БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIII

ВЪРХУ РЕАЛИЗАЦИЯТА НА ОПТИМАЛНОТО ЛИНЕЙНО БЪРЗОДЕЙСТВИЕ*

Тодор Гичев

0. Да разгледаме задачата за оптимално бързодействие, както е формулирана в [1]. При предположение, че:

(а) движението на обекта се описва със система линейни диференциални уравнения, записана в матричен вид

$$\dot{x}=Ax+u, \tag{0.1}$$

където фазовата траектория $x(t)$ лежи в n-мерното евклидово пространство E^n, а управляващият параметър u принадлежи на изпъкналия затворен многостен $U\subset E^n$, като при това началото на координатната система принадлежи на U, но не е негов връх;

(б) допустимо управление е всяка частично-непрекъсната функция $u(t)$, $t_0\leqq t\leqq t_1$, със стойности в U, непрекъсната отдясно в точките на прекъсване и непрекъсната в краищата на дефиниционния си интервал,

то измежду всичките допустими уравнения $u(t)$, $t_0\leqq t\leqq t_1$, под въздействието на които управляемият обект преминава от началното състояние $x_0\in E^n$ в началото на координатната система, да се намери онова, което осъществява този преход за най-кратко време.

Множеството от всички допустими управления да означим с D.

За допустимото управление $u(t)$, $t_0\leqq t\leqq t_1$, се казва, че удовлетворява принципа на максимума, ако съществува такова нетривиално решение $\psi(t)$ на спрегнатата система

$$\dot{\psi}(t)=-A^*\psi(t) \tag{0.2}$$

(A^* е транспонираната на A матрица), че за всяко $t\in[t_0, t_1]$ е изпълнено

$$\psi(t)(Ax(t)+u(t))=\max_{u\in U}(\psi(t)(Ax(t)+u)). \tag{0.3}$$

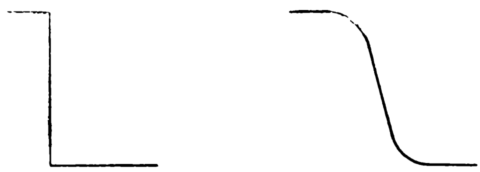
Следното условие е познато като условие за общо положение:

Никой вектор ω, успореден на кой да е ръб на многостена U, не принадлежи на никакво собствено инвариантно относно преобразованието A подпространство.

---

* Тази работа е докладвана и обсъждана в семинара по Теория на апроксимацията с ръководител проф. д-р Бл. Сендов.

Теорема 2.8 от [1, стр. 96]. Нека $u(t)$, $t_0 < t < t_1$, е допустимо управление, привеждащо обекта от зададено начално състояние x_0 в $[0, 0, 0, \ldots, 0]$. За оптималност на управлението $u(t)$ е необходимо, а ако е изпълнено и условието за общо положение и достатъчно, то да удовлетворява принципа на максимума.



а

Фиг. 1

Ако $u(t)$, $t_0 < t < t_1$, е оптимално управление, то е единствено и е частично-постоянна функция, като при това нейните стойности са върхове на многостена U.

При моделирането на оптималното управление се използват релейни елементи. Релейният елемент е един обект, който преработва входния сигнал ξ по формулата $u = \operatorname{sign} \xi$.

Едно от изискванията, които се поставят пред неговата характеристика, е тя да бъде скокообразна функция (фиг. 1).

При техническата реализация на подобни релейни елементи се постига характеристика, повече или по-малко близка до тази, която се изисква, но във всеки случай тя се различава от нея. Сравнение можем да направим на фиг. 1, където на 1, *б* е дадена примерна техническа реализация.

Ето защо съвсем основателно изниква необходимостта да се изследва протичането на моделирания оптимален процес при предположение, че оптималното управление се реализира с помощта на реални релейни елементи.

Поставя се и въпросът да се намерят необходими и достатъчни условия от рода на принципа на максимума, които удовлетворява реалното оптимално управление. Друг естествен въпрос е какво ще бъде отклонението на траекторията, която съответствува на реалното релейно управление от оптималната траектория.

За да може да се отговори на подобни въпроси, необходимо е да се въведе подходящо разстояние за измерване близостта на две управления. Едно такова разстояние трябва да отговаря на следните изисквания:

да бъде дефинирано за функция с различни дефиниционни интервали;

относно това разстояние да бъдат близки не само две функции, приемащи стойности в тясна ивица, успоредна на абсцисната ос, но и две функции, които приемат стойности в тясна ивица, успоредна на ординатната ос (например функциите с графики, дадени на фиг. 1).

Един апарат, който се предлага за изследване на тези въпроси, е хаусдорфовото разстояние.

1. Дефиниция и свойствата на хаусдорфовото разстояние за скаларни функции на една променлива са дадени в [2]. Въпреки че там разглежданията се правят за функции с общ дефиниционен интервал, част от

получените резултати остават в сила и когато интервалите са различни. Ето защо някои от тях тук ще бъдат използвани, без да бъдат отново изказвани.

В [4] се дефинира хаусдорфово разстояние между две комплексни функции на скаларен аргумент с общ дефиниционен интервал.

Тук ще бъде разгледано едно обобщение на тези дефиниции. Ще се дефинира хаусдорфово разстояние между векторни функции на скаларен аргумент с различни дефиниционни интервали, чиито стойности принадлежат на векторно пространство с произволно измерение.

Да означим с F_{Δ} множеството от всички затворени множества в E^{n+1} $(Otx_1x_2\ldots x_n)$, чиито проекции в координатните равнини Otx_i са изпъкнали относно оста Ox_i множества, а проекциите им върху оста Ot съвпадат с интервала Δ и нека $F=\bigcup F_{\Delta}$, където сумирането е по всички затворени интервали Δ.

Дефиниция 1.1. Ако $A\in F$ и $B\in F$, а A_i и B_i са проекциите на A и B в координатните равнини Otx_i, хаусдорфово разстояние между A и B ще наричаме числото

$$R(A, B)=\max\{r(A_1, B_1), \quad , r(A_n, B_n)\},$$

където

$$r(A_i, B_i)=\max\{\max_{a\in A_i}\min_{b\in B_i}\varrho(a, b), \max_{b\in B_i}\min_{a\in A_i}\varrho(a, b)\},$$

а

$$\varrho(a, b)=\varrho(a(a_1, a_2), b(b_1, b_2))=\max\{|a_1-b_1|, |a_2-b_2|\}.$$

Най-напред ще проверим, че така дефинираният функционал действително е разстояние в F.

а) Ако $A\in F_{\Delta'}$, $B\in F_{\Delta''}$ и A съпада с B, тогава A_i ще съвпада с B_i за $1\leq i\leq n$. От свойствата на хаусдорфовото разстояние в едномерния случай следва, че $r(A_i, B_i)=0$ и $R(A, B)=0$.

Нека; обратно, $R(A, B)=0$. Но тогава и $r(A_i, B_i)=0$, $1\leq i\leq n$, и следователно A_i съвпада с B_i, а $\Delta'=\Delta''$. Да допуснем, че A не съвпада с B. Тогава ще съществува точка $a^*\in A$, $a^*=(t^*, a_1^*, \ldots, a_n^*)=(t^*, \bar{a}^*)$, $t^*\in\Delta'$ за която

$$(t^*, a_i^*)\in B_i, \quad a^*\bar{\in} B.$$

Да означим проекциите на a^*, B и B_i в хиперравнината H с уравнение $t=t^*$ с $\bar{a}^*$, B^0 и B_i^0. Тогава в H са изпълнени релациите

$$a_i^*\in B_i^0, \quad \bar{a}^*\bar{\in} B^0.$$

Но H е едно n-мерно пространство, в което съответствието между всяка точка и нейните проекции върху n линейно независими направления е еднозначно обратимо. Следователно горните две релации са противоречиви.

