БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ВЪРХУ КОНГРУЕНЦИИТЕ ОТ ПРАВИ В ТРИМЕРНО ПРОСТРАНСТВО С АБСОЛЮТ ДВЕ РЕАЛНИ ТОЧКИ И ЕДНА РЕАЛНА РАВНИНА, МИНАВАЩА ПРЕЗ ЕДНАТА ОТ ТЯХ

Адриян Борисов

Пространството A_2^1 е подпространство на тримерното проективно пространство P_3. Абсолютът му се състои от две реални точки E_3, E_4 и една реална равнина ε, минаваща през едната от тях. Той не е симетричен и автодвойнствен.

В тази работа, следвайки общата проективна теория на конгруенциите от прави, като използваме метода на външните форми на Картан, построяваме каноничен репер на конгруенция от прави в A_2^1. Правим и някои приложения.

§ 1. ИНФИНИТЕЗИМАЛНИ ПРЕОБРАЗУВАНИЯ И УРАВНЕНИЯ НА СТРУКТУРАТА

В пространството A_2^1 действува група от преобразувания G_2^1, която се състои от всички колинеации, запазващи абсолюта на пространството. Произволна колинеация от G_2^1 има вида

$$
\begin{aligned}
&\varrho x_1' = (a_3 + a_5 - a_2)x_1 + a_1 x_2,\\
&\varrho x_2' = a_2 x_1 + (a_4 + a_5 - a_1)x_2,\\
(1)\qquad &\varrho x_3' = a_3 x_1 + a_4 x_2 + a_5 x_3,\\
&\varrho x_4' = a_6 x_1 + a_7 x_2 + a_8 x_4.
\end{aligned}
$$

Ясно е, че групата G_2^1 е седемпараметрична.

Избираме семейство от репери по начина, даден в [1]: върховете A_3, A_4 съвпадат с неподвижните точки E_3, E_4, а равнината ε има тангенциални координати

$$\varepsilon = (A_4, A_1 + A_3, A_2 + A_3).$$

Инфинитезималните преобразувания на върховете на репера определяме с

$$dA_i = \omega_i^j A_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{2}$$

където ω_i^j са линейни диференциални форми на параметрите на групата и удовлетворяват уравненията на структурата

(3) $$D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j], \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Специалният избор на семейството от репери и абсолютът на пространството налагат следните осем връзки между Пфафовите форми:

(4) $$\omega_3^1 = \omega_3^2 = \omega_3^4 = 0, \quad \omega_4^1 = \omega_4^2 = \omega_4^3 = 0,$$
$$\omega_1^1 = \omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^2, \quad \omega_2^2 = \omega_2^3 + \omega_3^3 - \omega_2^1.$$

От (3) и (4) получаваме в явен вид структурните уравнения на пространството A_2^1:

(5) $$D\omega_1^2 = [\omega_1^3 - \omega_2^3 + \omega_2^1, \omega_1^2], \quad D\omega_1^3 = [\omega_1^3 - \omega_2^3, \omega_1^2],$$
$$D\omega_1^4 = [\omega_1^3 + \omega_3^3 - \omega_1^2 - \omega_4^4, \omega_1^4] + [\omega_1^2 \omega_2^4],$$
$$D\omega_2^1 = [\omega_1^2 + \omega_2^3 - \omega_1^3, \omega_2^1], \quad D\omega_2^3 = [\omega_2^3 - \omega_1^3, \omega_2^1],$$
$$D\omega_2^4 = [\omega_2^3 + \omega_3^3 - \omega_2^1 - \omega_4^4, \omega_2^4] + [\omega_2^1 \omega_1^4],$$
$$D\omega_3^3 = 0, \quad D\omega_4^4 = 0.$$

Семейството от репери $A_1A_2A_3A_4$ е също седемпараметрично.

§ 2. ПОЛУКАНОНИЧЕН РЕПЕР НА КОНГРУЕНЦИЯТА

Да означим с $M_2 = M_2(u, v)$ произволна конгруенция в A_2^1. Произволна права $p \in M_2$ се определя от две свои точки, чиито координати са функции на параметрите u, v. От семейството от репери, описано в § 1, разглеждаме онези репери, за които върховете A_1 и A_2 са определящи точки на правата p. Семейството от репери се стеснява значително. Получава се ново семейство от репери от нулев ред.

Като диференцираме аналитичната права (A_1A_2), съответствуваща на геометричната права A_1A_2, получаваме

(6) $$d(A_1A_2) = (\omega_1^3 + \omega_2^3 + 2\omega_3^3 - \omega_1^2 - \omega_2^1)(A_1A_2)$$
$$+ \omega_1^3(A_3A_2) + \omega_1^4(A_4A_2) + \omega_2^3(A_1A_3) + \omega_2^4(A_1A_4).$$

Когато правата p е неподвижна, $du = dv = 0$ и диференциалът $d(A_1A_2)$ е пропорционален на (A_1A_2). Следователно

(7) $$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_2^4 = 0.$$

Обратно, ако са изпълнени равенствата (7),

$$d(A_1A_2) = (\omega_1^3 + \omega_2^3 + 2\omega_3^3 - \omega_1^2 - \omega_2^1)(A_1A_2).$$

Това показва, че правата p е фиксирана и $du = dv = 0$.

