БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

О СТРОГО РЕГУЛЯРНЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЬЦАХ

С. В. Миховски

Настоящая заметка посвящена выяснению строения строго регулярных групповых колец KG произвольной группы G над коммутативным кольцом K с единицей.

Ассоциативное кольцо R называется регулярным в смысле Неймана [1] (строго регулярным [2]), если для любого a из кольца R уравнение $axa=a$ ($a^2x=a$) разрешимо в R. Поскольку строго регулярное кольцо не содержит нильпотентных элементов и равенство $a^2x=a$ влечет за собою равенство $(axa-a)^2=0$, то строго регулярное кольцо является регулярным в смысле Неймана.

Кольцо R назовем ξ-кольцом (см. [3], стр. 64), если для каждого элемента a из R существует такое x из R, что a^2x-a является центральным нильпотентным элементом. Очевидно, всякое строго регулярное кольцо является ξ-кольцом.

В ξ-кольцах все нильпотентные элементы центральны. Действительно, используя индукцию по n, из равенства $a^n=0$ $(n>2)$ и $(a^2)^{n-1}=0$ вытекает, что a^2R лежит в центре $C(R)$ кольца R. Тогда существует такое x из R, что a^2x-a — центральный нильпотентный элемент. Отсюда следует, что a принадлежит $C(R)$.

Ауслендер, Вилламайор и Коннел [4] доказали, что групповое кольцо KG регулярно в смысле Неймана тогда и только тогда, когда кольцо K обладает этим свойством, а группа G локально конечна и порядок каждого элемента из группы G обратим в кольце K.

Для исследования строения групповых ξ-колец нам необходимы некоторые факты, которые легко получаются при помощи следующей леммы.

Лемма 1. Пусть в кольце R для любых двух элементов a и b, удовлетворяющих условию $ab=0$, существуют такие натуральные числа $m=m(a, b)$ и $n=n(a, b)$, что

$$b^ma-ba^n=0.$$

Тогда все идемпотенты кольца R центральны.

Доказательство. Пусть нецентральный идемпотент e кольца R неперестановочный с элементом x из R. Тогда элемент $a=exe-xe$ (или $a=exe-ex$) отличен от нуля и $ea=0$ (или $ae=0$). По условию существует такое $n=n(e, a)$ ($m=m(e, a)$), что $0=ae^n=a$ $(0=e^ma=a)$, а это невозможно.

С л е д с т в и е 1 [5]. Если в кольце R все нильпотентные элементы принадлежат центру, то все идемпотенты центральны.

Действительно, если ab 0, то $(ba)^2=0$ и элемент ba принадлежит центру кольца R. Тогда

$$b^2a=ba^2=0.$$

С л е д с т в и е 2. В произвольном кольце R эквивалентны следующие утверждения:

I. Кольцо R регулярно в смысле Неймана и не содержит нильпотентных элементов.

II. Кольцо R регулярно в смысле Неймана, и все его идемпотенты центральны.

III. Кольцо R строго регулярно.

В дальнейшем через Γ будем обозначать группу кватернионов с определяющими соотношениями:

$$\alpha^4=1,\ \beta^2=\alpha^2,\ \beta^{-1}\alpha\beta=\alpha^{-1}.$$

Л е м м а 2. Если K — коммутативное кольцо с единицей без нильпотентных элементов и 2 — обратимый элемент кольца K, то эквивалентны следующие утверждения:

I. Групповое кольцо $K\Gamma$ содержит нецентральный нильпотентный элемент.

II. Кольцо $K\Gamma$ содержит нильпотентный элемент.

III. В кольце K уравнение

$$x^2+y^2+z^2=0 \tag{1}$$

обладает ненулевым решением.

Доказательство. Очевидно, что элементы

$$e_1=\frac{1}{8}(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)(1+\beta),\ e_2=\frac{1}{8}(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)(1-\beta),$$

$$e_3=\frac{1}{8}(1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3)(1+\beta),\ e_4=\frac{1}{8}(1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3)(1-\beta),$$

$$e=\frac{1}{2}(1-\alpha^2)$$

являются центральными идемпотентами кольца $K\Gamma$ и

$$K\Gamma=K\Gamma e\oplus K\Gamma e_1\oplus\ldots\oplus K\Gamma e_4.$$

Так как

$$K\Gamma e_i\cong K,\ i=1, 2, 3, 4,$$

то нильпотентные элементы кольца $K\Gamma$ принадлежат идеалу $K\Gamma e$, который имеет K-базис e, ae, be, abe. Идеал $K\Gamma e$ содержит нильпотентный элемент тогда и только тогда, когда для некоторых c_0, c_1, c_2, c_3 из кольца K имеем

$$(c_0e+c_1ae+c_2be+c_3abe)^2=0,$$

что влечет за собою

$$c_0^2=c_1^2+c_2^2+c_3^2,\ c_0c_1=c_0c_2=c_0c_3=0.$$

Тогда $c_0^3=0$, что возможно только при $c_0=0$, и

$$x=c_1ae+c_2be+c_3abe$$

является нецентральным нильпотентным элементом кольца $K\Gamma$.