Достигнатото противоречие доказва верността на твърдението, че A съвпада с B.

б) Нека $A\in F$ и $B\in F$. Ще докажем, че

$$R(A, B) \quad R(B, A).$$

Действително

$$R(A, B) = \max\{r(A_1, B_1), \dots, r(A_n, B_n)\}$$
$$= \max\{r(B_1, A_1), \dots, r(B_n, A_n)\} = R(B, A).$$

в) Накрая остава да се провери валидността на неравенството на триъгълника.

Нека $A \in F$, $B \in F$ и $C \in F$. Тогава

$$R(A, C) = \max\{r(A_1, C_1), \dots, r(A_n, C_n)\}$$
$$\leq \max\{r(A_1, B_1) + r(B_1, C_1), \dots, r(A_n, B_n) + r(B_n, C_n)\}$$
$$\leq \max\{r(A_1, B_1), \dots, r(A_n, B_n)\} + \max\{r(B_1, C_1), \dots, r(B_n, C_n)\}$$
$$= R(A, B) + R(B, C).$$

Ако $f(t)$, $t \in \Delta$, е ограничена скаларна функция, под допълнена графика $\bar{f}$ на $f(t)$ се разбира множеството от точките (t, x), за които

$$t \in \Delta, \quad I_f(t) \leq x \leq S_f(t),$$

където $S_f(t)$ и $I_f(t)$ са съответно горната и долната функция на Бер за $f(t)$:

$$S_f(t) = \lim_{\lambda \to 0} \sup_{|t-t'| \leq \lambda} f(t'),$$
$$I_f(t) = \lim_{\lambda \to 0} \inf_{|t-t'| \leq \lambda} f(t').$$

Дефиниция 1.2. Ако функцията $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ е ограничена в интервала Δ, под допълнена графика $\bar{f}$ на $f(t)$ ще разбираме множеството от точките $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, за които $t \in \Delta$, а $(t, x_i) \in \bar{f}_i$, където $\bar{f}_i$ е допълнената графика на функцията $f_i(t)$ в интервала Δ.

Допълнената графика на всяка функция, дефинирана и ограничена в интервала Δ, принадлежи на F_Δ.

Дефиниция 1.3. Хаусдорфово разстояние $R(f, g)$ между две ограничени векторни функции $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ и $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t)$, дефинирани съответно в интервалите Δ' и Δ'', ще наричаме хаусдорфовото разстояние между допълнените им графики:

$$R(f, g) = R(\bar{f}, \bar{g}).$$

С H_Δ^k да означим множеството от ограничените k-мерни векторни функции, дефинирани в крайния интервал Δ, и нека $H^k = \bigcup H_\Delta^k$, където обединението е по всички крайни интервали Δ.

Нека S е съответствие на D в H^k.

Дефиниция 1.4. Съответствието S ще наричаме h-непрекъснато в $u_0 \in H_\Delta^n \cap D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че ако $u \in H_{\Delta'}^n \cap D$, $I \subset \Delta'$ и $R(u_0\, u) < \delta$, то $R(S(u_0), S(u)) < \varepsilon$.

Нека $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, $t \in \Delta = [t_0, t_1]$ е частично-постоянна функция, непрекъсната в краищата на интервала и непрекъсната отдясно в точките на прекъсване $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. Да означим $\theta_0 = t_0$, $\theta_{k+1} = t_1$. Тогава $f(t)$ може да се представи така:

$$f(t)=(a_1^l, a_2^l, \dots, a_n^l), \quad f(t_1)=(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k), \quad t\in[\theta_l, \theta_{l+1}), \quad 0\leqq l\leqq k.$$

За улесняване на по-нататъшното изложение ще дефинираме следните няколко множества:

$$W_1^l(f_i; \delta)=\{\tau, x_i): \tau\in[\theta_l, \theta_{l+1}], \ x_i\in[a_i^l-\delta, a_i^l+\delta]\}, \ l=0, 1, \dots, k;$$

$$W_2^l(f_i; \delta)=\{(\tau, x_i): \tau\in[\theta_l-\delta, \theta_l+\delta], \ x_i\in[\min(f_i(\theta_l-0), f_i(\theta_l+0))-\delta,$$

$$\max(f_i(\theta_l-0), f_i(\theta_l+0))+\delta]\}, \quad l=0, 1, \dots, (k+1);$$

$$W_1(f_i; \delta)=\bigcup_{0\leqq l\leqq k} W_1^l(f_i; \delta),$$

$$W_2(f_i; \delta)=\bigcup_{0\leqq l\leqq k+1} W_2^l(f_i; \delta),$$

$$W(f_i; \delta)=W_1(f_i; \delta)\bigcup W_2(f_i; \delta).$$

Ще бъдат необходими още една група множества:

$$W_1^l(f; \delta)=\{(\tau, x_1, x_2, \dots, x_n): \tau\in[\theta_l, \theta_{l+1}], \ x_i\in[a_i^l-\delta, a_i^l+\delta], \ i=1, 2, \dots, n\},$$

$$W_2^l(f; \delta)=\{(\tau, x_1, x_2, \dots, x_n): \tau\in[\theta_l-\delta, \theta_l+\delta], x_i\in[\min(f_i(x_i-0), f_i(x_i+0))-\delta,$$

$$\max(f_i(x_i-0), f_i(x_i+0))+\delta], [i=1, 2, \dots, n]\},$$

$$W_1(f; \delta)=\bigcup_{0\leqq l\leqq k} W_1^l(f; \delta),$$

$$W_2(f; \delta)=\bigcup_{0\leqq l\leqq k+1} W_2^l(f; \delta),$$

$$W(f; \delta)=W_1(f; \delta)\bigcup W_2(f, \delta).$$

Дефиниция 1.5. Множествата $W(f_i; \delta)$ и $W(f; \delta)$ ще наричаме хаусдорфови δ-околности съответно на $f_i(t)$ и $f(t)$.

Непосредствено от дефиницията следва, че ако една точка $(t, y_1, \dots, y_n)$ принадлежи на хаусдорфовата δ-околност на $f(t)$, точките (t, y_i), $1\leqq i\leqq n$, лежат в хаусдорфовите δ-околности на $f_i(t)$ и обратно — ако (t, y_i), $1\leqq i\leqq n$, принадлежат на хаусдорфовите δ-околности на $f_i(t)$, то $(t, y_1, \dots, y_n)\in W(f; \delta)$.

При предположение, че $\Delta'=\Delta''$, следните две леми са формулирани съответно в [3] и [2]. Но при това изказване доказателството им се запазва.

Лема 1.1 (1 от [3]). Ако $f(t)\in H'_{\Delta'}$, $g(t)\in H'_{\Delta''}$ и хаусдорфовото разстояние между тях е равно на r, а $(t_0, \bar{x})$ принадлежи на допълнената графика на $f(t)$, то в квадрата $K_f(t_0, \bar{x})$

$$t\in[t_0-r, t_0+r], \quad x\in[\bar{x}-r, \bar{x}+r]$$

има точки от допълнената графика на $g(t)$.