От направените разсъждения идваме до извода, че формите ω_1^3, ω^1 ω_2^3, ω_2^4 съдържат само диференциалите du, dv на главните параметри u, v Наричат се главни диференциални форми от нулев ред. Те са четири на брой, а базисът им се състои само от двете форми du, dv. Следователно между тях съществуват две линейни зависимости, които написваме във вида

$$\omega_1^4 = a\omega_1^3 + b\omega_2^3, \quad \omega_2^4 = b'\omega_1^3 + c\omega_2^3. \tag{8}$$

Коефициентите a, b, b', c зависят от главните и вторичните параметри Те определят първа диференциална околност на правата p на конгруенцията. Изборът, който направихме, означава, че за нов базис се избират формите ω_1^3, ω_2^3.

Когато правата p е фиксирана, менят се само вторичните параметри и тогава ще използваме символа за диференциране δ, а съответните значения на ω_i^j ще означаваме с π_i^j.

За вариациите на главните диференциални форми намираме

$$\begin{aligned}
\delta\omega_1^3 &= (\omega_2^3 - \omega_1^3)\pi_1^2,\\
\delta\omega_1^4 &= \omega_1^4(\pi_3^3 - \pi_4^4 - \pi_1^2) + \omega_2^4\pi_1^2,\\
\delta\omega_2^3 &= (\omega_1^3 - \omega_2^3)\pi_2^1,\\
\delta\omega_2^4 &= \omega_2^4(\pi_3^3 - \pi_4^4 - \pi_2^1) + \omega_1^4\pi_2^1.
\end{aligned} \tag{9}$$

Като използваме (9), с непосредствена проверка се убеждаваме, че квадратичната форма

$$\varphi = \omega_1^3\omega_2^4 - \omega_1^4\omega_2^3 \tag{10}$$

е относителна инвариантна форма, защото

$$\delta\varphi = \varphi(\pi_3^3 - \pi_4^4 - \pi_1^2 - \pi_2^1).$$

От (10), като вземем пред вид (8), получаваме

$$\varphi = b'(\omega_1^3)^2 + (c-a)\omega_1^3\omega_2^3 - b(\omega_2^3)^2. \tag{10'}$$

По-нататък ще изясним геометричната същност на (10).

Диференцираме външно системата (8) и прилагаме известната лема на Картан [3]. Получаваме

$$\begin{aligned}
da + a(\omega_4^4 - \omega_3^3) + b\omega_2^1 - b'\omega_1^2 &= x_1\omega_1^3 + x_2\omega_2^3,\\
db + b(\omega_4^4 + \omega_1^2 - \omega_3^3 - \omega_1^3 - \omega_2^1) + (a-c)\omega_1^2 &= x_2\omega_1^3 + x_3\omega_2^3,\\
db' + b'(\omega_4^4 + \omega_2^1 - \omega_3^3 - \omega_2^3 - \omega_1^2) + (c-a)\omega_2^1 &= y_1\omega_1^3 + y_2\omega_2^3,\\
dc + c(\omega_4^4 - \omega_3^3) + b'\omega_1^2 - b\omega_2^1 &= y_2\omega_1^3 + y_3\omega_2^3.
\end{aligned} \tag{11}$$

При фиксирана права p равенствата (11) приемат вида

$$
\begin{aligned}
\delta a &= a(\pi_3^3-\pi_4^4)+b'\pi_1^2-b\pi_2^1,\\
\delta b &= b(\pi_3^3+\pi_2^1-\pi_1^2-\pi_4^4)+(c-a)\pi_1^2,\\
\delta b' &= b'(\pi_3^3+\pi_1^2-\pi_2^1-\pi_4^4)+(a-c)\pi_2^1,\\
\delta c &= c(\pi_3^3-\pi_4^4)+b\pi_2^1-b'\pi_1^2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

От (12) е ясно, че можем така да изберем вторичните параметри, че да получим

$$
b=0, \quad b'=0. \tag{13}
$$

Нека u, v са функции на някакъв параметър t. Когато параметърът t се мени, правата p описва рой от прави $M_1=M_1(t)$, принадлежащ на конгруенцията M_2. В общия случай роят M_1 изобщо не е развиваем. Когато е развиваем, върху конгруенцията M_2 има линия C, която се явява обвивка на правите на роя. Тази линия е централната линия на роя. Можем да я представим с

$$
M=\lambda A_1+\mu A_2, \tag{14}
$$

където A_1 и A_2 са известни функции на параметъра t, а $\lambda=\lambda(t)$ и $\mu=\mu(t)$ са функции, които могат да бъдат намерени. За да бъде линията $M(t)$ централна линия на развиваемия рой M_1, трябва dM да бъде линейна комбинация само на точките A_1 и A_2. Тогава от

$$
\begin{aligned}
dM = {} & [d\lambda+\lambda(\omega_1^3+\omega_3^3-\omega_1^2)+\mu\omega_2^1]A_1+[d\mu+\mu(\omega_2^3+\omega_3^3-\omega_2^1)+\lambda\omega_1^2]A_2\\
&+(\lambda\omega_1^3+\mu\omega_2^3)A_3+(\lambda\omega_1^4+\mu\omega_2^4)A_4
\end{aligned}
$$

получаваме равенствата

$$
\begin{aligned}
\lambda\omega_1^3+\mu\omega_2^3&=0,\\
\lambda\omega_1^4+\mu\omega_2^4&=0,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

които, съобразени с (8), приемат вида

$$
\begin{aligned}
\lambda\omega_1^3+\mu\omega_2^3&=0,\\
(a\lambda+b'\mu)\omega_1^3+(b\lambda+c\mu)\omega_2^3&=0.
\end{aligned}
\tag{15'}
$$

Получените равенства са уравненията на развиваемите роеве на конгруенцията M_2. Ако от тях изключим параметрите λ, μ, получаваме точно $\varphi=0$. Следователно анулирането на квадратичната форма φ дава развиваемите роеве на конгруенцията.

