БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ   ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ НА ОБЛАСТЯХ С ГРАНИЦЕЙ

Рачо Денчев

Существенным спектром оператора T, действующего в линейном топологическом пространстве $\mathfrak{G}$ и определенного на плотном в $\mathfrak{G}$ множестве, называем множество комплексных чисел λ, для которых оператор $T-\lambda I$ (I — единичный оператор) не является нетеровым.

Обозначим через E_n вещественное евклидовое пространство размерности n. Пусть функция $a(x, \xi)$ определена при всех $x, \xi \in E_n$, $\xi \neq 0$, положительно однородна по ξ степени нуль и достаточно гладка по x и ξ.

Определим сингулярный интегральный оператор

$$(1)\qquad \hat{A}: L_2(E_n) \ni u \to \hat{A}u = F^{-1}_{\xi\to x} a(x,\xi) F_{x\to\xi} u$$
$$= (2\pi)^{-n} \int_{E_n} e^{ix\xi} a(x,\xi)\tilde{u}(\xi)d\xi \in L_2(E_n),$$

где

$$F_{x\to\xi} u = \tilde{u}(\xi) = \int_{E_n} e^{-ix\xi} u(x)dx.$$

Интеграл в (1) существует, так как $a(x,\xi)\tilde{u}(\xi) \in L_2(E_n)$ в силу свойств функции $a(x,\xi)$. Функция $a(x,\xi)$ называется символом оператора $\hat{A}$.

Пусть Ω область в E_n. Обозначим через P_Ω оператор продолжения вне области Ω

$$P_\Omega \quad L_2(\Omega) \ni u(x) \to (P_\Omega u)(x) = \begin{Bmatrix} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \overline{\in} \Omega \end{Bmatrix} \in L_2(E_n)$$

и через R_Ω оператор сужения на Ω

$$R_\Omega \quad L_2(E_n) \ni u(x) \to (R_\Omega u)(x) = u(x) \in L_2(\Omega), \quad x \in \Omega.$$

Будем изучать существенный спектр оператора

$$A = R_\Omega \hat{A} P_\Omega.$$

Мы воспользуемся необходимым и достаточным условием нетеровости сингулярных интегральных операторов, содержащимся в [1]. Приведем соответствующие результаты из [1] (гл. III, § 2).

Пусть E_n разбито на конечное число замкнутых областей Ω_i, $i=1,\ldots,N$, не пересекающихся между собой во внутренних точках, а граница $\partial\Omega_i$ каждой области состоит из непересекающихся замкнутых поверхностей типа Ляпунова и не содержит бесконечно удаленной точки. Пусть $\hat{A}_i$ сингулярные интегральные операторы с символами $a_i(x,\xi)$. Рассмотрим оператор

$$\sum_{i=1}^{N}\hat{A}_i P_{\Omega_i} R_{\Omega_i}. \tag{2}$$

Пусть x_0 — точка границы, принадлежащая областям Ω_i и Ω_j (каждая граничная точка принадлежить лишь двум областям). Проведем в точке x_0 единичные нормали к границе: $n^i_{x_0}$ — направленную внутрь области Ω_i, и $n^j_{x_0}$ — направленную внутрь Ω_j. Перенесем $n^i_{x_0}$ и $n^j_{x_0}$ в начало координат $\xi=0$. Концы их отметят на единичной сфере Σ две точки. Соединим эти точки всевозможными полуокружностями l_{x_0}. Если $a_i(x_0,\xi)$ и $a_j(x_0,\xi)$ не равны нулю ни при каких ξ, то определим величину

$$d^{l x_0}_{x_0}=\left\{\arg\frac{a_i(x_0,\xi)}{a_j(x_0,\xi)}\right\}_{l x_0},$$

где в правой части равенства находится изменение величины в фигурных скобках, когда ξ пробегает полуокружность l_{x_0}.

В случае $n>2$ все пути гомотопны и $d^{l x_0}_{x_0}$ не зависит от l_{x_0}. Общее значение $d^{l x_0}_{x_0}$ обозначим через d_{x_0}.