Теорема 1. Пусть групповое кольцо KG является ξ-кольцом. Тогда каждая подгруппа группы G нормальна в G и, при некоммутативности группы G, кольцо K строго регулярно и содержит поле рациональных чисел.

Доказательство. Если g — элемент из группы G порядка n_i, то нильпотентный элемент

$$z=(1+g+\ \ \ +g^{n-1})h(1-g)$$

перестановочен с каждым элементом h из G. Отсюда вытекает равенство

$$(2)\qquad 2hgh+h\left(\sum_{i=2}^{n-1}g^i\right)h+\left(\sum_{i=1}^{n-1}g^i\right)hgh=\left(\sum_{i=1}^{n-1}g^i\right)h^2+h\left(\sum_{i=0}^{n-1}g^i\right)hg.$$

При char K 2 из (2) следует, что базисный элемент hgh совпадает с одним из элементов g^ih^2 или hg^ihg $(1\leq i\leq n-1)$, а это доказывает нормальность циклической подгруппы $\langle g\rangle$ в группе G.

Если же char $K=2$ и g является 2-элементом, то $1+g$ — центральный нильпотентный элемент кольца KG и, следовательно, g принадлежит центру группы G. Кроме того, если порядок элемента g не делится на 2, то, сравнивая базисный элемент hg^2h в равенстве (2), легко заключаем, что циклическая подгруппа $\langle g\rangle$ нормальна в G.

Групповое кольцо факторгруппы $G/\pi(G)$ группы G по периодической части $\pi(G)$ над факторкольцом $K/\mathrm{rad}\,K$ кольца K по его радикалу $\mathrm{rad}\,K$ является ξ-кольцом, как гомоморфный образ кольца KG, и полупервично [4]. Следовательно, оно строго регулярно, и факторгруппа $G/\pi(G)$ периодическая. Поэтому G — периодическая абелева или гамильтонова группа [6].

Далее, так как нильпотентные элементы кольца KG центральны, то наличие в K нильпотентных элементов влечет за собою коммутативность группы G. Отсюда вытекает, что если G — гамильтонова группа, то K — строго регулярное кольцо. Покажем, что тогда K содержит поле рациональных чисел.

Действительно, 2 — обратимый элемент кольца K, ибо в противном случае существует такой ненулевой элемент z из кольца K, что $2z=0$ и $z(1+a)$ — центральный нильпотентный элемент KG, где a — образующий элемент группы Γ, а это невозможно.

Если некоторое рациональное число не принадлежит K, то существует такое простое число $p>2$, что двусторонний идеал Kp не совпадает с K, и групповое кольцо $(K/K_p)G$ является ξ-кольцом. Пусть x_0, y_0, n такие натуральные числа, что

$$0\ \ x_0<p,\ 0\leq y_0<p,\ 1+x_0^2+y_0^2=np$$

и $0<n<p$ [7, стр. 73]. Тогда элементы $1+Kp$, x_0+Kp, y_0+Kp факторкольца K/Kp составляют ненулевое решение уравнения (1) и, по лемме

2, групповое кольцо $(K/Kp)G$ содержит нецентральный нильпотентный элемент, что невозможно.

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть K — коммутативное кольцо конечной характеристики. Групповое кольцо KG строго регулярно тогда и только тогда, когда кольцо K строго регулярно, а G — периодическая абелева группа, и порядок каждого элемента из группы G обратим в кольце K.

Следствие 2. Групповое кольцо KG над полем конечной характеристики является ξ-кольцом тогда и только тогда, когда G — периодическая абелева группа.

Дальше будем рассматривать групповые ξ-кольца KG неабелевой группы G. Так как нильпотентные элементы в ξ-кольцах центральны, то, ввиду леммы 2, можем предполагать, что уравнение (1) в кольце K имеет только нулевое решение.

Пусть $K[t]$ — кольцо полиномов над K, а $\Phi_n(t)$ — полином деления круга на n равных частей.