Необходимо и достатъчно условие за съществуване на нетривиално решение на хомогенната система (15) е

$$
\begin{vmatrix}
\lambda & \mu\\
a\lambda+b'\mu & b\lambda+c\mu
\end{vmatrix}=0.
$$

Като развием горната детерминанта, получаваме

$$
b\lambda^2+(c-a)\lambda\mu-b'\mu^2=0. \tag{16}
$$

Квадратното уравнение (16) показва, че в общия случай върху всяка права на конгруенцията съществуват две забележителни точки, през които минават централните линии на развиваемите роеве на конгруенцията. Те се наричат фокуси на правата p. Ако използваме дискриминантата на квадратното уравнение (16)

$$\Delta=(c-a)^2+4bb', \tag{17}$$

можем да направим класификация на правите на конгруенцията:

а) ако $\Delta>0$, върху правата p има два различни реални фокуса и правата се нарича хиперболична;

б) ако $\Delta=0$, върху правата p има един реален фокус и правата се нарича параболична;

в) ако $\Delta<0$, върху правата p има два комплексно-спрегнати фокуса и правата се нарича елиптична.

Отсега нататък ще разглеждаме само двуфокусни конгруенции. За тях е изпълнено

$$\Delta\neq 0. \tag{17'}$$

Да се върнем към направените нормировки (13). От (16) е ясно, че те означават, че точките A_1 и A_2 са избрани за фокуси на правата p.

Обратното е също вярно. Нека A_1 и A_2 са фокуси на правата p. Като заместим $\lambda_1=1$, $\mu_1=0$; $\lambda_2=0$, $\mu_2=1$ в (16), веднага получаваме (13). Така доказахме следната

Т е о р е м а 1. Необходимото и достатъчно условие точките A_1 и A_2 да са фокуси на правата p на конгруенцията M_2 е $b=b'=0$.

При изменението на главните параметри фокусите A_1 и A_2 описват повърхнини, които се наричат съответно първа и втора фокална повърхнина.

С определянето на точките A_1 и A_2 закрепването на върховете на репера $A_1A_2A_3A_4$ завърши. Всички върхове геометрично са напълно определени. Полученият репер наричаме полуканоничен. Аналитично се определя с формулите

$$\begin{aligned}
da+a(\omega_4^4-\omega_3^3)&=x_1\omega_1^3+x_2\omega_2^3,\\
(a-c)\omega_1^2&=x_2\omega_1^3+x_3\omega_2^3,\\
(c-a)\omega_2^1&=y_1\omega_1^3+y_2\omega_2^3,\\
dc+c(\omega_4^4-\omega_3^3)&=y_2\omega_1^3+y_3\omega_2^3;
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\delta a+a(\pi_4^4-\pi_3^3)&=0,\\
\delta c+c(\pi_4^4-\pi_3^3)&=0;
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\omega_1^4=a\omega_1^3,\quad \omega_2^4=c\omega_2^3, \tag{20}$$

$$\pi_1^2=0,\quad \pi_2^1=0. \tag{21}$$

Формите ω_1^2, ω_2^1 са главни диференциални форми от първи ред. От (19) непосредствено следва, че

(22) $$I=\frac{a}{c}$$

е абсолютна инварианта. Това е единствената инварианта от първи ред на правата p на конгруенцията. Нейното геометрично тълкуване е просто. Разглеждаме допирателните равнини към първата и втората фокална повърхнина на конгруенцията. Те имат съответно тангенциални координати

$$\eta_{A_1}=(A_1A_2A_3)+a(A_1A_2A_4),$$
$$\eta_{A_2}=(A_1A_2A_3)+c(A_1A_2A_4).$$

Тогава

(23) $$\delta=(A_1A_2A_3,\ A_1A_2A_4,\ \eta_{A_1},\ \eta_{A_2})=\frac{a}{c}.$$

За асимптотичните линии върху първата и втората фокални повърхнини получаваме съответно уравненията

(24) $$x_1(\omega_1^3)^2-x_3(\omega_2^3)^2=0,$$
$$-y_1(\omega_1^3)^2+y_3(\omega_2^3)^2=0.$$

От тях намираме:

1. Конгруенцията M_2 е тогава и само тогава W-конгруенция, когато

(25) $$x_1y_3-x_3y_1=0.$$

2. Конгруенцията M_2 е тогава и само тогава V-конгруенция, когато

(26) $$x_1y_3+x_3y_1=0.$$

Ще докажем следната

Теорема 2. Системата (20) е в инволюция и определя конгруенцията M_2 с произвол на две функции на два аргумента.

Доказателство. Имаме $n=2$ аргумента и $s=2$ линейно независими уравнения на Пфаф. Ковариантната система

(27) $$[da+a(\omega_4^4-\omega_3^3),\ \omega_1^3]+[(a-c)\omega_1^2,\omega_2^3]=0,$$
$$[(c-a)\omega_2^1,\omega_1^3]+[dc+c(\omega_4^4-\omega_3^3),\omega_2^3]=0$$

съдържа $s_1=2$ независими квадратични уравнения, в които участвуват $q=4$ нови линейно независими диференциални форми. Понеже $q=s_1+s_2$ следва, че $s_2=2$ и за числото на Картан получаваме $Q=s_1+2s_2=6$. От (18) се вижда, че новите форми се изразяват посредством $N=6$ нови величини x_i, y_i, $i=1, 2, 3$. Тъй като $Q=N$, системата (20) е в инволюция и широтата на нейното решение е $s_2=2$ функция на два аргумента.