Лема 1.2 (5 от [2]). Нека $f(t)\in H_{\Delta'}^1$ и $g(t)\in H_{\Delta''}^1$. Ако за всяко $t'\in\Delta'$ съществува такава точка (τ', x') от допълнената графика $\bar{g}$ на $g(t)$, че $\max\{|t'-\tau'|, |f(t')-x'|\}\leqq\delta$, и за всяко $t''\in\Delta''$ съществува такава точка

(τ'', x'') от допълнената графика $\bar{f}$ на $f(t)$, че $\max\{|t''-\tau''|, |f(t'')-x''|\}\leq\delta$, то $r(f,g)\leq\delta$.

Лема 1.3. Нека $f(t)\in H'_{\Delta'}$, $g(t)\in H'_{\Delta''}$ и $f(t)$ е частично-постоянна функция. Тогава ако $R(f,g)<\delta$, допълнената графика на $g(t)$ се съдържа в $W(f;\delta)$.

Доказателство. Тъй като $R(f;g)<\delta$, то $r(f_i,g_i)<\delta$ за $1\leq i\leq n$. Според лема 1.1, ако $(t,y')\in g_i$, в квадрата $K_{g_i}(t,y_i)$ ще се съдържа точка от допълнената графика на $f_i(t)$. От друга страна, $W(f_i;\delta)$ беше множеството от всички квадрати с център точка от допълнената графика на $f_i(t)$ със страни, равни на 2δ и успоредни на координатните оси.

С това е доказано, че допълнената графика на $g_i(t)$ се съдържа във $W(f_i;\delta)$, а с това е доказана и лемата.

Лема 1.4. Нека $f(t)\in H^1_{\Delta'}$, $g(t)\in H^1_{\Delta''}$ и $\Delta'=[t_0', t_1']\subset[t_0'', t_1'']=\Delta''$. Освен това е изпълнено за $t\in\Delta'$

$$|f(t)-g(t)|\leq\delta,$$

за $t\in[t_0'', t_0']$

$$\max\{|f(t_0')-g(t)|, \ |t-t_0'|\}\leq\delta,$$

за $t\in[t_1', t_1'']$

$$\max\{|f(t_1')-g(t)|, |t-t_1'|\}\leq\delta.$$

Тогава

$$r(f,g)\leq\delta.$$

Доказателство. При доказателството на тази лема ще използваме лема 1.2, затова трябва да проверим дали са изпълнени нейните условия.

По предположение за $t\in\Delta'$

$$|f(t)-g(t)|\leq\delta.$$

Но тогава за $(t, g(t))$ от допълнената графика на $g(t)$ е изпълнено

$$\max\{|f(t)-g(t)|, (t-t)\}=|f(t)-g(t)|\leq\delta.$$

С това е проверена първата половина от предположенията на лема 1.2.

Аналогично за $t\in\Delta'\subset\Delta''$ точката $(t, f(t))$ от допълнената графика на $f(t)$ удовлетворява условието на същата лема.

За $t\in[t_0'', t_0']$ и $(t_0', f(t_0'))$ от допълнената графика на $f(t)$ по предположение е изпълнено

$$\max\{|f(t_0')-g(t)|, |t-t_0'|\}\leq\delta.$$

Аналогично се постъпва и за $t\in[t_1', t_1'']$.

С това доказателството на лемата е завършено.

Лема 1.5. Нека $f(t)\in H^1_{\Delta}$, $\Delta=[t_0, t_1]$, $f(t)$ е частично-постоянна, $t_0=\theta_0$, $t_1=\theta_{k+1}$; $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ са точките на прекъсване и $|\theta_i-\theta_{i+1}|>2\delta$. Тогава, ако $g(t)\in H'_{\Delta'}$, $\Delta\subset[t_0', t_1']=\Delta'$, $|t_0'-t_0|<\delta$, $|t_1'-t_1|<\delta$ и $r(f,g)>\delta$, то съществува точка $t\in\Delta'$, така че $(t, g(t))\bar{\in} W(f;\delta)$.

Доказателство. Да допуснем, че всички точки $(t, g(t))$, $t \in \Delta'$, принадлежат на $W(f; \delta)$.

Нека $t \in \Delta'$. Тъй като $(t, g(t)) \in W(f; \delta)$, а $W(f; \delta)$ е множеството от квадратите с център точки от допълнената графика на $f(t)$ и страни 2δ, успоредни на координатните оси, ще съществува точка от допълнената графика на $f(t)$ (t^*, y), така че

$$\max\{|g(t)-y|, |t-t^*|\} \leq \delta.$$

Да разгледаме сега случая, когато $t \in \Delta$. Тъй като $|\theta_l - \theta_{l+1}| > 2\delta$, то за никое l множествата $W_2^l(f; \delta)$ нямат общи точки.

Възможни са два случая:

а) $t \in (\theta_l + \delta, \theta_{l+1} - \delta)$ за някое l. Тогава по предположение $|f(t)-g(t)| \leq \delta$ и следователно

$$\max\{|f(t)-g(t)|, (t-t)\} \leq \delta;$$

б) t принадлежи на един от полуинтервалите $[\theta_l - \delta, \theta_l)$ или $(\theta_l, \theta_l + \delta]$ за $l = 0, 1, \ldots, (k+1)$, като един от двата е затворен в точката θ_l.

Всички възможни случаи се разглеждат по еднакъв начин.

Нека например $t \in [\theta_l, \theta_l + \delta]$ и $f(\theta_l - 0) < f(\theta_l + 0)$. Сега

$$S_g(\theta_l + \delta) = \lim_{\lambda \to 0} \sup_{|t-t'|} g(t').$$

Тъй като за $t' > \theta_l + \delta$ $g(t') \geq f(t') - \delta$ и $g(t') \leq f(t') + \delta$, то

$$f(\theta_l + \delta) + \delta \geq S_g(\theta_l + \delta) \geq f(\theta_l + \delta) - \delta.$$

Следователно за $t \in [\theta_l, \theta_l + \delta]$

$$|f(t) - S_g(\theta_l + \delta)| \leq \delta,$$

понеже $f(t) = f(\theta_l + \delta)$.

Или и в този случай съществува точка от допълнената графика на $g(t) - (\theta_l + \delta, S_g(\theta_l + \delta))$, така че

$$\max\{|f(t) - s_g(\theta_l + \delta)|, |t - \theta_l - \delta|\} \leq \delta.$$

Прилагайки лема 1.2, заключаваме, че $r(f, g) \leq \delta$, което противоречи на предположението $r(f, g) > \delta$.

Достигнатото противоречие доказва верността на лемата.

2. А сега да преминем към точната формулировка на твърденията, за които беше споменато в началото.

Ако $\psi(t)$ е едно нетривиално решение на уравнението (0.2), да определим $u(t)$, $t \in [t_0, t_1] \setminus \Delta$, от условието

$$\psi(t)u(t) = \max_{u \in U} \psi(t)u. \tag{2.1}$$

Нека съответствието S_ψ на D в H^1 се определя по следния начин:

$$S_\psi(f(t)) = \psi(t)f(t).$$

Теорема 2.1. Съответствието s_ψ е h-непрекъснато в точката $u(t)$.

Доказателство. Да си изберем едно произволно положително число ε. Според дефиниция 1.4, за да докажем теоремата, ще бъде достатъчно да посочим такова $\delta>0$, че винаги, когато за $u^*(t)\in D$ е изпълнено $R(u, u^*)<\delta$, да бъде изпълнено

$$r(S_\psi(u), S_\psi(u^*))<\varepsilon.$$

Според теорема 2.10 от [1] $u(t)$ е частично-постоянна функция, защото се определя от съотношението (2.1). Нека точките и на прекъсване са $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. Към тях да прибавим и краищата на интервала $\Delta-\theta_0=t_0$, θ_{k+1} t_1.

