БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ВЪРХУ ЕДИН МЕТОД ЗА ИЗКЛЮЧВАНЕ

Милко Петков

Тук ще предположим един метод за изключване при решаване на системи линейни алгебрични уравнения. Доколкото ни е известно, този метод е нов. Той наподобява метода на отражението по това, че чрез последователни умножения на дадена система с подходящи матрици последната се преобразува в система, еквивалентна на първата, но с дясна, триъгълна матрица. За разлика от метода на отражението предлаганият метод допуска непосредствена клетъчна модификация.

При разглеждането на метода ще ни бъде необходима една теорема, приведена в книгата на Митринович и Джокович [1], която ще формулираме в следния малко по-общ вид:

Теорема 1. Ако A е матрица от вида $n\times m$, B — матрица от вида $m\times n$, а C и D са две квадратни матрици сътветно от редове n и m, за които $BC=DB$, то

$$|AB+C|\,|D|=|BA+D|\,|C| \tag{1}$$

Доказателство. Равенството (1) е непосредствено следствие от веригата матрични равенства

$$\begin{pmatrix} E_n & 0_{nm} \\ B & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & -A \\ 0_{mn} & BA+D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0_{nm} \\ -B & D \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} C & -A \\ BC & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0_{nm} \\ -B & E_m \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} C+AB & -A \\ 0_{mn} & D \end{pmatrix},$$

където E_m и E_n са единичните матрици съответно от ред m и n, а 0_{mn} и 0_{nm} — нулевите матрици от вид $m\times n$ и $n\times m$.

Сега ще въведем матрицата U, с помощта на която се осъществява изключването.

Дефиниция:

$$U=E+(P-S)(S'S)^{-1}S', \tag{2}$$

където P и S са произволни матрици от ред $n\times m$, $n\geq m$.

Ще отбележим следните свойства на матрицата U.

1. При $P=-S$ се получава обобщената матрица на отражение [2]:

$$U=E-2S(S'S)^{-1}S'.$$

2. Ако Z е произволна матрица от вида $n \times m$, съществува единствена матрица X от същия вид и квадратна матрица Y от ред m, за които $X'S=0_m$ и $Z=X+SY$. Оттук получаваме $UZ=X+PY$. В частност $US=P$ [2].

Теорема 2. Изпълнено е равенството

$$U = \frac{S'P}{S'S}$$

Доказателство. Като приложим (1) за $A=P-S$, $B=(S'S)^{-1}S'$, $C=E_n$ и $D=E_m$, намираме

$$\begin{aligned} U &= |E_n+(P-S)(S'S)^{-1}S'| = |E_m+(S'S)^{-1}S'(P-S)| \\ &= |E_m+(S'S)^{-1}S'P-E_m| = \frac{S'P}{S'S} \end{aligned}$$

Теорема 3. Изпълнено е равенството

$$U^{-1}=E-(P-S)(S'P)^{-1}S'. \tag{4}$$

Доказателство. Имаме

$$\begin{aligned} &[E+(P-S)(S'S)^{-1}S'][E-(P-S)(S'P)^{-1}S'] \\ &=[E+P(S'S)^{-1}S'-S(S'S)^{-1}S'][E+S(S'P)^{-1}S'-P(S'P)^{-1}S'] \\ &=E+S(S'P)^{-1}S'-P(S'P)^{-1}S'+P(S'S)^{-1}S'+P(S'P)^{-1}S' \\ &-P(S'S)^{-1}S'-S(S'S)^{-1}S'-S(S'P)^{-1}S'+S(S'S)^{-1}S'=E. \end{aligned}$$

По-нататък ще използваме едно друго представяне на матрицата (2), което ще получим сега.

Търсим такава лява триъгълна матрица L от ред m, за която $(SL)'(SL)=E_m$. За нея ще имаме $LL'=(S'S)^{-1}$. Матрицата L съществува и може да се намери например по метода на квадратния корен. Тогава матрицата (2) може да се представи и във вида

$$U=E+(Q-T)T', \tag{5}$$

където $Q=PL$, $T=SL$ и $T'T=E_m$.

Теорема 4. Необходимо и достатъчно условие за симетричност на матрицата (3) е

$$QT'=TQ'.$$

Доказателството се извършва с непосредствена проверка.

Теорема 5. Необходимо и достатъчно условие за ортогоналност на матрицата (3) е

$$QQ'=TT'.$$

Да разгледаме задачата за намиране на пълната система от собствени стойности на матрицата U. Съгласно с (1) имаме

$$(1-\lambda)^m|(1-\lambda)E+(Q-T)T'|=(1-\lambda)^n|(1-\lambda)E+T'(Q-T)|=(1-\lambda)^n|T'Q-\lambda E|$$

Следователно матрицата U притежава собствена стойност $\lambda=1$ от кратност $n-m$, а останалите собствени стойности съвпадат със собствените стойности на матрицата $T'Q$. В частния случай $m=1$ U ще има собствена стойност $\lambda=1$ от кратност $n-1$ и една собствена стойност, равна на числото $T'Q$.

