БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

ВЪРХУ ПОЛОЖИТЕЛНИТЕ РЕШЕНИЯ НА НЯКОИ СИСТЕМИ ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Неко Георгиев

Да означим с K конуса в n-мерното пространство R_n, определен като съвкупност от всички n-мерни вектори с неотрицателни компоненти, и да разгледаме системата диференциални уравнения

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

където

$$x = \operatorname{colon}(x_1, x_2, \ldots \quad x_n), \quad f(t, x) = \operatorname{colon}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

и

$$f(t, x) \in C_{t,x}^{(0,1)}(Z), \ Z = \{a < t < \qquad x| < \quad\}.$$

В [1, стр. 62] е доказано, че ако десните страни на системата (1) притежават свойството положителност, то решението $x(t)$ на тази система с начално условие

$$x(0) = c, \ c \in K,$$

лежи в конуса K или, както се казва, то е положително.

В настоящата работа на десните страни на (1) се налага по-голямо ограничение, но за сметка на това се доказва по-силно твърдение, а именно: всяко решение с произволно начално условие принадлежи на K при достатъчно големи стойности на t.

По-нататък се дават необходими условия за съществуване на положителни периодични решения, т. е. на периодични решения, лежащи в конуса K.

Сега да предположим, че при $(t, x) \in Z$ имаме

$$f(t, x) \in K$$

и

$$f_k(t, x) \to +$$

когато поне една координата $x_i \to +$

Теорема 1. Ако за всички решения на системата (1) функциите $f_i(t, x(t))$ не са интегрируеми в несобствен смисъл, то за всяко непродължимо решение $x(t)$ на (1) съществува число T такова, че

$$x(t) \in K \tag{3}$$

при $t > T$, за което $x(t)$ е определено. Множеството M от всички точки t, за които е изпълнено (3), не е празно множество.

Доказателство. Нека $x(t)$ е непродължимо решение на системата (1), удовлетворяващо началното условие

$$x(t_0) = b, \quad t_0 > a, \quad b \in R_n.$$

От уравнението (1) следва, че $x(t)$ е монотонно растяща функция в смисъл на полунаредбата, която определя конуса K. Да допуснем, че това решение е ограничено. Тогава, както е известно [2, стр. 257], $x(t)$ е определено за всяко $t \geq t_0$. От монотонността и ограничеността на $x(t)$ следва, че съществува

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = l.$$

В такъв случай от интегралната форма на (1)

$$x(t) = b + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

следва, че интегралът

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t, x(t)) dt$$

е сходящ. Полученото противоречие доказва, че решението $x(t)$ по норма расте неограничено в крайния или безкрайния интервал, където то е определено.

Ако предположим, че решението е определено в безкрайния интервал $[t_0, \infty)$, то аналогично на по-горните разсъждения следва, че $x_i(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$. С това теоремата е доказана.

Ако допуснем, че решението $x(t)$ е определено в крайния интервал $[t_0, L)$ и някоя от координатите $x_n(t)$ е ограничена, то съществува

$$\lim_{t \to L-0} x_k(t) = l_k.$$

Но тогава от $\|x(t)\| \to \infty$ при $t \to L-0$ следва, че при поне едно $i \neq k$

$$x_i(t) \to \infty \quad \text{при} \quad t \to L-0,$$

откъдето съгласно (2) интегралът

$$\int_{t_0}^{L} f_k(t, x(t)) dt$$

е сходящ в несобствен смисъл, с което получихме желаното противоречие. В хода на доказателството се установи също така, че M не е празно множество.

Очевидно едно достатъчно условие за разходимостта на интеграла (4) е да съществува функция $g(t)$, удовлетворяваща при $(t,x)\in Z$ условието

$$f(t,x)\geq g(t)\geq 0, \tag{5}$$

и интегралът

$$\int_{t_0}^{\infty} g(t)dt$$

да бъде разходящ.

Следствие. За скаларното диференциално уравнение

$$\dot{x}=f(t,x)$$

условието (5) се явява достатъчно за верността на теоремата.