Нека $\delta_1>0$ е толкова малко, че в интервалите $[\theta_l-\delta_1, \theta_l+\delta_1]$ функцията $u(t)$ да няма други точки на прекъсване освен θ_l и $\delta_1<\varepsilon$.

С това δ_1 образуваме множествата $W_1^l(u;\delta_1)$, $W_2^l(u;\delta_1)$ и $W(u;\delta_1)$. Означаваме

$$\bar W(u;\delta_1)= W(u;\delta_1)\cap(U\times[t_0-\delta_1, t_0+\delta_1]),$$

$$\bar W_1^l(u;\delta_1) \quad W_1^l(u;\delta_1)\cap(U\times[\theta_l, \theta_{l+1}]),$$

$$\bar W_2^l(u;\delta_1) \quad W_2^l(u;\delta_1)\cap(U\times[\theta_l-\delta, \theta_l+\delta]),$$

където знакът е употребен за отбелязване на декартово произведение.

С E_l да означим онази стена на многостена U, върху която се достига максимумът на $\psi(t)u$ в точката $t=\theta_l$, $1 \quad l<k$; с E_0 да означим множеството, съставено от един елемент $\{u(t_0)\}$, а с E_{k+1} — от елемента $\{u(t_1)\}$. От всяко E_l, l $0, 1, \ldots, (k+1)$, да изберем по един елемент u_l^0 и да разгледаме функциите

$$G_l(t, u) \quad \psi(t)(u-u_l^0). \tag{2.2}$$

Така дефинираните функции са равномернонепрекъснати в компактното $\bar W(u;\delta_1)$. Следователно за $\varepsilon/4$ съществува $\delta>0$, $\delta\leq\delta_1$, така че когато $(t', u')\in \bar W(u;\delta_1)$, $(t'', u'')\in W(u;\delta_1)$ и $|t'-t''<\delta$, $u'-u''|<\delta$, ще бъде изпълнено за $l=0, 1, \ldots, (k+1)$

$$G_l(t', u')-G_l(t'', u'') \quad 4$$

Като непосредствено следствие от този факт получаваме следната

Лема 2.1. Ако $(t, u')\in \bar W(u;\delta_1)$, $(t, u'')\in \bar W(u;\delta_1)$ и $u'-u''|<\delta$, то $\psi(t)(u'-u'')$ $\varepsilon/4$.

Лема 2.2. Ако $(t, u_l)\in \bar W(u;\delta_1)$, $(\theta_l, u_l)\in \bar W(u;\delta_1)$ и $u_l\in E_l$, а $|t-\theta_l|<\delta$, то

$$|\psi(t)(u_l \quad u_l^0) \quad \frac{\varepsilon}{4}$$

Доказателство. От равномерната непрекъснатост на G_l и предположенията на лемата следва, че

$$|\psi(t)(u_l-u_l^0)-\psi(\theta_l)(u_l-u_l^0) \quad \frac{}{4} \tag{2.3}$$

Но тъй като $u_l\in E_l$ и $u_l^0\in E_l$, то

$$\psi(\theta_l)u_l=\psi(\theta_l)u_l^0 \quad \max_{u\in U}\psi(\theta_l)u.$$

Следователно

$$\psi(\theta_l)(u_l-u_l^0)=0.$$

Тогава от (2.3) следва твърдението на лемата.

Лема 2.3. Ако $(t, u_l')\in \overline{W}(u;\delta_1)$, $(t, u_l'')\in \overline{W}(u;\delta_1)$, $u_l'\in E_l$, $u_l''\in E_l$ и $|t-\theta_l|<\delta$, то

$$|\psi(t)(u_l'-u_l'')|\le\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Доказателство. От лема 2.2 имаме

$$|\psi(t)(u_l'-u_l^0)|\le\frac{\varepsilon}{4},$$

$$|\psi(t)(u_l''-u_l^0)|\le\frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогава

$$|\psi(t)(u_l'-u_l'')|\le|\psi(t)(u_l'-u_l^0)|+|\psi(t)(u_l''-u_l^0)|\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Лема 2.4. Ако за $(t, u)\in \overline{W}(u;\delta_1)$ за някое l, $1\le l\le n$, е изпълнено $|t-\theta_l|<\delta$ и съществува $u_l\in E_l$ така че $|u-u_l|<\delta$, $(\theta_l, u_l)\in \overline{W}(u;\delta_1)$, то $|\psi(t)u-\psi(t)u(t)|\le\varepsilon\cdot\frac{3}{2.2}=\frac{3}{4}\varepsilon.$

Доказателство. От неравенството на триъгълника получаваме

$$|\psi(t)u-\psi(t)u(t)|\le|\psi(t)u-\psi(t)u_l|+|\psi(t)u_l-\psi(t)u(t)|.$$

Но от лема 2.1

$$|\psi(t)(u-u_l)|<\frac{\varepsilon}{4},$$

а

$$|\psi(t)u_l-\psi(t)u(t)|\le 2\cdot\frac{\varepsilon}{4}$$

според лема 2.3, тъй като $u(t)$ е частично-постоянна и по предположение в интервала $[\theta_l-\delta, \theta_l+\delta]$ няма друга точка на прекъсване освен θ_l. Следователно както u_l, така и $u(t)$ принадлежат на E_l.

С това лемата е доказана.

Да преминем към доказателството на теоремата. Ще докажем, че ако за така избраното δ $u^*(t)\in H^n_\psi\cap D$, $\Delta\subset\Delta'=[t_0', t_1']$ и $R(u, u^*)<\delta$, то

$$r(S_\psi(u), S_\psi(u^*))<\varepsilon.$$

При доказателството на горното съотношение ще използваме лема 1.4.

Тъй като $\delta<\delta_1$, то $\overline{W}(u;\delta)\subset\overline{W}(u;\delta_1)$.

Ако вземем произволна точка $(t, u^*(t))$, според лема 1.3 тя ще принадлежи на $\overline{W}(u;\delta)$. Следователно ще са възможни един от двата случая:

1) $(t, u^*(t))\in \overline{W}_1^l(u;\delta)\subset W_1(u;\delta)$. Следователно $|u^*(t)-u(t)|<\delta$. Но тогава според лема 2.1

$$\varphi(t)(u^*(t)-u(t)) \quad \frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon.$$

2) $(t, u^*(t))\in \overline{W}_2^l(u;\delta)\subset W_2(u;\delta)$. Тогава $|t-\theta_l|<\delta$ и

$$u^*(t)\in[\min(u_i(\theta_l-0), u_i(\theta_l+0))-\delta, \max(u_i(\theta_l-0), u_i(\theta_l+0))+\delta].$$

В този случай ще съществува $u_l\in E_l$, така че

$$|\dot{u}_l-u^*(t)|<\delta.$$

2а) При $l=1, 2, \ldots, k$ според лема 2.4 отново получаваме

$$|\varphi(t)(u^*(t)-u(t))|\leq 3.\frac{\varepsilon}{2.2}<\varepsilon.$$

2б) При $l=0$ и $l=k+1$ от равномерната непрекъснатост на $G_0(t, u)$ и $G_{k+1}(t, u)$ имаме за $l=0$

$$\max\{|\varphi(t)u^*(t)-\varphi(t_0)u(t_0)|, |t-t_0|\}<\varepsilon,$$

а за $l=k+1$

$$\max\{|\varphi(t)u^*(t)-\varphi(t_1)u(t_1)|, |t-t_1|\}<\varepsilon.$$

При предположенията за $u(t)$ от началото на параграфа достигаме до следната

Лема 2.5. За всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$, така че за всяко $u^*(t)\in H_{\Delta'}^n\cap D$, $\Delta\subset\Delta'$, за което $R(u, u^*)<\delta$, е изпълнено за $t\in\Delta$

$$\max|\varphi(t)u(t)-\varphi(t)u^*(t)|<\varepsilon,$$

за $t\in[t_0', t_0]$

$$\max\{|\varphi(t_0)u(t_0)-\varphi(t)u^*(t)|, |t-t_0|\}<\varepsilon,$$

и за $t\in[t_1, t_1']$

$$\max\{|\varphi(t_1)u(t_1)-\varphi(t)u(t)|, |t-t_1|\}<\varepsilon.$$

Сега вече верността на теоремата следва от лема 1.4.