§ 3. РОЕВЕ, ПРИНАДЛЕЖАЩИ НА КОНГРУЕНЦИЯТА M_2

Произволен рой M_1, принадлежащ на конгруенцията M_2, се задава посредством някаква линейна връзка между базисните форми ω_1^3, ω_2^3:

$$\omega_2^3 = f\omega_1^3. \tag{28}$$

Тук $f = f(u, v)$ е произволна функция. За всяко f се получава точно един рой, принадлежащ на конгруенцията.

Нека $M = \lambda A_1 + \mu A_2$ е произволна точка върху правата p на роя. Допирателната равнина в точката M има тангенциални координати

$$\eta_M = (\lambda + f\mu)(A_1 A_2 A_3) + (a\lambda + cf\mu)(A_1 A_2 A_4). \tag{29}$$

Върху правата p в общия случай съществуват две точки, за които допирателната равнина η_M минава през неподвижните точки A_3 и A_4. Те се определят от квадратното уравнение

$$a\lambda^2 + (a + c)f\lambda\mu + cf^2\mu^2 = 0 \tag{30}$$

и имат представянето

$$\begin{aligned} N_1 &= fA_1 - A_2, \\ N_2 &= cfA_1 - aA_2. \end{aligned} \tag{31}$$

Така намерените точки наричаме централни точки на правата на роя. Те съвпадат тогава и само тогава, когато роят е развиваем, т. е. $f = 0$.

Да разгледаме онези роеве от семейството (28), за които централните им точки N_1, N_2 и фокусите A_1, A_2 на конгруенцията образуват хармонична група. Ще ги наричаме хармонични роеве на конгруенцията. За тях получаваме

$$f(a + c) = 0. \tag{32}$$

Интерес представляват случаите:

а. $f = 0$ — конгруенцията M_2 притежава точно един хармоничен рой, който съвпада с развиваемия рой $\omega_2^3 = 0$.

б. $a + c = 0$ — конгруенцията M_2 притежава ∞^1 хармонични роеве.

Останалите случаи се свеждат до горните два.

Два роя f_1 и f_2, принадлежащи на конгруенцията M_2, точно тогава ще наричаме спрегнати, когато техните централни точки образуват хармонична група. Условието за това е

$$2ac(f_1^2 + f_2^2) - (a + c)^2 f_1 f_2 = 0. \tag{33}$$

През всяка права на конгруенцията минават два забележителни роя, които се определят от изискването централните им точки и точките $A_1 + A_2$, $A_1 - A_2$ да образуват хармонична група. За тях намираме уравненията

$$\omega_2^3 = \sqrt{\frac{a}{c}}\,\omega_1^3, \quad \omega_2^3 = -\sqrt{\frac{a}{c}}\,\omega_1^3. \tag{34}$$

Трябва да подчертаем, че всички разгледани обекти и свойства в този параграф принадлежат към първа диференциална околност на правата p на конгруенцията.

§4. ОСКУЛАЧНИ ЛИНЕЙНИ КОМПЛЕКСИ НА КОНГРУЕНЦИЯТА

Произволен линеен комплекс от прави има уравнение

$$\sum e_{ik}p^{ik}=0, \quad i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad i<k, \tag{35}$$

където пет от коефициентите e_{ik} са съществени. Ние ще използваме съкратеното записване

$$\sum ep=0. \tag{35'}$$

Ще казваме, че линейният комплекс от прави L_3, определен с (35), има допиране от ред n с конгруенцията M_2 по правата p, ако диференциалната околност от ред n на правата p принадлежи на L_3.

Ще разгледаме допиране от първи и втори ред. Линейният комплекс L_3 съгласно с даденото определение има допиране с M_2 от първи ред, ако

$$\sum e(A_1A_2)=0, \tag{36}$$

$$\sum e[d(A_1A_2)]=0. \tag{37}$$

От (36) следва, че

$$e_{12}=0, \tag{38}$$

а от (37), като използваме

$$d(A_1A_2)=(\omega_1^3+\omega_2^3+2\omega_3^3-\omega_1^2-\omega_2^1)(A_1A_2)$$
$$+\omega_2^3[(A_1A_3)+c(A_1A_4)]-\omega_1^3[(A_2A_3)+a(A_2A_4)],$$

получаваме уравнението

$$\left[\sum e(A_2A_3)+a\sum e(A_2A_4)\right]\omega_1^3-\left[\sum e(A_1A_3)+c\sum e(A_1A_4)\right]\omega_2^3=0, \tag{39}$$

което трябва да бъде удовлетворено за произволни ω_1^3, ω_2^3. Следователно

$$\begin{aligned}&\sum e(A_2A_3)+a\sum e(A_2A_4)=0,\\ &\sum e(A_1A_3)+c\sum e(A_1A_4)=0,\end{aligned} \tag{40}$$

откъдето намираме равенствата

$$\begin{aligned}&e_{23}+ae_{24}=0,\\ &e_{13}+ce_{24}=0.\end{aligned} \tag{41}$$

Понеже за коефициентите e_{ik} получихме три независими връзки (38), (41), съществуват ∞^2 линейни комплекси от прави, имащи допиране от първи ред с M_2.