Сега да предположим, че дясната страна на системата (1) е определена в интервала $(-\infty, +\infty)$ и е ω-периодична функция на t, т. е.

$$f(t+\omega, x)=f(t, x).$$

Нека $x=x(t,0,x_0)$ е решение на (1) с начално условие

$$x(0)=x_0.$$

Оператора на преместването по траекториите на (1) ще означаваме с $U(t, 0)$, т. е. полагаме

$$x(t)=U(t, 0)x_0. \tag{6}$$

Лема. Ако $x(t)$ е ω-периодично решение на (1), тогава съществува поне една точка τ_0, принадлежаща на интервала $[0,\omega]$, такава, че операторът $U(t)=U(t, 0)$ удовлетворява зависимостта

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\tau_0, U(\tau_0))=0. \tag{7}$$

Наистина нека $x=x(t, 0, x_0)$ е решение на (1). Тогава

$$x(t)=x_0+\int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

От условието за периодичност $x(\omega)=x(0)$ имаме

$$\int_0^{\omega} f(\tau, x(\tau))d\tau=0, \tag{8}$$

откъдето

$$(9) \qquad \int_0^{\omega} f_i(\tau, x(\tau))d\tau \quad 0,$$

От (9), сумирайки по i от 1 до n, получаваме

$$\int_0^{\omega}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(\tau, x(\tau))\right)d\tau = 0.$$

От последното равенство намираме съотношението

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\tau_0, x(\tau_0)) \quad 0,$$

което заедно с (6) дава (7).

Теорема 2. Нека в системата

$$(10) \qquad \dot{x} = A(t)x$$

$(n\times n)$-мерната матрица $A(t)=(a_{ij})$ е периодична и непрекъсната функция по t. Да означим оператора на преместването по траекториите на (10) с $V(t)$. Тъй като $V(t)$ е линеен оператор, можем да положим $V(t)=(v_{ij})$. Тогава, ако $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}>0$ при $j = 1, 2, \ldots, n$, системата (10) не притежава периодично решение $x(t)$, което да е вътрешен елемент на K. По-нататък, ако предположим, че $A = A(t)$ е постоянна матрица и $\det A\neq 0$, следва, че системата (10) не притежава нетривиални ω-периодични решения, принадлежащи на K. В такъв случай съществува число $\tau_0\in[0,\omega]$, за което

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} V_{ij}\right)x_{j_0} = 0,$$

където $x_0 = \mathrm{colon}\,[x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}]$.

Доказателство. Съгласно лемата имаме

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\tau_0)\right) x_j(\tau_0) = 0,$$

откъдето $h(\tau_0)$ 0 и следователно $x(t)$ 0. И така необходимо условие за съществуване на положително ω-периодично решение на уравнението (10) е да съществува точка $\tau_0\in[0,\omega]$ такава, че поне за едно j да бъде изпълнено условието

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\tau_0)\leq 0.$$

По-нататък съгласно (8) и поради $\det A\neq 0$ имаме

$$\int_0^{\omega} x(t)dt = 0,$$

откъдето

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i(\tau_0) = 0.$$

Сега да допуснем, че съществува ω-периодично решение x, принадлежащо на конуса K; тогава от (11) следва

$$x(t) \equiv 0.$$

Накрая, представяйки решението $x(t)$ във вида

$$x(t) = V(t)x_0,$$

съгласно (11) получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(\tau_0) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} v_{ij}\right)x_{j_0} = 0,$$

откъдето следва, че ако

$$\sum_{i=1}^{n} v_{ij} > 0$$

за всяко $j=1, 2, \ldots, n$. системата (10) не притежава ω-периодично решение, принадлежащо на K.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский, М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Москва, 1966.
2. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. Москва, 1967.

Постъпила на 3. XII. 1970 г.

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Неко Георгиев

(Резюме)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t, x).$$

При некоторых ограничениях, приложенных к правой части этой системы, приводия доказательство, что любое решение системы с произвольными начальными условиями становится постоянно положительным, начиная с известного момента.

Также доказывается что оператор перемещения удовлетворяет одному соотношению в случае периодичности $f(t,x)$ по t. Данное соотношение применяется для задания необходимого условия существования периодического положительного решения при линейном случае.

ON THE POSITIVE SOLUTIONS OF SOME SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Neko Georgiev

(Summary)

The system of differential equations

$$\dot{x}=f(t, x)$$

is studied. It is proved that in some cases every solution of the system with arbitrary initial conditions becomes positive after a certain moment.

It is proved also that the translation operator satisfies a certain relation in case of the periodicity of $f(t,x)$ with respect to t. This relation is used when giving the necessary condition for existence of a periodic positive solution in the linear case.