Лема 2.6. Нека $u(t)\in H_\Delta^n\cap D$, $\Delta=[t_0, t_1]$, $u(t)$ е частично-постоянна функция, $\bar{u}(t)\in H_{\Delta'}^n\cap D$, $\Delta\subset\Delta'=[t_0', t_1']$ и $R(u, \bar{u})=\delta$. Тогава съществува константа ν, така че както и да продължаваме $u(t)$ като функция $u^*(t)\in H_{\Delta'}^n\cap D$ ($u^*(t)=u(t)$ за $t\in\Delta$), за всяко j, $1\leq j\leq n$, е изпълнено

$$\int_{\Delta'}|u_j^*(t)-u_j(t)|\,dt\leq\nu\delta.$$

Доказателство. Тъй като $R(u, \bar{u})=\delta$, то според лема 1.3 допълнената графика на $u(t)$ ще се съдържа в $W(u;\delta)$. Нека точките на прекъсване на $u(t)$ са $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. Означаваме $\theta_0=t_0$, $\theta_{k+1}=t_1$. При всяко $t\in\Delta'$ точката $(t, \bar{u}(t))$ принадлежи на поне едно от множествата $V_1=\bigcup_{0\leq l\leq k}\overline{W}_1^l$ или $V_2=\bigcup_{0\leq l\leq k+1}W_2^l$. Да означим с τ_1 множеството от онези $t\in\Delta'$, при които

$(t, u(t))$ принадлежи на V_1, а с τ_2 от онези, при които $(t, u(t))$ принадлежи на V_2. Тогава

$$\int_{I'} |u_j(t) - u^*_j(t)|\, dt = \int_{\tau_1} |u_j(t) - u^*_j(t)|\, dt + \int_{\tau_2} |\bar{u}_j(t) - u^*_j(t)|\, dt$$

$$\leqq \delta \int_{\tau_1} dt + (k+2)2M \int_{\theta_l-\delta}^{\theta_l+\delta} dt \leqq \delta(t_1 - t_0) + 4\delta M(k+2) = \delta(4M(k+2) + t_1 - t_0) = \delta\nu.$$

Тук $M = \max_{1 \le i \le n} \max_{u_i \in U_i} |u_i|$, където с U_i е означена проекцията на U върху оста Ox_i.

Трябва да се отбележи, че константата ν зависи само от дължината на интервала Δ, множеството U и броя на скоковете на функцията $u(t)$.

Нека $f(t) \in H^n_\Delta \cap D$. Да означим с $S(f)$ съответствието на D в H^n, което на $f(t)$ съпоставя функцията $g(t)$ по формулата

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \left(x_0^i + \int_{t_0}^{t} (\psi_i(\tau) f(\tau))\, d\tau \right), \tag{2.4}$$

където $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$ са решения на системата (0.1) при $u \equiv 0$ с начални условия $\varphi_i(t_0) = l_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^n$ — решения на спрегнатата система (0.2) при същите начални условия $\psi_i(t_0) = l_i$, а $\{x_0^i\}_{i=1}^n$ е вектор.

С $S_\Delta(f)$ да означим съответствието на D в H^1, определящо се по формулата

$$S_\Delta(f(t)) = \psi(t) A g(t), \tag{2.5}$$

където $g(t)$ се определя от (2.4), $\psi(t)$ има същото значение както в началото на параграфа, а $A = \{a_{ij}\}$ е матрицата на системата (0.1).

Нека $u(t) \in H^n_\Delta \cap D$ е частично-постояннна функция.

Теорема 2.2. Съответствието $S_\Delta(f)$ е h-непрекъснато в $u(t)$.

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. От непрекъснатостта на функцията

$$Q(t) = \psi(t) A \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) x_0^i$$

в точките t_0 и t_1 следва, че за $\varepsilon/4$ съществува $\gamma_1 > 0$, $\gamma_1' < \varepsilon$, така че за всяко $t \in [t_0 - \gamma_1', t_0]$ е изпълнено

$$|Q(t) - Q(t_0)| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{2.6$_1$}$$

а за $t \in [t_1, t_1 + \gamma_1']$ е изпълнено

$$|Q(t) - Q(t_1)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.6$_2$}$$

Ако

$$(2.7)_1 \qquad \mu_1 = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \max_{u \in U} \max_{t_0 - \varepsilon \le t \le t_0} |\psi_i(t)u|, \max_{1 \le i \le n} \max_{u \in U} \max_{t_1 \le t \le t_1 + \varepsilon} |\psi_i(t)u| \right\},$$

а

$$(2.7)_2 \qquad \mu_1' = \max_{\substack{t_0 - \varepsilon \le t \le t_0 \\ t_1 \le t \le t_1 + \varepsilon}} \sum_{l=1}^{n} |\psi_l(t)| \sum_{j=1}^{n} |a_{lj}| \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i^j(t)|,$$

да положим

$$(2.7)_3 \qquad \gamma_1 = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4\mu_1\mu_1'}, \gamma_1' \right\}.$$

Накрая ако

$$(2.8)_1 \qquad \mu_2 = \max_{t \in \Delta} \sum_{l=1}^{n} |\psi_l(t)| \sum_{j=1}^{n} |a_{lj}| \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i^j(t)| \cdot \max_{1 \le i \le n} \sum_{p=1}^{n} |\varphi_i^p(t)|,$$

а $\nu > 0$ е съответното число на $u(t)$, Δ, U според лема 2.6, да изберем

$$(2.8)_2 \qquad \delta = \min \left\{ \gamma_1, \frac{\varepsilon}{4\mu_2\nu} \right\}.$$

Ще докажем, че за така избраното $\delta > 0$, ако $u(t) \in H^n_{\Delta'}$, $\Delta \subset \Delta' = [t_0', t_1']$, $\bar{u}(t)$ е допустима функция и $R(u, \bar{u}) < \delta$, то

$$|S_\Delta(u(t)) - S_\Delta(\bar{u}(t))| < \varepsilon.$$

Съответните на $u(t)$ и $\bar{u}(t)$ чрез S_Δ получаваме от (2.5):

$$S_\Delta(u(t)) = \psi(t) A \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \left(x_0^i + \int_{t_0}^{t} (\psi_i(\tau) u(\tau)) d\tau \right) \right],$$

$$S_\Delta(\bar{u}(t)) = \psi(t) A \left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \left(x_0^i + \int_{t_0'}^{t} (\psi_i(\tau) u(\tau)) d\tau \right) \right].$$

