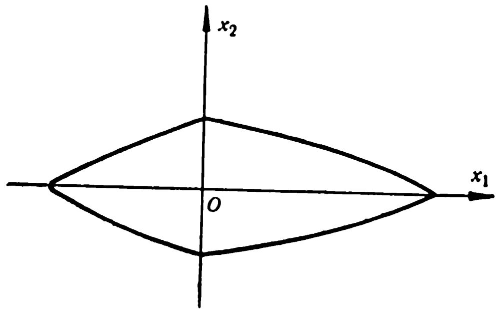
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIII

ОБ ОСТАТОЧНОМ СПЕКТРЕ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рачо Денчев

Рассмотрим область Ω (фиг. 1), граница которой состоит из двух гладких дуг $x_2=\varphi(x_1)\geq 0$ и $x_2=\psi(x_1)\leq 0$ и обладающую следующим свойством (см. [1], с. 296): в каждой точке $x=(x_1, x_2)$ границы $\partial\Omega$ единичная внешняя нормаль $\nu(x)=(\nu_1(x), \nu_2(x))$ удовлетворяет соотношениям

$$|\nu_1(x)|\leq|\nu_2(x)|, \quad x_1\nu_1(x)\geq 0.$$



Фиг. 1

Введем некоторые обозначения. Через $W_2^r(\Omega)$ обозначим* пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^r(\Omega)$ с метрикой $W_2^r(\Omega)$. Пусть

$$A=2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad B=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

---

* $W_2^r(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^r(\Omega)$ — пространства Соболева (см. [1], с. 29 и 34). Они гильбертовы и скалярное произведение в $W_2^r(\Omega)$ определено следующим образом

$$(u, v)_r=\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,dx+\sum_{|\alpha|=r}\int_\Omega (D^\alpha u)(x)\overline{D^\alpha v(x)}\,dx,\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n), |\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n.$$

Через $(.\,.\,.)$ обозначаем скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Определим операторы:

$$A_2:\ \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \ni u \to Au \in L_2(\Omega),$$

$$B_2:\ \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \ni u \to Bu \in L_2(\Omega).$$

Как известно (см., например, [1], с. 176), операторы A_2 и B_2 являются гомеоморфизмами между пространствами $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Следовательно, оператор

$$S_2 = B_2^{-1} A_2$$

отображает гомеоморфно $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ на себя. Цель настоящей работы — доказать наличие остаточного спектра* у S_2. Обозначим через S_0 замыкание S_2 по метрике $L_2(\Omega)$. Можно показать, что S_0 является гомеоморфизмом $L_2(\Omega)$ на себя. Сформулируем некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. Имеет место равенство

$$S_0^* = A_2 B_2^{-1}.$$

Доказательство. Обозначим чрез $G(x;y)$ функцию Грина для оператора B_2. Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$. Тогда $B_2^{-1} f \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и имеем

$$(1) \qquad (A_2 B_2^{-1} f,\ u) = \int_\Omega (A_2 B_2^{-1} f)\bar{u}\, dx = \int_\Omega (B_2^{-1} f)\overline{A_2 u}\, dx$$

$$= \int_\Omega \overline{A_2 u}\, dx \int_\Omega G(x;y) f(y) dy = \int_\Omega f(y)\, dy \int_\Omega G(x;y)\,\overline{(A_2 u(x))} dx$$

$$= \int_\Omega f(y)\, dy \int_\Omega G(y;x)\overline{(A_2 u(x))} dx = \int_\Omega f(y)\,\overline{(B_2^{-1} A_2 u)(y)} dy$$

$$= (f,\ B_2^{-1} A_2 u) = (f,\ S_0 u).$$

Так как $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ и S_0 непрерывен в $L_2(\Omega)$, то из (1) следует лемма 1.

Лемма 2. Существует окрестность точки 3/2, принадлежащая спектру оператора S_2, но не содержащая собственных значений S_2.

Это утверждение следует непосредственно из работ [1, с. 289, 295] и [2].