При $m=1$ собственият вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda=Q'T$, е $T-Q$, тъй като

$$[E+(Q-T)T'](T-Q)=(T-Q).(T'Q).$$

Сега ще разгледаме как се използва матрицата U за решаване на линейни системи. Ще се занимаем с обикновения и клетъчния случай, като всеки от тях разделим по на два подслучая, в съответствие с представянията (2) и (5) на матрицата U.

А. Обикновени схеми

Първа схема. Нека е дадена линейната система

$$Ax=b \tag{6}$$

с разширена матрица

$$B_0=(A\,|\,b)=(a_{ij}^{(0)})=(a_1^{(0)},\ a_2^{(0)},\ldots,\ a_{n+1}^{(0)})=(A_0|a_{n+1}^{(0)}),$$

j-ят стълб на която е означен с $a_j^{(0)}$. Полагаме

$$B_k=\left|\begin{array}{cccccc} 1 & a_{12}^{(k)} & \ldots a_{1\,k-1}^{(k)} & a_{1k}^{(k)} & \ldots a_{1\,(n+1)}^{(k)} \\ 0 & 1 & \ldots a_{2\,k-1}^{(k)} & a_{2k}^{(k)} & \ldots a_{2\,n+1}^{(k)} \\ & & & & \\ 0 & 0 & \ldots 0 & 1 & \ldots a_{k\,n+1}^{(k)} \\ 0 & 0 & \ldots 0 & a_{k+1\,k}^{(k)} & \ldots a_{k+1\,n+1}^{(k)} \\ & & & & \\ 0 & 0 & \ldots 0 & a_{n+1\,k}^{(k)} & \ldots a_{n+1\,n+1}^{(k)} \end{array}\right| = (A_k\, a_{n+1}^{(k)}).$$

Тогава

$$B_{k+1}=U_{k+1}B_k,\quad k=0,\ 1,\ldots,\ n-1,$$

където

$$U_{k+1}=E+(Q_{k+1}-T_{k+1})T'_{k+1},$$

$$T_{k+1}=P_{k+1}+S_{k+1}$$

като с P_{k+1} е означен $k+1$-ят ортонормиран вектор, а с S_{k+1} векторът $(0,\ 0,\ldots,\ 0,\ a_{k+1\,k+1}^{(k)},\ldots,\ a_{n\,k+1}^{(k)})'$.

По такъв начин след n-тата стъпка се получава система с дясна триъгълна матрица A_n. Тази система се решава лесно по формулите

$$x_n=a_{n\,n+1}^{(n)},\quad x_i=a_{i\,n+1}^{(n)}-\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}^{(n)}x_k,\quad i=n-1,\ n-2,\ldots,\ 1.$$

Очевидно е, че всяка стъпка е еквивалентно преобразуване, когато $a_{k+1\,k+1}^{(k)}$ са различни от нула. Ако последното условие е нарушено при някоя стъпка, процесът може да се продължи с избиране на друг водещ елемент. Изобщо може да се използва вариантът с избор на главен елемент.

За да се реши една система от ред n по разгледаната схема, необходими са $(4n^3+9n^2-n)/6$ събирания $(4n^3+15n^2+5n)/6$ умножения, n деления и n коренувания.

Ако това се налага, може да се пресметне както детерминантата

$$\Delta = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{S_{k+1}}{a^{(k)}_{k+1\,k+1}}\right)^2$$

така и обратната матрица

$$A^{-1} = A_n^{-1} U_n U_{n-1} \dots U_1$$

Втора схема. При тази схема се използва първото представяне (2) на матрицата U. Тук няма да описваме подробно последователните стъпки, тъй като те са аналогични на горните. Броят на аритметичните операции събиране, изваждане, умножение и деление е същият, но липсва коренуване.

Б. Клетъчни модификации

Първа схема. Да допуснем, че матрицата A е разделена на p^2 на брой q-мерни клетки A_{ij}, а векторът b на свободните членове — на p на брой клетки $A_{i\,p+1}$ от вида $q \times 1$.

Сега последователните матрици B_k имат следния вид:

$$B_0 = (A|b) = (A_0|A^{(0)}_{p+1}) = (A^{(0)}_1, A^{(0)}_2, \dots, A^{(0)}_{p+1}) = (A^{(0)}_{ij}),$$

$$B_k = (A_k\, A^{(k)}_{p+1}) = (A^{(k)}_1, A^{(k)}_2, \dots, A^{(k)}_{p+1}),$$

където $A^{(k)}_j$ е j-ят клетъчен стълб на матрицата B_k.