Нека $t \in [t_0', t_0]$. Тогава

$$|S_\Delta(u(t_0)) - S_\Delta(u(t))| = \left| \psi(t_0) A \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) x_0^i - \psi(t) A \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \left(x_0^i + \int_{t_0'}^{t} (\psi_i(\tau) u(\tau)) d\tau \right) \right|$$

$$\le \left| \psi(t_0) A \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) x_0^i - \psi_i(t) A \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) x_0^i \right| + \left| \psi(t) A \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \int_{t_0'}^{t} (\psi_i(\tau) \bar{u}(\tau)) d\tau \right|.$$

Първото събираемо според избора на δ не надминава $\varepsilon/4$, а за второто от (2.7) имаме

$$\left|\psi(t)A\sum_{1}^{n}{}'\varphi_i(t)\int_{t_0'}^{t}(\psi_i(\tau)\bar{u}(\tau))d\tau\right| \quad \left|\sum_{l=1}^{n}{}'\psi_l(t)\sum_{j=1}^{n}{}'a_{lj}\sum_{i=1}^{n}{}'\varphi_i(t)\int_{t_0'}^{t}(\psi_i(\tau)\bar{u}(\tau))d\tau\right|$$

$$\leq\sum_{l=1}^{n}|\psi_l(t)|\sum_{j=1}^{n}a_{lj}|\sum_{1}^{n}|\varphi_i(t)|\int_{t_0'}^{t_0}|\psi_i(\tau)\bar{u}(\tau)\ d\tau\leq\mu_1\mu_1'\delta\leq\frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Окончателно за $t\in[t_0', t_0]$ получаваме

$$|S_A(u(t_0))-S_A(\bar{u}(t))|\leq\frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Следователно

$$\max\{|S_A(u(t_0))-S_A(\bar{u}(t))|,\ |t-t_0|\}\leq\max\left\{\frac{\varepsilon}{2},\ \varepsilon\right\}=\varepsilon. \tag{2.9}$$

За $t\in\Delta=[t_0, t_1]$

$$|S_A(u(t))-S_A(\bar{u}(t))|=\left|\psi(t)A\sum_{i=1}^{n}{}'\varphi_i(t)\left[x_0^i+\int_{t_0}^{t}(\psi^i(\tau)\bar{u}(\tau))d\tau\right]\right.$$

$$\left.-\psi(t)A\sum_{i=1}^{n}{}'\varphi_i(t)\left[x_0^i+\int_{t_0}^{t}(\psi_i(\tau)u(\tau))d\tau\right]\right|$$

$$\left|\sum_{l=1}^{n}{}'\psi_l(t)\sum_{j=1}^{n}{}'a_{lj}\sum_{i=1}^{n}{}'\varphi_i^j(t)\int_{t_0'}^{t}(\psi_i(\tau)\bar{u}(\tau))d\tau\right|$$

$$+\left|\sum_{l=1}^{n}{}'\psi_l(t)\sum_{j=1}^{n}{}'a_{lj}\sum_{i=1}^{n}{}'\varphi_i^j(t)\int_{t_0}^{t}\psi_i(\tau)(\bar{u}(\tau)-u(\tau))d\tau\right|.$$

Използвайки (2.6), (2.7) и (2.8), заключаваме, че за $t\in\Delta$ е в сила

$$|S_A(u(t))-S_A(\bar{u}(t))|<\varepsilon. \tag{2.10}$$

За $t\in[t, t_1']$

$$|S_A(u(t))-S_A(u(t_1))|\geq\left|\psi(t)A\sum_{i=1}^{n}{}'\psi_i(t)x_0^i-\psi(t_1)A\sum_{i=1}^{n}{}'\psi_i(t_1)x_0^i\right|$$

$$+\left|\sum_{l=1}^{n}{}'\psi_l(t)\sum_{j=1}^{n}{}'a_{lj}\sum_{i=1}^{n}{}'\varphi_i^j(t)\int_{t_0'}^{t_0}(\psi_i(\tau)\bar{u}(\tau))d\tau\right|$$

$$+\left|\sum_{l=1}^{n}{}'\psi_l(t)\sum_{j=1}^{n}{}'a_{lj}\sum_{i=1}^{n}{}'\varphi_i^j(t)\int_{t_0}^{t_1}\psi_i(t)(\bar{u}(\tau)-u(\tau))d\tau\right|$$

$$+\left|\sum_{l=1}^{n}\psi_l(t)\sum_{j=1}^{n}a_{lj}\sum_{1}^{n}\varphi_i^j(t)\int_{t_1}^{t}(\psi_i(\tau)u(\tau))\,d\tau\right|.$$

Използвайки отново (2.6), (2.7) и (2.8), като вземем пред вид избора на δ, достигаме до

$$\max\{|S_A(u(t_1))-S_A(\bar{u}(t))\ ,\ |t-t_1|\}<\varepsilon. \tag{2.11}$$

От съотношенията (2.9), (2.10) и (2.11) получаваме твърдение, което ще използваме при доказателството на теорема 2.4 и затова ще го формулираме като

Лема 2.7. При предположенията на теорема 2.2 за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$, така че ако $\bar{u}(t)\in H^n_{A'}\cap D$, $A\subset A'$, $R(u,\bar{u})$ δ, то е изпълнено за $t\in A$

$$|S_A(u(t))-S_A(\bar{u}(t))|\leq\varepsilon,$$

за $t\in[t_0', t_0]$

$$\max\{|S_A(u(t_0))-S_A(u(t))|,\ |t-t_0|\}$$

за $t\in[t_1, t_1']$

$$\max\{|S_A(u(t_1))-S_A(u(t))|,\ |t-t_1|\}\quad\varepsilon.$$

Сега от лема 1.4 получаваме

$$r(S_A(u),\ S_A(\bar{u}))\quad\varepsilon.$$

С това теоремата е доказана.

Аналогично се доказва за $u(t)$ от теорема 2.2 и

Теорема 2.3. Съответствието $S(f)$ е h-непрекъснато в $u(t)$.

С $S_H(f)$ да означим съответствието на D в H^1, което се определя по формулата

$$S_H(f(t))=S_\varphi(f(t))+S_A(f(t))=\varphi(t)f(t)+\varphi(t)Ag(t).$$

За $u(t)\in H^n_A\cap D$, изпълняващо условието на теорема 2.2, е вярна

Теорема 2.4. Съответствието $S_H(f)$ е h-непрекъснато в $u(t)$.

Доказателство. Нека ε е произволно положително число.

За $\varepsilon/2$ според лема 2.5 съществува $\delta_1>0$, така че когато $u^*(t)\in H^n_{A'}\cap D$, $A\subset A'$ и $R(u,u^*)<\delta_1$, да бъде изпълнено за $t\in A$

$$|S_\varphi(u(t))-S_\varphi(u^*(t))\quad\frac{\varepsilon}{2},$$

за $t\in[t_0', t_0]$

$$\max\{|S_\varphi(u(t_0))+S_\varphi(u^*(t))|,\ |t_0-t|\}\quad\frac{\varepsilon}{2},$$

за $t\in[t_1, t_1']$

$$\max\{|S_\varphi(u(t_1))-S_\varphi(u^*(t))|,\ |t-t_1|\}\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

От друга страна, също за $\varepsilon/2$ според лема 2.7 съществува $\delta_2>0$, така че когато $u^*(t)\in H^n_{\Delta'}\cap D$, $\Delta\subset$ и $R(u,u^*)<\delta_2$, да бъде изпълнено за $t\in\Delta$

$$|S_A(u(t))-S_A(u^*(t))|\leq\frac{\varepsilon}{2},$$

за $t\in[t_0', t_0]$

$$\max\{|S_A(u(t_0))-S_A(u^*(t))|,\ |t-t_0|\}\leq\frac{\varepsilon}{2},$$

за $t\in[t_1, t_1']$

$$\max\{|S_A(u(t_1))-S_A(u^*(t))|,\ |t-t_1|\}\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