В случае $n=2$ имеется два класса негомотопных путей и мы получаем два числа: $d^+_{x_0}$ и $d^-_{x_0}$.

В случае $n=1$ обозначим

$$d_{x_0}=\arg\frac{a_i(x_0,1)}{a_j(x_0,1)}-\arg\frac{a_i(x_0,-1)}{a_j(x_0,-1)}$$

В [1] доказано следующее утверждение:

Т е о р е м а 1 (Симоненко). Для того, чтобы оператор (2) был нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы:

1) при любом i $a_i(x,\xi)\neq 0$ при любом $x\in\Omega_i$ и $\xi\in\Sigma$;

2) для точек x, принадлежащих границе, $|d_x|<\pi$ ($|d^{\pm}_x|<\pi$).

Для применения этой теоремы к изучению существенного спектра оператора A докажем следующую лемму:

Л е м м а. Оператор $A-\lambda I$ нетеров тогда и только тогда, когда нетеров оператор

$$B=I\Pi_{E_n\setminus\Omega}+(\hat{A}-\lambda I)\Pi_\Omega : L_2(E_n)\to L_2(E_n),$$

где $\Pi_\Omega=P_\Omega R_\Omega$.

Доказательство. Установим сначала, что $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ и $\mathrm{Ker}\,B$ одновременно конечномерны. Обозначим

$$J:\ L_2(\Omega)\ni u\to\hat{u}=P_\Omega u-(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u\in L_2(E_n).$$

Преобразования J и R_Ω устанавливают взаимооднозначное соответствие между $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ и $\operatorname{Ker}B$. Действительно, $Ju\in\operatorname{Ker}B$, если $u\in\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$, так как

$$BJu=\Pi_{E_n\setminus\Omega}[P_\Omega u-(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u]+(\hat{A}-\lambda I)\Pi_\Omega[P_\Omega u-(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u]$$

$$=-\Pi_{E_n\setminus\Omega}(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u+(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u-(\hat{A}-\lambda I)\Pi_\Omega(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u$$

$$=(1-\Pi_{E_n\setminus\Omega})(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u=\Pi_\Omega(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u=0.$$

Точно так же $R_\Omega\hat{u}\in\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ при $\hat{u}\in\operatorname{Ker}B$. Действительно, из

$$\Pi_{E_n\setminus\Omega}\hat{u}+(\hat{A}-\lambda I)\Pi_\Omega\hat{u}=0$$

следует

$$R_\Omega\Pi_{E_n\setminus\Omega}\hat{u}+R_\Omega(\hat{A}-\lambda I)\Pi_\Omega\hat{u}=0$$

и, значит,

$$R_\Omega(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega R_\Omega\hat{u}=0.$$

Кроме того, легко видеть, что

$$R_\Omega Ju=u,\quad JuR_\Omega\hat{u}=\hat{u}.$$

если $u\in\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ и $\hat{u}\in\operatorname{Ker}B$. Таким образом взаимооднозначное соответствие между $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$ и $\operatorname{Ker}B$ установлено.

Таким же образом можно показать, что коразмерности множеств значений операторов $A-\lambda I$ и B одновременно конечни.

Покажем, что $\operatorname{Im}(A-\lambda I)$ и $\operatorname{Im}B$ одновременно замкнуты. Пусть, например, замкнуто $\operatorname{Im}(A-\lambda I)$. Пусть $g_k\in\operatorname{Im}B$, $g_k\to g$. Покажем, что $g\in\operatorname{Im}B$. Существуют $\hat{u}_k\in L_2(E_n)$ такие, что $B\hat{u}_k=g_k$. Пусть $u_k=R_\Omega\hat{u}_k$. Тогда из $\Pi_{E_n\setminus\Omega}\hat{u}_k+(\hat{A}-\lambda I)\Pi_\Omega\hat{u}_k=g_k$ следует $R_\Omega(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u_k=R_\Omega g_k\to R_\Omega g$. Так как $\operatorname{Im}R_\Omega(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega$ замкнуто, то $R_\Omega g\in\operatorname{Im}R_\Omega(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega$, т. е. существует $u\in L_2(\Omega)$ такое, что $R_\Omega(A-\lambda I)P_\Omega u=R_\Omega g$. Пусть