За да се реализира допиране от втори ред на L_3 с M_2, освен (36) и (37) трябва да бъде удовлетворено и равенството

$$(42) \qquad \sum e[d^2(A_1A_2)]=0,$$

от което по аналогичен начин получаваме

$$(43) \qquad \begin{aligned} &y_1e_{13}+ay_1e_{14}-(a-c)x_1e_{24}=0,\\ &x_2e_{23}+(2c-a)x_2e_{24}+y_2e_{13}+(2a-c)y_2e_{14}-2(a-c)^2e_{34}=0,\\ &x_3e_{23}+cx_3e_{24}+(a-c)y_3e_{14}=0. \end{aligned}$$

От (38), (41) и (43) намираме

$$(44) \qquad \begin{aligned} &e_{12}=0, \quad e_{23}=-ae_{24}, \quad e_{13}=-ce_{14},\\ &e_{34}=\frac{1}{a-c}(-x_2e_{24}+y_2e_{14}); \end{aligned}$$

$$(45) \qquad \begin{aligned} &y_1e_{14}-x_1e_{24}=0,\\ &y_3e_{14}-x_3e_{24}=0. \end{aligned}$$

Разглеждаме хомогенната система (45). За нея съществуват следните три възможности:

а. Да бъде тъждествено удовлетворена. Тогава сигурно

$$(46) \qquad x_1=0, \quad x_3=0, \quad y_1=0, \quad y_3=0$$

и конгруенцията M_2 има ∞^1 оскулачни линейни комплекси.

б. Да има точно едно решение. Този случай е налице тогава и само тогава, когато

$$(47) \qquad x_1y_3-x_3y_1=0.$$

Намереното условие (47) показва, че конгруенцията M_2 точно тогава има само един оскулачен линеен комплекс, когато е W-конгруенция. За оскулачния линеен комплекс намираме уравнението

$$(48) \qquad \begin{aligned} &c(c-a)x_1p^{13}+(a-c)x_1p^{14}+a(c-a)y_1p^{23}\\ &+(a-c)y_1p^{24}+(x_1y_2-x_2y_1)p^{34}=0. \end{aligned}$$

в. Да няма решение. Тогава

$$(49) \qquad x_1y_3-x_3y_1\neq 0$$

и конгруенцията M_2 няма оскулачни линейни комплекси.

Получените резултати ни позволяват да разделим конгруенциите в A_2^1 на следните класове:

1. Конгруенции, които нямат оскулачни линейни комплекси. Това са конгруенциите, за които е изпълнено условието (49).

2. Конгруенции, които имат точно един оскулачен линеен комплекс. Това са W-конгруенциите.

3. Конгруенции, които имат ∞^1 оскулачни линейни комплекси. Това са конгруенциите, за които са изпълнени равенствата (46).

§ 5. КАНОНИЧЕН РЕПЕР НА КОНГРУЕНЦИЯТА

Ще продължим канонизацията на репера $A_1A_2A_3A_4$. За да постигнем каноничен репер, трябва да направим още две нормировки. Избираме така вторичните параметри, че

$$c=1 \tag{50}$$

и детерминантата от координатите на върховете на репера да има стойност единица, т. е.

$$(A_1A_2A_3A_4)=1. \tag{51}$$

Като диференцираме (51), получаваме равенството

$$-\omega_1^2+\omega_1^3-\omega_2^1+\omega_2^3+3\omega_3^3+\omega_4^4=0, \tag{52}$$

което при изменение само на вторичните параметри приема вида

$$3\pi_3^3+\pi_4^4=0. \tag{52'}$$

Направената нормировка (50) геометрично означава, че единичната точка A_3+A_4 на проективната координатна система с основни върхове A_3 и A_4 съвпада с прободната точка на правата A_3A_4 с допирателната равнина към втората фокална повърхнина.

Формата $\omega_4^4-\omega_3^3$ е нова главна диференциална форма от втори ред. Всички форми π_i^j, $i, j=1, 2, 3, 4$, са вече нули, откъдето $\delta A_i=0$, $i=1, 2, 3, 4$ и следователно каноничният репер е построен.

От (18), (20), (50) и (52) получаваме следните основни формули в диференциалната геометрия на конгруенциите от прави в A_2^1 при избрания от нас репер:

$$\begin{aligned}
&\omega_1^2=\alpha\omega_1^3+\beta\omega_2^3, \quad \omega_1^4=a\omega_1^3,\\
&\omega_2^1=-\gamma\omega_1^3-m\omega_2^3, \quad \omega_2^4=\omega_2^3,\\
&\omega_3^3=\frac{1}{4}[\alpha-\gamma-(a-1)m-1]\omega_1^3\\
&\qquad+\frac{1}{4}[\beta-m-(a-1)n-1]\omega_2^3,\\
&\omega_4^4=\frac{1}{4}[\alpha-\gamma+3(a-1)m-1]\omega_1^3\\
&\qquad+\frac{1}{4}[\beta-m+3(a-1)n-1]\omega_2^3,
\end{aligned} \tag{53}$$

като

$$\begin{aligned}
&x_2=(a-1)\alpha, \quad x_3=(a-1)\beta, \quad y_1=(a-1)\gamma,\\
&y_2=(a-1)m, \quad y_3=(a-1)n.
\end{aligned} \tag{54}$$

Освен формулите (53) имаме и диференциалната връзка

$$da+a(\omega_4^4-\omega_3^3)=x_1\omega_1^3+x_2\omega_2^3. \tag{55}$$

Структурните уравнения (5) на пространството A_2^1 налагат на инвариантите a, α, β, γ, m, n връзките

$$\beta_{,1}-\alpha_{,2}+(\alpha+\beta)(a-1)+(\gamma+m)\beta+\beta\gamma-\alpha m=0,$$

$$(56)\qquad m_{,1}-\gamma_{,2}+(\alpha+\beta)\gamma+(\gamma+m)(m+1)+\beta\gamma-\alpha m=0,$$

$$na_{,1}+(a-1)[n_{,1}-m_{,2}+m(\alpha n+\beta)+n(\gamma+m)]=0,$$

$$a_{,2}+(a-1)(\alpha n-\alpha)=0,$$

където $a_{,1}$, $a_{,2},\ldots$, $n_{,1}$, $n_{,2}$ са инвариантните производни, определени от равенствата

$$da=a_{,1}\omega_1^3+a_{,2}\omega_2^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$dn=n_{,1}\omega_1^3+n_{,2}\omega_2^3.$$

Равенствата (56) са четири на брой, а инвариантите на конгруенцията — шест. Следователно две от тях остават съвършено произволни. Това е ново потвърждение на теорема 2.