Лемма 3. Задача

$$(2) \qquad \Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad u/\partial\Omega = 0$$

---

* Остаточным спектром оператора T, действующего в линейном топологическом пространстве L, называется [3] множество комплексных чисел λ, для которых отображение $\lambda I - T$ взаимно однозначно, но $I_m(\lambda I - T) \neq L$.

имеет ненулевое слабое решение из $L_2(\Omega)$, т. е. существует функция $u \in L_2(\Omega)$, такая что для каждого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ выполнено

$$(3) \qquad (u, \square v) = 0.$$

При этом при достаточно малых изменениях* области Ω это свойство сохраняется.

Доказательство этой леммы содержится в [1, с. 302].

Теорема 1. Существует окрестность точки 3/2, каждая точка которой является собственным значением оператора S_0.

Доказательство. Покажем, что если u — слабое решение задачи (2), то оно является собственной функцией оператора S_0, соответствующей собственному значению 3/2. Действительно, равенство (3) можно записать в виде

$$(4) \qquad \left(u, \left(A_2 - \frac{3}{2} B_2\right) v\right) = 0.$$

Обозначим

$$(5) \qquad B_2 v = g.$$

Тогда $g \in L_2(\Omega)$ и

$$(6) \qquad v = B_2^{-1} g.$$

Подставляя (6) в (4), получаем

$$(7) \qquad \left(u, \ A_2 B_2^{-1} g - \frac{3}{2} g\right) = 0.$$

Из (7) и леммы 1 следует

$$(8) \qquad \left(S_0 u - \frac{3}{2} u, \ g\right) = 0.$$

Соотношение (8) справедливо для любого $g \in L_2(\Omega)$, так как (4) справедливо для любого $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и (5) устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Значит, из (8) следует

$$S_0 u - \frac{3}{2} u = 0,$$

т. е. u — собственная функция оператора S_0 с собственным значением 3/2. Так как, согласно лемме 3, существование слабых решений задачи (2) сохраняется при достаточно малых изменениях области Ω, то можно построить собственные функции оператора S_0 с собственными значениями, заполняющими некоторую окрестность точки 3/2. Теорема доказана.

Лемма 4. Существуют A_2^{*-1}, B_2^{*-1} и имеют место равенства

$$(9) \qquad A_2^{*-1} = S_0^{-1}(B_2 + B_2^{-1}), \quad B_2^{*-1} = B_2 + B_2^{-1}$$

---

* Область Ω' называем близкой к Ω, если её граница $\partial\Omega'$ близка к $\partial\Omega$ в смысле равномерной близости функций, задающих поверхность вместе с первыми их производными.

Доказательство. Так как A_2 и B_2 отображают гомеоморфно $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ на $L_2(\Omega)$, то A_2^* и B_2^* существуют и отображают гомеоморфно $L_2(\Omega)$ на $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$. Значит, существуют A_2^{*-1} и B_2^{*-1}. Пусть $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(\Omega)$. Тогда $B_2 v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и $B_2^{-1} v \in \overset{\circ}{W}{}_2^6(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ (см. [1, с. 170]). Следовательно,

$$(10)\qquad f\quad S_0^{-1}(B_2+B_2^{-1})v = S_2^{-1}(B_2+B_2^{-1})v = A_2^{-1}B_2(B_2+B_2^{-1})v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega).$$

Отсюда получаем

$$(11)\qquad A_2 f = v + B_2^2 v.$$

Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$. Из (11)

$$(12)\qquad \int_\Omega (A_2 f)\bar{u}\, dx = \int_\Omega (v + B_2^2 v)\bar{u}\, dx.$$

После интегрирования по частям из (12) получаем

$$(13)\qquad (f, A_2 u) = \int_\Omega v\bar{u}\, dx + \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots\right) dx = (v, u)_2.$$