$$\hat{u}=Tu=P_\Omega u-(A-\lambda I)P_\Omega u.$$

Тогда

$$B\hat{u}=-\Pi_{E_n\setminus\Omega}(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u+(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u-(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega R_\Omega(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u$$

$$=P_\Omega R_\Omega(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u-(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega R_\Omega(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega u=P_\Omega R_\Omega g-(\hat{A}-\lambda I)P_\Omega R_\Omega g$$

$$=(I-\Pi_{E_n\setminus\Omega})g-(\hat{A}-\lambda I)T\Pi_\Omega g=g-Bg.$$

Значит,

$$B(\hat{u}+g)=g$$

и, следовательно, $g\in \operatorname{Im} B$, что надо было доказать. Лемма доказана.

К оператору B можно применить теорему 1. Пространство E_n в случае разбито на две части: Ω и $E_n\diagdown\Omega$. Соответствующие символы равны $a(x,\xi)-\lambda$ и 1. Для величины d_{x_0} получаем

$$d_{x_0}^{l_{x_0}}(\lambda)=\{\arg[a(x_0,\xi)-\lambda]\}_{l_{x_0}}$$

при $n\geqq 2$ и

$$d_{x_0}(\lambda)=\arg[a(x_0,1)-\lambda]-\arg[a(x_0,-1)-\lambda]$$

при $n=1$.

Из теоремы 1 следует, что оператор B не будет нетеровым тогда и только тогда, когда нарушается хотя бы одно из условий теоремы, т. е. когда $a(x,\xi)-\lambda=0$ или $d_{x_0}^{(\lambda)}\geqq\pi$ ($d_{x_0}(\lambda)\leqq-\pi$) для некоторого x_0 на границе Ω. Таким образом получаем

Теорема 2. Существенный спектр оператора A состоит из значений функции $a(x,\xi)$ при $x\in\Omega$, $\xi\in\Sigma$ и из тех точек λ, для которых $d_{x_0}(\lambda)\geqq\pi$ ($d_{x_0}(\lambda)\leqq-\pi$) при некотором x_0 на границе Ω.

Пример 1. Рассмотрим оператор

$$Q:\ L_2[0,1]\ni u(x)\to h(x)u(x)+\int_0^1\frac{Q(x,t)}{x-t}u(t)dt,$$

где $h(x)$ и $Q(x,t)$ имеют непрерывные первые производные. Этот оператор изучался в [2]. Запишем Q в виде

$$Q=A+K,$$

где

$$A:\ L_2[0,1]\ni u(x)\to h(x)u(x)+q(x)\int_0^1\frac{u(t)}{x-t}dt,\quad q(x)=Q(x,x),$$

и

$$K:L_2[0,1]\ni u(x)\to\int_0^1\frac{Q(x,t)-Q(x,x)}{x-t}u(t)dt.$$

Легко видеть, что K — вполне непрерывный оператор. Следовательно операторы Q и A имеют одинаковый существенный спектр. Пусть

$$\hat{A}:L_2(-\infty,\infty)\ni u(x)\to h(x)u(x)+q(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)}{x-t}dt.$$

Тогда

$$A = R_\Omega \hat{A} P_\Omega,$$

где $\Omega = (0, 1)$. Для символа оператора A получаем

$$a(x, \xi) = h(x) + i\pi q(x) \operatorname{sgn} \xi.$$

Множество значений $a(x, \xi)$ для $x \in (0, 1)$, $|\xi| = 1$ состоит из двух кривых:

$$M_1N_1 = \{z: \ z = h(x) + i\pi q(x), \quad 0 \leqq x \leqq 1\},$$

$$M_2N_2 = \{z: \ z = h(x) - i\pi q(x), \quad 0 \leqq x \leqq 1\}.$$

Граница области Ω в этом случае составлена из двух точек, 0 и 1, так что

$$d_{x_0}(\lambda) = |\arg[h(0) + i\pi q(0) - \lambda] - \arg[h(0) - i\pi q(0) - \lambda]|,$$