Матрицата B_{k+1} се получава от B_k по равенството

$$B_{k+1} = U_{k+1} B_k,$$

където

$$U_{k+1} = E + (Q_{k+1} - T_{k+1}) T'_{k+1}.$$

Тук

$$Q_{k+1} = P_{k+1} L$$

и

$$T_{k+1} = S_{k+1} L,$$

където

$$P_{k+1} = (O_q, \dots, O_q, \underset{(k+1)}{E_q}, O_q, \dots, O_q)',$$

$$S_{k+1} = (O_q, \dots, O_q, A^{(k)}_{k+1\,k+1}, \dots, A^{(k)}_{p\,k+1})$$

и

$$LL' = (S'_{k+1}S_{k+1})^{-1}.$$

След p-тата стъпка системата (6) ще приеме вида

$$\begin{aligned} X_1 + A_{12}^{(p)}X_2 + \cdots + A_{1p}^{(p)}X_p &= A_{1\,p+1}^{(p)}, \\ X_2 + \cdots + A_{2p}^{(p)}X_p &= A_{2\,p+1}^{(p)}, \\ &\;\;\vdots \\ X_p &= A_{p\,p+1}^{(p)}, \end{aligned}$$

където $X_i = (x_{(i-1)q+1}, x_{(i-1)q+2}, \ldots, x_{iq})'$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Получената система се решава по формулите

$$X_p = A_{p\,p+1}^{(p)}, \quad X_i = A_{i\,p+1}^{(p)} - \sum_{k=i+1}^{p} A_{ik}^{(p)}X_k, \quad i = p-1, p-2, \ldots, 1.$$

Реализирането на тази схема изисква $(15nq^2 + 9n^2q - 9nq + 8n^3 + 9n^2 - 8n)/12$ събирания, $(15nq^2 + 9n^2q + 27nq + 8n^3 + 21n^2 - 8n)/12$ умножения, n деления, n коренувания и $(10p^3 + 15p^2 - p)/6$ обръщания към външната памет на дадена автоматична сметачна машина, при предположение, че разполагаме поне с $3q^2 + n$ от оперативната ѝ памет.

Аналогично на случая на обикновените схеми имаме

$$A = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{|S'_{k+1}S_{k+1}|}{|A_{k+1\,k+1}^{(k)}|}$$

$$A^{-1} \quad A_p^{-1}U_pU_{p-1} \qquad U_1.$$

Втора схема. Като се използва представянето (2) на матрицата U, може да се даде схемата, съответна на втората обикновена схема. При тази клетъчна модификация са необходими $\left(7nq^2 + 9n^2q - 11nq + 2n^3 - 3n^2 + 3n + \frac{2n^3 + 3n^2}{q}\right)/6$ събирания, $(2nq^2 + 6n^2q + 9nq + 4n^3 + 9n^2 - 6n))/6$ умножения, n деления и $(10p^3 + 15p^2 - p)/6$ обръщания към външната памет на дадена машина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mitrinovic, D., D. Djokovic. Polinomi i matrice. Beograd, 1966, 242—305.
2. Петков, М. Обобщена матрица на отражение. — Известия на Мат. инст. на БАН, 11, 1970, 257—261.

Постъпила на 24. 6. 1970 г.

О МЕТОДЕ ИСКЛЮЧЕНИЯ

Милко Петков

(*Резюме*)

Предлагается новый метод исключения для решения систем линейных алгебраических уравнений. Этот метод напоминает известный метод отражения, с той разницей, что вместо матрицы отражения применяется матрица

$$U=E+(P-S)(S'S)^{-1}S^1,$$

где E — единичная матрица n-го порядка, а P и S — матрицы вида $n\times m$ Рассматриваются две обыкновенные схемы для случая $m=1$ и две соответствующие клеточные модификации. Предлагаемый метод при клеточном варианте реализуется более простым способом по сравнению с методом отражения.

ON AN ELIMINATION METHOD

Milko Petkov

(*Summary*)

A new elimination method enabling the solution of systems of linear algebraic equations is proposed. This method resembles the well-known method of reflection but here instead of a matrix of reflection the following matrix is used

$$U=E+(P-S)(S'S)^{-1}S',$$

where E is the identity-matrix of order n and P and S are matrices of the type $n\times m$. Two ordinary schemes for $m=1$ and the corresponding modifications in case the matrix elements are smaller matrices are considered. The method proposed is realized numerically in the latter case easier than when the method of reflection is applied.