Подставляя сюда f из (10), получаем

$$(14)\qquad (S_0^{-1}(B_2+B_2^{-1})\, v,\ A_2 u) = (v,\ u)_2.$$

Последнее соотношение мы доказали только для $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^4(\Omega)$ и $u \in \overset{\circ}{W}(\Omega)$. Но так как $\overset{\circ}{W}{}_2^4(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ плотны в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и операторы A_2 и $S_0^{-1}(B_2+B_2^{-1})$ непрерывно отображают $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ на $L_2(\Omega)$, то (13) справедливо при любых $u,\ v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$. Для любого $g \in L_2(\Omega)$ можем определить $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, так чтобы $A_2 u = g$. Тогда из (14) получаем

$$15)\qquad (S_0^{-1}(B_2+B_2^{-1})\, v, g) = (v,\ A_2^{-1} g)_2.$$

Из (15) следует первое соотношение (9). Аналогично можно доказать и второе равенство (9). Лемма 4 доказана.

Докажем основную теорему настоящей работы.

Теорема 2. Существует окрестность точки $3/2$, содержащаяся в остаточном спектре оператора S_2.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}$ пересечение окрестностей определенных в лемме 2 и теореме 1. Покажем, что каждая точка $\mathfrak{D}$ является точкой остаточного спектра оператора S_2. Пусть $\lambda \in \mathfrak{D}$. По теореме 1 λ — собственное значение S_0 и пусть g соответствующая собственная функция. Имеем

$$(16)\qquad S_0 g - \lambda g = 0.$$

Определим функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ из уравнения

$$(17)\qquad B_2 u + B_2^{-1} u - g.$$

Это можно сделать следующим образом: определяем функцию $W \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению

$$B_2 w + iw = g; \tag{18}$$

дальше определяем $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению

$$B_2 v - iv = w; \tag{19}$$

тогда $u = B_2 v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет (17); действительно, так как $w/\partial\Omega = 0$, то, согласно (19),

$$(B_2 v - iv)/\partial\Omega = 0; \tag{20}$$

из (20) и $v/\partial\Omega = 0$ следует $u/\partial\Omega = (B_2 v)/\partial\Omega = 0$; из (18) и (19) следует (17).

Из (16) и (17) следует

$$B_2 u + B_2^{-1} u - \lambda S_0^{-1}(B_2 u + B_2^{-1} u) = 0. \tag{21}$$

Сравнивая (21) и (9), получаем

$$B_2^{*-1} u - \lambda A_2^{*-1} u = 0.$$

Отсюда

$$S_2^* u - \lambda u = 0, \tag{22}$$

т. е. λ — собственное значение оператора S_2^*. С другой стороны, так как $\lambda \in \mathfrak{D}$, то, согласно лемме 2, λ не является собственным значением оператора S_2. Это показывает (см. [3, с. 621]), что λ точка остаточного спектра S_2. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
2. Denčev, R. On the spectrum of a singular integral operator. Изв. Матем. инст., **10**. БАН, 1969. 283—292.
3. Данфорд, Дж., Т. Шварц. Линейные операторы, т. 1. М., 1962.

Поступило 30. XII. 1969 г.

ВЪРХУ ОСТАТЪЧНИЯ СПЕКТЪР НА ЕДИН СИНГУЛЯРЕН ИНТЕГРАЛЕН ОПЕРАТОР

Рачо Денчев

(Резюме)

Разглежда се операторът $S_2 \quad B_2^{-1}A_2$, където

$$A_2:\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)\ni u\to Au\in L_2(\Omega),$$

$$B_2:\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)\ni u\to Bu\in L_2(\Omega),$$

$$A=2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\quad B=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

$W_2^2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ са пространствата на Соболев.

Построена е област Ω, за която операторът S_2 има остатъчен спектър.

ON THE RESIDUAL SPECTRUM OF A SINGULAR INTEGRAL OPERATOR

Račo Denčev

(Summary)

An operator $S_2 \quad B_2^{-1}A_2$ is considered, where

$$A_2:\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)\ni u\to Au\ni L_2(\Omega),$$

$$B_2:\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)\ni u\to Bu\in L_2(\Omega),$$

$$A=2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\quad B=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

$W_2^2(\Omega)$ and $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ are the Sobolev's spaces.

A region Ω is considered, for which the operator S_2 has a residual spectrum.