если $x_0 = 0$ и

$$d_{x_0}(\lambda) = |\arg[h(1) + i\pi q(1) - \lambda] - \arg[h(1) - i\pi q(1) - \lambda]|,$$

если $x_0 = 1$.
Точки λ, для которых $|d_{x_0}(\lambda)| \geqq \pi$, заполняют два прямолинейных отрезка M_1M_2 и N_1N_2, где

$$M_1 = h(0) + i\pi q(0), \ M_2 = h(0) - i\pi q(0), \ N_1 = h(1) + i\pi q(1), \ N_2 = h(1) - i\pi q(1).$$

Таким образом существенный спектр оператора Q состоит из точек криволинейного четырехугольника $M_1N_1M_2N_2$. Это совпадает с результатом [2], полученным при помощи теории нормированных колец.

Пример 2. Пусть $n \geq 2$, Ω ограниченная область в E_n с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через $G(x; y)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ функцию Грина задачи

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f, \quad u/_{\partial\Omega} = 0.$$

Рассмотрим оператор [4—6]

$$S: \ \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega) \ni u(x) \to u(x) + \int_\Omega G(x; y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}(y) dy,$$

где $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ пространства Соболева [3]. Обозначим через S_0 замыкание S по метрике $L_2(\Omega)$. Можно доказать, что S_0 представляется в виде

$$S_0 = A + K,$$

где K вполне непрерывный оператор,

$$A = R_\Omega \hat{A} P_\Omega,$$

$$\hat{A}: L_2(E_n) \ni u(x) \to au(x) + b \int\limits_{E_n} \frac{\chi(x-y)}{r^n} u(y)dy \in L_2(E_n),$$

$$\chi(x-y) = n\frac{(x_1-y_1)^2}{r^2} - 1,$$

a и b — константы, зависящие от n. Так как K вполне непрерывный оператор, то операторы S_0 и A имеют одинаковый существенный спектр. Нетрудно подсчитать, что оператор $\hat{A}$ имеет символ

$$a(x, \xi) = 1 + \xi_1^2 |\xi|^{-2}.$$

Применяя теорему 2, получаем, что существенный спектр оператора S_0 заполняет отрезок [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Симоненко, И. Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений. I. — Известия АН СССР, Сер. матем., 29, 1965, № 3, 567—586; Новый общий метод исследования линейных уравнений, II. — № 4, 757—782.
2. Schwartz, J. Some results on the spectra and spectral resolutions of a class of singular integral operators. — Commun. Pure and Appl. Math., 15, 1962, 75—90.
3. Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
4. Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики. — Известия АН СССР, Сер. матем., 18, 1954, № 1, 3—50.
5. Александрян, Р. А. Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева. — Тр. Моск. матем. об-ва, 9 1960, 455—505.
6. Денчев, Р. Т. О спектре одного оператора. — Доклады АН СССР, 126, 1959, № 2, 259—262.

Поступило 14. II. 1970 г.

СЪЩЕСТВЕН СПЕКТЪР НА СИНГУЛЯРНИ ИНТЕГРАЛИ НА ОБЛАСТИ С ГРАНИЦА

Рачо Денчев

(*Резюме*)

Разглеждат се сингулярни интегрални оператори в пространството $L_2(\Omega)$, където Ω е област в n-мерното евклидово пространство с граница $\partial\Omega$. Намира се същественият спектър на такъв оператор в термините на неговия символ. Полученият общ резултат се прилага за два конкретни оператора.

ESSENTIAL SPECTRUM OF SINGULAR INTEGRALS ON DOMAINS WITH A BOUNDARY

Račo Denčev

(*Summary*)

Singular integral operators in $L_2(\Omega)$ are considered where Ω is a domain in the n-dimensional Euclidean space with a boundary $\partial\Omega$. The essential spectrum of such an operator is found by means of its symbol. An application for determining the essential spectrum of two concrete operators is given.