Определение. Периодическую абелеву группу H будем называть примитивной по отношению к кольцу K, если каждый элемент g из H имеет такой порядок $n=n(g)$, что уравнение (1) обладает в факторкольце $K[t]/(\Phi_n(t))$ только нулевым решением.

Теорема 2. Если K — коммутативное кольцо, то эквивалентны следующие утверждения:

I. Групповое кольцо KG является ξ-кольцом.

II. Группа $G=\Gamma\times H$ гамильтонова и H примитивна по отношению к K, а кольцо K строго регулярно и содержит поле рациональных чисел Q.

III. Групповое кольцо KG строго регулярно.

Доказательство. Из I следует II. Пусть для некоторого элемента g из H порядка n в факторкольце

$$K_n=K[t]/(\Phi_n(t))$$

уравнение (1) имеет ненулевое решение. Кольцо K_n можно рассматривать как K-алгебру A над кольцом K с базисом

$$1,\ \theta,\ \theta^2,\ \ldots,\ \theta^{\varphi(n)-1},$$

где φ — функция Эйлера, а θ — корень полинома $\Phi_n(t)$.

Так как элемент

$$\eta=\frac{1}{n}\,g(n-1-g-\cdots-g^{n-1})$$

является первообразным корнем n-ой степени из единицы в кольце

$$\frac{1}{n}\,(n-1-g-\cdots-g^{n-1})KH,$$

то алгебру A можно вложить в KH. Поэтому уравнение (1) обладает ненулевым решением в кольце KH. Поскольку KG можно рассматривать, ввиду теоремы 1, как групповое кольцо группы Γ над кольцом KH, то по лемме 2 KG обладает нецентральным нильпотентным элементом, что невозможно.

Из II следует III. Пусть x_0 является решением уравнения $a^2x=a$, $a\in KG$, и N — опорная подгруппа элемента a [4]. Тогда существует такое решение x_1, что опорная подгруппа элемента x_1 принадлежит N, и поэтому можем считать, что группа G конечна.

Теорема будет доказана, если докажем, что групповое кольцо группы Γ над кольцом KH строго регулярно.

Кольцо QH группы H над полем рациональных чисел Q разлагается в прямую сумму

$$QH = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_s$$

полей деления круга

$$I_k \cong Q(\varepsilon_k), \quad k = 1, 2, \ldots, s,$$

где ε_k — первообразный корень из единицы степени n_k [8]. Тогда

$$KH \cong K \otimes_Q QH \cong \sum_{i=1}^{s} \oplus \left(K \otimes_Q Q(\varepsilon_k)\right)$$

и, следовательно, достаточно рассмотреть групповое кольцо группы Γ над кольцом $K \otimes_Q Q(\varepsilon_k)$.

Если уравнение (1) обладает ненулевым решением в кольце $K \otimes_Q Q(\varepsilon_k)$, оно имеет ненулевое решение и в факторкольце

$$K_{n_k} = K[t] / (\Phi_{n_k}(t)),$$

так как

$$K \otimes_Q Q(\varepsilon_k) \cong K \otimes_Q (Q[t] / (\Phi_{n_k}(t))) \cong K_{n_k}.$$

Однако это противоречит существованию в группе H элемента порядка n_k [8]. Следовательно, групповое кольцо группы Γ над кольцом $K \otimes_Q Q(\varepsilon_k)$ строго регулярно.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Neumann, J. von. On regular rings. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **22**, 1936, 707—713
2. Arens, R. F., J. Kaplansky. Topological representation of algebras. — Trans. Amer Math. Soc., **63**, 1948, 457—481.
3. Utumi J. On ξ-rings. — Proc. Japan Acad., **33**, 1957, 63—66.
4. Connel, I. G. On the group ring. — Canad. J. Math., **15**, 1963, 650—685.
5. Drazin, M. P. Rings with central idempotent or nilpotent elements. — Proc. Edinburgh Math. Soc., **9**, 1958, 157—165.
6. Холл, М. Теория групп. Москва, 1962.
7. Обрешков, Н. Теория на числата, София, 1955.
8. Higman, G. The units of group rings. — Proc. London Math. Soc., **46**, 1940, 251—248,

Поступило 11. XII. 1970 г.

ВЪРХУ СТРОГО РЕГУЛЯРНИТЕ ГРУПОВИ ПРЪСТЕНИ

С. В. Миховски

(Резюме)

Дава се описание на строго регулярните групови пръстени KG на произволна група G над комутативен пръстен K с единица.

ON THE STRONGLY REGULAR GROUP RINGS

S. V. Mihovski

(Summary)

The present paper contains a description of the strongly regular group rings KG of an arbitrary group G over a commutative ring K with a unity.