Получените резултати ни позволяват да формулираме следната

Теорема 3. Нека са дадени две линейно независими линейни диференциални форми ω_1^3, ω_2^3 на двете независими променливи u, v и седем скаларни функции $a\neq 1$, α, β, γ, m, n, x_1 на същите променливи. Нека са удовлетворени уравненията на структурата (5) и равенството (55), като формите са определени от (53). С точност до произволна колинеация от вида (1) в пространството A_2^1 съществува точно една конгруенция от прави, за която формите ω_1^3, ω_2^3 са основни форми, а функциите a, α, β, γ, m, n, x_1 са инвариантите от първи и втори ред.

§ 6. НАЛАГАНЕ НА КОНГРУЕНЦИИ

С всяка права $p=(A_1A_2)$ от конгруенцията M_2 свързваме полуканоничен репер $A_1A_2A_3A_4$ от типа на този, който построихме в § 2. Аналогично с всяка права $\overline{p}=(\overline{A}_1\,\overline{A}_2)$ от конгруенцията $\overline{M}_2$ свързваме репер $\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\,\overline{A}_4$, който, подложен на преобразуванието (1), съвпада с репера $A_1A_2A_3A_4$. Инфинитезималните преобразувания на върховете на $\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\,\overline{A}_4$ задаваме с

$$(57)\qquad d\overline{A}_i=\overline{\omega}_i^j\overline{A}_j,\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Ще казваме, че конгруенцията $\overline{M}_2$ се налага върху конгруенцията M_2 от ред n, ако между техните прави е установено взаимно еднозначно съответствие и на всяка двойка съответни прави p и $\overline{p}$ е присъединена колинеация от вида (1), която преобразува конгруенцията $\overline{M}_2$ в конгруенция M_2^* така, че:

1) правите $p^*=(A_1^*A_2^*)$ и $p=(A_1A_2)$ съвпадат;

2) всички прави, принадлежащи на техните диференциални околности от първи до n-ти ред включително, също съвпадат.

Ще разгледаме налагане от първи и втори ред. Под безкрайно малки от първи ред ще разбираме нарастванията на координатите на конгруенцията при прехода от правата p към правата $p+dp$.

За да се реализира налагане от втори ред, е достатъчно равенството

$$(A_1^* A_2^*) + d(A_1^* A_2^*) + \frac{1}{2} d^2(A_1^* A_2^*) + \tag{58}$$

$$= \left(\theta_0 + \theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2 + \quad .\right)\left\{(A_1 A_2) + d(A_1 A_2) + \frac{1}{2} d^2(A_1 A_2) + \ldots\right\}$$

да бъде удовлетворено до безкрайно малки от втори ред. Тук θ_0 е скаларна функция на u, v, а θ_1 и θ_2 са съответно линейна и квадратна форма на du, dv.

От (58) следват равенствата

$$(A_1^* A_2^*) = \theta_0(A_1 A_2), \tag{59$_1$}$$

$$d(A_1^* A_2^*) = \theta_1(A_1 A_2) + \theta_0 d(A_1 A_2), \tag{59$_2$}$$

$$d^2(A_1^* A_2^*) = \theta_2(A_1 A_2) + 2\theta_1 d(A_1 A_2) + \theta_0 d^2(A_1 A_2). \tag{59$_3$}$$

Диференциалните форми $\overset{*}{\omega}{}_i^j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, не зависят от (1) и можем да считаме, че

$$dA_i^* = \overset{*}{\omega}{}_i^j A_j^*, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

От (59$_1$) и изискването за съвпадане на правите p^* и p заключаваме, че

$$\theta_0 = 1. \tag{60}$$

Да разгледаме (59$_2$). Това равенство осигурява налагане на M_2 върху M_2 от първи ред. Като използваме (6), от него получаваме

$$\theta_1 \quad 2\tilde{\omega}_3^3 - \tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^1, \tag{61$_1$}$$

$$\tilde{\omega}_1^3 = 0, \quad \tilde{\omega}_1^4 = 0, \quad \tilde{\omega}_2^3 = 0, \quad \tilde{\omega}_2^4 = 0, \tag{61$_2$}$$

като сме направили полагането

$$\tilde{\omega}_i^j = \omega_i^j - \overset{*}{\omega}{}_i^j, \quad i, j \quad 1, 2, 3, 4.$$

Равенството (61$_1$) определя линейната диференциална форма θ_1, а (62$_2$) — съответствието между правите на двете конгруенции. Ако допуснем, че за $\overline{M_2}$ са в сила формули, аналогични на (8), т. е.

$$\begin{aligned} \omega_1^4 &\quad a\,\omega_1^3 + b\,\omega_2^3, \\ \omega_2^4 &= b'\,\overline{\omega}_1^3 + c\,\omega_2^3, \end{aligned} \tag{8$'$}$$

от (61$_2$) получаваме

$$(62)\qquad \bar{a}\quad a,\ \ \bar{b}=\bar{b}'=0,\ \ \bar{c}=c.$$

Равенствата (62) показват, че (61_2) представляват ограничения за репера $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4$ — той грябва да бъде от типа на репера $A_1A_2A_3A_4$, т. е. полуканоничен. От това следва, че върховете $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ са фокуси на правата $\bar{p}$, а равнините $(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3+a\bar{A}_4), (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3+c\bar{A}_4)$ са допирателни равнини към фокалните повърхнини на конгруенцията $\bar{M}_2$. Конгруенцията $\bar{M}_2$ не може да бъде съвсем произволна, а такава, че равенствата (62) да бъдат изпълнени.