Да означим $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогава ако $u^*(t)\in H^n_{\Delta'}\cap D, \Delta\subset\Delta', R(u,u^*)<\delta$ ще бъде изпълнено за $t\in\Delta$

$$|S_H(u(t))-S_H(u^*(t))|=|S_\nu(u(t))+S_A(u(t))-S_\nu(u^*(t))-S_A(u^*(t))|$$
$$\leqq|S_\nu(u(t))-S_\nu(u^*(t))|+|S_A(u(t))-S_A(u^*(t))|\leq\varepsilon,$$

за $t\in[t_0', t_0]$

$$\max\{|S_H(u(t_0))-S_H(u^*(t))|,\ |t_0-t|\}$$
$$=\max\{|S_\nu(u(t_0))+S_A(u(t_0))-S_\nu(u^*(t))-S_A(u^*(t))|,\ |t-t_0|\}$$
$$\leq\max\{|S_\nu(u(t_0))-S_\nu(u^*(t))|+|S_A(u(t_0))-S_A(u^*(t))|,\ |t-t_0|\}$$
$$\leq\max\{|S_\nu(u(t_0))-S_\nu(u^*(t))|,\ |t-t_0|\}$$
$$+\max\{|S_A(u(t_0))-S_A(u^*(t))|\ |t-t_0|\}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Аналогично се доказва, че и за $t\in[t_1, t_1']$

$$\max\{|S_H(u(t_1))-S_H(u^*(t))|,\ |t_1-t|\}\leq\varepsilon.$$

Сега вече твърдението на теоремата следва от лема 1.4.

Да направим едно приложение на получените резултати. Нека $u(t)\in H^n_\Delta\cap D$ е оптималното управление, което привежда обекта, движещ се по закона (0.1), от точката x_0 в началото на координатната система за най-кратко време. Както беше споменато в началото на работата, според известни резултати $u(t)$ е частично-постоянна функция, а съответната траектория се дава с (2.4) при $f(t)=u(t)$. Процесът $(u(t), x(t))$ удовлетворява принципа на максимума (0.3).

Според теорема 2.3 управление $u^*(t)$, $t\in\Delta'$, $\Delta\subset\Delta'$, хаусдорфово близко до $u(t)$, ще приведе x_0 в момента t_1' в хаусдорфово близка на началото околност и ще удовлетворява заедно с $x^*(t)$ хаусдорфово близък принцип на максимума — теорема 2.4.

3. Тук ще се разгледат твърдения, които в известен смисъл ще бъдат обратни на резултатите, получени в предния параграф.

Нека $u(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, е оптималното управление, което привежда обекта от началното състояние x_0 в началото на координатната система, а $x(t)$

е съответната траектория. С $\psi(t)$ да означим решението на системата (0,2), което съответствува на $u(t)$ по принципа на максимума (0.3).

Навсякъде в този параграф ще предполагаме изпълнено условието за общо положение.

Теорема 3.1. За всяко $\eta_0>0$, $\eta_0<T_0$, където T_0 е произволно избрано и фиксирано положително число, съществува $\varepsilon>0$, така че за всяко допустимо управление $u(t)$, $t\in[t_0, t_1+\eta]$, $\eta<T_0$, привеждащо x_0 в началото и удовлетворяващо за всяко $t\in[t_0, t_1+\eta]$ условието

$$(3.1)\qquad \psi(t)u(t) \quad \max_{u\in U}\psi(t)u \quad \varepsilon,$$

е изпълнено $\eta\leq\eta_0$.

Доказателство. Ако допуснем противното, тогава ще съществува η_0, $0<\eta_0^*<T_0$, така че за всяко $\varepsilon>0$ ще съществува допустимо управление $u_\varepsilon(t)$, $t\in[t_0, t_1+\eta_\varepsilon]$, $\eta_\varepsilon<T_0$, привеждащо x_0 в началото, за което е изпълнено (3.1), но $\eta_0^*<\eta_\varepsilon$.

По предположение, тъй като $u(t)$ е оптималното управление, в интервала $[t_0, t_1]$ ще бъде в сила

$$(3.2)\qquad \psi(t)u(t)=\max_{u\in U}\psi(t)u.$$

Нека $x_\varepsilon(t)$, $t\in[t_0, t+\eta_\varepsilon]$, е съответната на $u_\varepsilon(t)$ траектория. Тогава според лема 2.5 ([1]) можем да напишем равенствата

$$\psi(t_1)x(t_1)-\psi(t_0)x(t_0) \quad \int_{t_0}^{t_1}(\psi(t)u(t))dt,$$

$$\psi(t_1)x_\varepsilon(t_1)-\psi(t_0)x_\varepsilon(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}(\psi(t)u_\varepsilon(t))dt,$$

Но $x(t_1)=0$, а $x(t_0) \quad x_\varepsilon(t_0)=x_0$. Тогава след изваждане на първото от горните равенства от второто получаваме

$$\psi(t_1)x_\varepsilon(t_1) \quad \int_{t_0}^{t_1}(\psi(t)u_\varepsilon(t))dt-\int_{t_0}^{t_1}\psi(t)u(t)dt.$$

Като вземем пред вид (3.1), достигаме до

$$(3.3)\qquad \psi(t_1)x_\varepsilon(t_1)>-\varepsilon(t_1-t_0).$$

От друга страна,

$$\psi(t_1+\eta_\varepsilon)x_\varepsilon(t_1+\eta_\varepsilon)-\psi(t_1)x_\varepsilon(t_1)=\int_{t}^{t_1+\eta_\varepsilon}(\psi(t)u_\varepsilon(t))dt.$$

Но $x_\varepsilon(t_1+\eta_\varepsilon)=0$ и от (3.1) получаваме

$$\psi(t_1)x(t_1) = -\int_{t_1}^{t_1+\eta_\varepsilon} (\psi(t)u_\varepsilon(t))dt \leq \int_{t_1}^{t_1+\eta_\varepsilon} \max_{u\in U} \psi(t)u\,dt + \varepsilon\eta_\varepsilon < -\int_{t_1}^{t+\eta_0^*} \max_{u\in U} \psi(t)u + \xi T_0,$$

тъй като $\eta_0 < \eta_\varepsilon < T_0$ и $\max\limits_{u\in U} \psi(t)u > 0$,

Или заедно с (3.3)

$$-\varepsilon(t_1-t_0) \geq \psi(t_1)x_\varepsilon(t_1) < -\int_{t_1}^{t_1+\eta_0^*} \max_{u\in U} \psi(t)u\,dt + \varepsilon T_0,$$

$$\int_{t_1}^{t_1+\eta_0^*} \max_{u\in U} \psi(t)u\,dt \leq \varepsilon(t_1 - t_0 + T_0).$$

Тъй като ε е произволно положително число, а $\max\limits_{u\in U} \psi(t)u \geq 0$, то за $t\in[t_1, t_1+\eta_0^*]$ получаваме $\max\limits_{u\in U} \psi(t)u \equiv 0$.

Но това противоречи на условието за общо положение.

С това теоремата е доказана.

По-нататъшните разглеждания ще направим при допълнителното предположение, че U е паралелепипедът

$$U = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \colon a_i \leq u_i \leq b_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ако отново точките на прекъсване на оптималното управление $u(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, са $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, означаваме $\theta_0 = t_0$ и $\theta_{k+1} = t_1$. При направеното предположение за U в интервалите $[\theta_l, \theta_{l+1})$ функциите $u_i(t)$ са частично-постоянни.

Нека $\eta^* > 0$ е толкова малко, че интервалите $[\theta_l - \eta^*, \theta_l + \eta^*]$ при всеки две последователни стойности на l нямат общи точки и в интервалите $[t_0 - \eta^*, t_0]$ и $[t_1, t_1+\eta^*]$ никоя от функциите $\psi_i(t)$ не се анулира.

Теорема 3.2. Ако $u_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, се определят еднозначно от условието за максимума

$$\psi_i(t)u_i(t) = \max_{a_i \leq u_i \leq b_i} \psi_i(t)u_i$$

във всички точки $t\in[t_0, t_1]$ с изключение на собствените им точки на прекъсване, за всяко $\delta > 0$, $\delta < \eta^*$, съществува $\varepsilon > 0$, така че ако $u^*(t)$, $t\in[t_0, t_1+\eta]$, е допустимо управление, привеждащо x_0 в началото на координатната система и удовлетворяващо за $i = 1, 2, \ldots, n$ условието

$$\psi_i(t)u_i^*(t) \geq \max_{a_i \leq u_i \leq b_i} \psi_i(t)u_i - \frac{\varepsilon}{n} \tag{3.4}$$

за всяко t от дефиниционната област на $u^*(t)$, то

$$R(u, u^*) \leq \delta.$$

Доказателство. Ако допуснем противното, ще съществува $\delta_0 > 0$, $\delta_0 < \eta^*$, така че за всяко $\varepsilon > 0$ ще съществува допустимо управление $u_\varepsilon(t)$, привеждащо x_0 в началото, за което е изпълнено (3.4), но $R(u_\varepsilon, u) > \delta_0$.

Според теорема 3.1. за $\delta_0>0$ съществува $\varepsilon_0>0$, така че за всички допустими управления $u^*(t)$, $t\in[t_0, t_1+\eta]$, $x^*(t_0)=x_0$, $x^*(t_1+\eta)=0$, $\eta<\eta^*$, за които

(3.5)
$$\psi(t)u^*(t)\geq\max_{u\in U}\psi(t)u-\varepsilon_0,$$

ще бъде изпълнено $\eta<\delta_0$.

По-нататък ще избираме $\varepsilon<\varepsilon_0$. Да дадем на ε редица от стойности $\varepsilon=1/k$, където $k>1/\varepsilon_0$.

По дефиниция $R(u, u_k)>\delta_0$ означава, че за поне едно i, $1\leq i\leq n$, $r(u_k^i, u^i)>\delta_0$.

Тъй като n е крайно число, можем да изберем подредица $\{u_l\}_1^\infty$, така че за едно и също i да бъде изпълнено $r(u_l^i, u^i)>\delta_0$ при $l\to\infty$.

Да си построим множеството $\bar{W}(u^i;\delta_0)$. Според лема 1.5, тъй като $r(u_l^i, u^i)>\delta_0$, за всяко l ще съществува $t_l\in[t_0, t_1+\eta_l]$, така че

$$(t_l, u_l^i(t_l))\in W(u^i;\delta_0).$$

Да означим с $V=[t_0, t_1+\eta^*]/\bigcup_l(\theta_l-\delta_0, \theta_l+\delta_0)$, където сумирането е по точките на прекъсване на $u_i(t)$. Функцията $\psi_i(t)$ не се анулира във V. Следователно съществува константа $L>0$, така че за $t\in V$

(3.6)
$$|\psi_i(t)|>L.$$

Но t_l ще принадлежи на V. В точката t_l е вярно (3.4) с $\varepsilon=1/p$, $p\geq l$,

(3.7)
$$\psi_i(t_l)u_l^i(t_l)\geq\max_{a_i\leq u_i\leq b_i}\psi_i(t_l)u_i-\frac{1}{n}\frac{1}{p}$$

Ако $\lambda_i=\operatorname{sign}\psi_i(t_l)$, то $\lambda_i\psi_i(t_l)>0$. Тогава от (3.7) получаваме

$$\lambda_i u_l^i(t_l)\geq\frac{\lambda_i\psi_i(t_l)}{\lambda_i\psi_i(t_l)}\max_{a_i\leq u_i\leq b_i}\lambda_i u_i-\frac{\lambda_i}{n\psi_i(t_l)}\frac{1}{p}$$

Или

$$\lambda_i u_l^i(t_l)-\max_{a_i\leq u_i\leq b_i}\lambda_i u_i\geqq-\frac{1}{np\lambda_i\psi_i(t_l)}\geqq-\frac{1}{npL}=-\frac{1}{p}\sigma.$$

Но

$$\lambda_l u_l^i(t_l)-\max_{a_i\leq u_i\leq b_i}\lambda_i u_i<-\delta_0$$

и $-\delta_0>-\sigma/p$. Следователно $p<\sigma/\delta_0$. Но по предположение $p\to\infty$. Достигнатото противоречие доказва верността на теоремата.

Твърдението на теорема 3.2 е, че в случая, когато U е паралелепипед, при известни допълнителни предположения, ако едно управление удовлетворява близък принцип на максимума във вида (3.4), това управление е хаусдорфово и близко до оптималното.

Накрая бих искал да благодаря на проф. д-р Бл. Сендов за вниманието към тази работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский, В. Г. Математические методы оптимального управления. М., 1969.
3. Сендов, Бл. Некоторые вопросы теории приближения функции и множеств в хаусдорфовой метрике. Успехи матем. наук, **24** (1969), вып. 3, 141—178.
3. Сендов, Бл., В. Попов. О некоторых свойствах хаусдорфовой метрики. Mathematica (Cluj), 8 (31), 1966, № 1, 163—172.
4. Boyanov, B. Supplement to the paper of Lupas and Müller. Aequationes mathematicae, 1970 (под печат).

Постъпила на 17. IV. 1970 г.

О РЕАЛИЗАЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Тодор Гичев

(Резюме)

Реализация оптимального управления в случае задачи линейного оптимального управления как ступенчатой функции оказывается невозможной. На практике реализуется функция более или менее близкая к оптимальному управлению.

Вот почему возникает вопрос об исследовании хода процесса под воздействием действительно реализующегося управления и его отклонения от оптимального процесса.

После использования хаусдорфова расстояния для измерения отклонения двух функций, в статье доказывается, что управление, близкое к оптимальному по Хаусдорфу, удовлетворяет хаусдорфову близкому принципу максимума (теорема 2.4), а соответствующая ему траектория — близка к оптимальной по Хаусдорфу (теорема 2.3).

В последней части работы приводится пример, в котором условие удовлетворения управлением хаусдорфову близкому принципу максимума является достаточным для близости этого управления к оптимальному по Хаусдорфу (теорема 3.2).

ON THE REALIZATION OF THE TIME OPTIMAL LINEAR CONTROL

Todor Gičev

(Summary)

The problem of the linear optimal control cannot be solved by means of step functions. In practice we construct a function which is more or less near to the optimal control.

For this reason we naturally face the problem to examine the process performance influenced by the control actually realized and its deviations from the optimal process.

Measuring the deviation of the two functions under consideration by means of Hausdorff distance we prove that a control near to the optimal one in the sense of Hausdorff satisfies a maximum principle in Hausdorff sense (Theorem 2.4). The trajectory of the control is near to the optimal one again in the sense of Hausdorff (Theorem 2.3).

Finally an example is given which shows that if a control satisfies such a maximum principle, then this control is near to the optimal one in the sense of Hausdorff (Theorem 3.2).