От (10), (32) и (34) заключаваме, че развиваемите, параболичните и хармоничните роеве си съответствуват. Инвариантата $I=a/c$ се запазва при налагането. Това е съществено ограничение за двете конгруенции. Инвариантата I бихме могли да наречем к р и в и н а на конгруенцията.

Двойката наложими конгруенции M_2 и $\bar{M}_2$ се определят от системата на Пфаф, съставена от уравненията

$$(63)\qquad \begin{gathered} \omega_1^4=a\omega_1^3,\ \ \omega_2^4=c\omega_2^3,\ \ \tilde{\omega}_1^3=0, \\ \tilde{\omega}_1^4=0,\ \tilde{\omega}_2^3=0,\ \tilde{\omega}_2^4=0. \end{gathered}$$

Системата (63) се състои от $s=6$ линейно независими уравнения на Пфаф. Имаме $n=2$ аргумента. Ще приведем тази система в инволюция. Като диференцираме (63), получаваме ковариантната система

$$(64)\qquad \begin{gathered} [da+a(\omega_4^4-\omega_3^3),\omega_1^3]+(a-c)[\omega_1^2\omega_2^3]=0, \\ (c-a)[\omega_2^1\omega_1^3]+[dc+c(\omega_4^4-\omega_3^3,\omega_2^3]=0, \\ [\omega_1^3-\omega_2^3,\tilde{\omega}_1^2]=0,\quad [\omega_1^3-\omega_2^3,\tilde{\omega}_2^1]=0, \\ a[\tilde{\omega}_1^2-\tilde{\omega}_3^3+\tilde{\omega}_4^4,\omega_1^3]-c[\tilde{\omega}_1^2\omega_2^3]=0, \\ a[\tilde{\omega}_2^1\omega_1^3]-c[\tilde{\omega}_2^1-\tilde{\omega}_3^3+\tilde{\omega}_4^4,\omega_2^3]=0. \end{gathered}$$

Системата (64) се състои от $s_1=6$ независими квадратични уравнения с $q=8$ нови форми на Пфаф. От равенството $q=s_1+s_2$ получаваме $s_2=2$. За числото на Картан намираме $Q=s_1+2s_2=10$. От (64) се вижда, че осемте нови форми на Пфаф могат да се изразят чрез $N=10$ нови величини. Равенството $Q=N$ показва, че системата (63) е в инволюция. Широтата на нейното решение е $s_2=2$ функции на два аргумента. С теорема 2 показахме, че такъв е и произволът при определяне на една конгруенция от прави.

Получихме важен резултат — всяка конгруенция A_2^1 може да бъде налагана от първи ред съгласно с даденото определение върху подходящи конгруенции. Няма никакви специални изисквания за изходната конгруенция M_2. Можем да формулираме следната

Т е о р е м а 4. Всеки две конгруенции от прави в A_2^1 са наложими от първи ред, при което фокусите, развиваемите, хармоничните и параболичните роеве си съответствуват.

За да имаме налагане от втори ред, трябва да бъдат изпълнени и трите равенства (59). От първите две равенства вече намерихме (60) и (61). Остава да разгледаме (59_3). То ни дава

$$(65)\qquad \begin{gathered}(\omega_1^3-\omega_2^3)\widetilde{\omega}_1^2=0,\quad (\omega_1^3-\omega_2^3)\widetilde{\omega}_2^1=0,\\ a(\widetilde{\omega}_1^2-\widetilde{\omega}_3^3+\widetilde{\omega}_4^4)\omega_1^3-c\widetilde{\omega}_1^2\omega_2^3=0,\\ a\widetilde{\omega}_2^1\omega_1^3-c(\widetilde{\omega}_2^1-\widetilde{\omega}_3^3+\widetilde{\omega}_4^4)\omega_2^3=0.\end{gathered}$$

Като диференцираме външно (61_2), получаваме

$$(66)\qquad \begin{gathered}[\omega_1^3-\omega_2^3,\widetilde{\omega}_1^2]=0,\quad [\omega_1^3-\omega_2^3,\widetilde{\omega}_2^1]=0,\\ a[\widetilde{\omega}_1^2-\widetilde{\omega}_3^3+\widetilde{\omega}_4^4,\omega_1^3]-c[\widetilde{\omega}_1^2\omega_2^3]=0,\\ a[\widetilde{\omega}_2^1\omega_1^3]-c[\widetilde{\omega}_2^1-\widetilde{\omega}_3^3+\widetilde{\omega}_4^4,\omega_2^3]=0.\end{gathered}$$

От съвместното решаване на (65) и (66) следват равенствата

$$(67_1)\qquad \widetilde{\omega}_1^2=0,\quad \widetilde{\omega}_2^1=0,$$

$$(67_2)\qquad \widetilde{\omega}_3^3-\widetilde{\omega}_4^4=0.$$

Ако за конгруенцията $\overline{M}_2$ предположим, че са в сила формули от вида (18) с коефициенти $\overline{x}_i, \overline{y}_i$, $i=1, 2, 3$, равенствата (67) показват, че

$$(68)\qquad \overline{x}_i=x_i,\quad \overline{y}_i=y_i,\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

За двата репера $A_1A_2A_3A_4$ и $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$ предполагаме изпълнена тривиалната нормировка (51). Тогава

$$(69)\qquad 3\widetilde{\omega}_3^3+\widetilde{\omega}_4^4=0.$$

От (61_2), (67_1), (67_2) и (69) получаваме, че $\widetilde{\omega}_i^j=0$, $i, j=1, 2, 3, 4$. Щом всички съответни диференциални форми ω_i^j и $\overline{\omega}_i^j$ са равни, то двете конгруенции са еквивалентни, т. е. след подходяща колинеация от вида (1) съвпадат. Така доказахме следната

Теорема 5. Ако в A_2^1 две конгруенции са наложими от втори ред, то те са еквивалентни, т. е. след подходяща колинеация от вида (1) те съвпадат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станилов, Г. Геометрия линейчатых многообразий биаксиального пространства. Диссертация. Киев, 1965.
2. Фиников, С. П. Теория конгруэнций. М., 1950.
3. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана. М., 1948.

Постъпила на 18. III. 1970 г.

О КОНГРУЭНЦИЯХ ПРЯМЫХ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С АБСОЛЮТОМ ДВУМЯ РЕАЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ И ОДНОЙ РЕАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ОДНУ ИЗ НИХ

Адриан Борисов

(Резюме)

Пространство A_2^1 является подпространством трехмерного проективного пространства P_3. Его абсолют состоит из двух реальных точек E_3, E_4 и одной реальной плоскости ε, проходящей через одну из этих точек.

В работе рассматриваются по методу внешних форм Картана конгруэнции прямых в A_2^1. Применяется семейстов реперов, для которых вершины A_3, A_4 совпадают с неподвижными точками E_3, E_4, а неподвижная плоскость ε имеет тангенциальные координаты $\varepsilon=(A_4, A_1+A_3, A_2+A_3)$. Инфинитезимальные преобразования репера задаются в (2). Внешние формы ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры (5). Квадратичная форма $\varphi=\omega_1^3\omega_2^4-\omega_1^4\omega_2^3$ является относительной инвариантной формой. Уравнение $\varphi=0$ дает развертывающиеся однопараметрические совокупности конгруэнции. Если точки A_1 и A_2 поставлены в фокусы прямой конгруэнции, реализируется полуканонический репер. Величина $I=a/c$ — единственная инварианта первого порядка. Для нее дается геометрическое объяснение (23). Условия (25) и (26) определяют W- и V- конгруэнции в A_2^1.

Произвольная однопараметрическая совокупность прямых, принадлежащих конгруэнции, задается линейной связью (28) с базисными формами ω_1^3, ω_2^3. Находятся центральные точки прямой совокупности. Они совпадают, когда однопараметрическая совокупность развертывающаяся. Равенство (32) дает гармоничные однопараметрические совокупности конгруэнции. Через каждую прямую p проходят только две параболичные однопараметрические совокупности, описываемые уравнениями (34).

Составляется классификация конгруэнций в A_2^1, для чего применяются оскулачные линейные комплексы. Посредством нормировок (50) и (51) получается канонический репер. Получены и основные формулы (53). В конце рассматривается условие наложения конгруэнций. Основные результаты сформулированы в теоремах 4 и 5.

ON THE CONGRUENCES OF LINES IN A THREE-DIMENSIONAL SPACE WITH AN ABSOLUTE OF TWO REAL POINTS AND ONE REAL PLANE PASSING THROUGH ONE OF THEM

Adrian Borisov

(*Summary*)

The space A_2^1 is a subspace of the three-dimensional projective space P_3. Its absolute consists of two real points E_3, E_4 and one real plane ε, passing through one of them.

Using Cartan's method of exterior forms the congruences of lines in A_2^1 are studied. A family of frames whose vertices A_3, A_4 coincide with the fixed points E_3, E_4 is used and the fixed plane ε has tangent coordinates $\varepsilon=(A_4, A_1+A_3, A_2+A_3)$. The infinitesimal transformations of the vertices of the frame are given by (2). The exterior forms ω_i^j satisfy the equations of the structure (5). The quadratic from $\varphi=\omega_1^3\omega_2^4-\omega_1^4\omega_2^3$ is a relative invariant form. The equation $\varphi=0$ gives the developing one-parameter family of lines of the congruence. If the points A_1 and A_2 are in the focuses of the line of the congruence, a semicanonic frame is formed. The magnitude $I=a/c$ is the unique invariant of first order. A geometric interpretation (23) is given for it. The conditions (25) and (26) determine the W- and V-congruences in A_2^1.

An arbitrary one-parameter family of lines belonging to the congruence is given by the linear relation (28) between the basic forms ω_1^3, ω_2^3. The central points of a line of the one-parameter family of lines are found. They coincide when the family of lines is developing. The equality (32) gives the harmonic one-parameter families of lines of the congruence. Just two parabolic one-parameter families of lines, for which the equations (34) are found, pass through every line p.

A classification of the congruences in A_2^1 is made with the help of the oscular linear complexes. A canonic frame is obtained by the normalizations (50) and (51). Also the basic formulae (53) are obtained. Finally the deformation of congruences is studied. The basic results are formulated in theorems 4 and 5.